Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

Т. А. Болохов

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ РАСШИРЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ВЕКТОРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Введение

В работе рассматриваются свойства квадратичных форм вида

$$Q^{\kappa}_{\Delta}(\vec{f}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big|\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 d^3x - \big(\frac{\alpha}{\rho} - \beta\kappa\big) \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}(\vec{x})|^2 \, d^2s\Big) \qquad (1)$$

от векторных функций $\vec{f}(\vec{x})$ в трехмерном пространстве, удовлетворяющих некоторому калибровочному условию, при различных значениях коэффициента α (здесь B_ρ – это шар радиуса ρ с центром в начале координат). Такая же квадратичная форма для скалярных функций

$$Q^{\kappa}(f) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big|\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 d^3x - \big(\frac{1}{\rho} - \beta\kappa\big) \int\limits_{\partial B_\rho} |f(\vec{x})|^2 \, d^2s\Big), \qquad (2)$$

при значении $\alpha = 1$ соответствует описанному в литературе случаю взаимодействия частицы с точечным потенциалом [1] и является замыкаемой полуограниченной формой, определяемой симметрическим или самосопряженным оператором. Мы покажем, что для случая функции $\vec{f}(\vec{x})$, принимающей значения в трехмерном векторном пространстве, помимо значения $\alpha = 1$ квадратичная форма (1) может быть определена также в интервале $3/2 \leqslant \alpha \leqslant 3$, при этом калибровочное условие зависит от параметра α. Вопрос о достаточных условиях существования форм вида (1) остается за рамками настоящей работы.

На множестве гладких векторных функций, убывающих на бесконечности, квадратичная форма (1) является квадратичной формой

Ключевые слова: оператор Лапласа в сферических координатах, поперечное и продольные подпространства, векторные сферические функции, расширения квадратичных форм.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-11-00598.

оператора Лапласа:

$$Q_{\Delta}(\vec{f}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big|\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x. \tag{3}$$

Отличия проявляются только на более широком пространстве функций, расходящихся определенным образом в начале координат. В приложениях к электродинамике или квантовой механике такие расходимости обычно возникают от взаимодействия с сингулярным "внешним" полем. Однако, квадрат модуля во втором слагаемом в (1) нехарактерен для учета внешнего источника, в этом случае поле $\vec{f}(\vec{x})$ скорее должно умножаться на некоторый вектор. Поэтому в качестве приложений для настоящей работы мы видим теорию поля, где квадрат модуля может появляться как результат учета самодействия, см., например, [2].

§1. Параметризация векторного поля

Основная идея работы состоит в исследовании сужений формы (1) на линейные подпространства поперечных и продольных векторных функций, а после этого – на некоторые их линейные комбинации. В таких подпространствах аналогом разложения по (скалярному) сферическому базису Y_{lm}, $0 \leqslant l, |m| \leqslant l$, является разложение по векторным сферическим гармоникам (VSH) [3]

$$\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = \frac{\vec{x}}{r} Y_{lm}, \qquad 0 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{4}$$

$$\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = \hat{l}^{-1} r \vec{\partial} Y_{lm}, \qquad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{5}$$

$$\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) = \hat{l}^{-1} (\vec{x} \times \vec{\partial}) Y_{lm}, \qquad 1 \leqslant l, \quad |m| \leqslant l, \tag{6}$$

здесь $\hat{l} = \sqrt{l(l+1)}$. Такие гармоники, также как и Y_{lm}, являются функциями только угловых переменных $\Omega \in \mathbb{S}^2$ и образуют ортонормированный базис относительно интегрирования по сфере.

Используя VSH, любую достаточно гладкую векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$ можно параметризовать с помощью наборов функций v_0, $\{v_{lm}\}$,

$\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ радиальной переменной $r = |x|$:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0 + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l}\big((\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\big) \tag{7}$$

$$+ \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l}\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l}\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \tag{8}$$

так, что первая строка представляет из себя продольную компоненту

$$(\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm} = \vec{\partial}\,\frac{v_{lm}}{r}Y_{lm},$$

а две оставшихся суммы – поперечную

$$\vec{\partial}\cdot\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) = 0, \quad \vec{\partial}\cdot\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} = 0$$

(здесь и далее подробные формулы см. в [4]).

Действие оператора Лапласа

$$\Delta\vec{f}(\vec{x}) = -\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\vec{f}(\vec{x})$$

на гладкую векторную функцию (7), (8) сводится к действию соответствующих радиальных частей этого оператора

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r \geqslant 0, \quad l = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

на каждую функцию из наборов $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ и действию операции T_1 на компоненту v_0. Скалярное произведение из пространства функций на $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int_{\mathbb{R}^3}\overline{\vec{f}(\vec{x})}\cdot\vec{g}(\vec{x})\,d^3x = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_j \overline{f^j(\vec{x})}g^j(\vec{x})\,d^3x \tag{10}$$

переносится на наборы $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ в виде следующих положительно определенных интегралов

$$\Big(\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \frac{\tilde{\phi}_{nj}}{r}\vec{\Phi}_{nj}\Big) = \int\limits_0^\infty \overline{\phi_{lm}}\tilde{\phi}_{nj}\, dr\, \delta_{ln}\delta_{mj} \equiv (\phi_{lm}, \tilde{\phi}_{nj})\, \delta_{ln}\delta_{mj}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}, \hat{n}\frac{\tilde{u}_{nj}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{nj} + \frac{\tilde{u}'_{nj}}{r}\vec{\Psi}_{nj}\Big) \\ &\qquad = \int\limits_0^\infty \big(\overline{u'}\tilde{u}' + \frac{l(l+1)}{r^2}\overline{u}\tilde{u}\big) dr\, \delta_{ln}\delta_{mj} \equiv \langle u, \tilde{u}\rangle_l\, \delta_{ln}\delta_{mj}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Big(\big(\frac{v_{lm}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}, \big(\frac{\tilde{v}_{nj}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{nj} + \hat{n}\frac{\tilde{v}_{nj}}{r^2}\vec{\Psi}_{nj}\Big) = \langle v, \tilde{v}\rangle_l\, \delta_{ln}\delta_{mj}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что свойства оператора Лапласа в параметризации (7), (8) определяются свойствами его радиальных частей (9) в скалярных произведениях (11)–(13). Операторы T_l, $1 \leqslant l$, в скалярном произведении (11) самосопряжены в существенном, никакая добавка к квадратичной форме (3), связанная с подпространством P_ϕ, порожденным гармониками $\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)$ (последней суммой в (8)), не даст замкнутого расширения. В то же время, операторы T_l в скалярном произведении (12) являются симметрическими и имеют индексы дефекта $(1,1)$ при $l = 1$. Самосопряженные расширения оператора T_1 в скалярном произведении $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ задаются смешанным действием

$$T_1^\kappa w = T_1 w - \frac{2}{r}w'(0) = -\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r^2}w - \frac{2}{r}w'(0) \tag{14}$$

и определяются, в зависимости от параметра расширения κ, на множествах

$$\mathcal{D}_\kappa = \{w(r) : \langle w, w\rangle_1 < \infty,\ \langle T_1^\kappa w, T_1^\kappa w\rangle_1 < \infty,\ 3w''(0) = 4w'(0)\}, \tag{15}$$

спектральные свойства этих операторов описаны в [5]. Здесь стоит отметить, что все основные свойства представления векторных функций (7), (8) сохраняются при расширении параметров u_{1m}, v_{1m} (или какой-либо их линейной комбинации) до множества $\mathcal{D}_\kappa$, в частности, можно приравнять нулю интеграл от полной производной в (13), а также интеграл в условии ортогональности поперечной и продольных частей:

$$\big((\frac{v_{1m}}{r})'\vec{\Upsilon}_{1m}+\sqrt{2}\frac{v_{1m}}{r^2}\vec{\Psi}_{1m},\sqrt{2}\frac{u_{1m}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}+\frac{u_{1m}'}{r}\vec{\Psi}_{1m}\big)$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_0^\infty\big(u_{1m}(\frac{\overline{v}_{1m}}{r})'+\frac{u_{1m}'\overline{v}_{1m}}{r}\big)dr=\sqrt{2}\int\limits_0^\infty\big(\frac{u_{1m}\overline{v}_{1m}}{r}\big)'dr=0.$$

В заключении этой части приведем формулы преобразования от векторной функции $\vec{f}(\vec{x})$ к параметрам $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$, то есть преобразования, обратного к подстановке (7), (8):

$$\phi_{lm}(r)=r\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\cdot\vec{f}(r,\Omega)=\frac{1}{r}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\delta(r-s)\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\cdot\vec{f}(\vec{x}),$$
$$u_{lm}(r)=\int\limits_0^\infty ds\,T_l^{-1}(r,s)\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\big(\hat{l}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}-\frac{\partial}{\partial s}s\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(s,\Omega)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\big(\frac{\hat{l}}{s^2}T_l^{-1}(r,s)\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}+\frac{1}{s}(\frac{\partial}{\partial s}T_l^{-1}(r,s))\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(\vec{x}),$$
$$v_{lm}(r)=\int\limits_0^\infty ds\,T_l^{-1}(r,s)\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\big(\hat{l}\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}-\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}s^2\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(s,\Omega)$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\big((\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{s}T_l^{-1}(r,s))\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}+\frac{\hat{l}^2}{s}T_l^{-1}(r,s)\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(\vec{x}),$$

здесь $\vec{x}=\vec{x}(s,\Omega)$, а $T_l^{-1}(r,s)$ – это ядра операторов, обратных к операторам T_l, участвующим в скалярных произведениях (12), (13):

$$T_l^{-1}(r,s)=\frac{1}{2l+1}\big(\frac{s^{l+1}}{r^l}\theta(r-s)+\frac{r^{l+1}}{s^l}\theta(s-r)\big).$$

§2. Расширения квадратичной формы

Ввиду ортогональности компонент разложения (7), (8), квадратичная форма оператора Лапласа (3) при действии на $\vec{f}(\vec{x})$ диагонализуется и представляется в следующем виде:

$$Q_\Delta(\vec{f}) = (v_0, T_1 v_0) + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \left(\langle v_{lm}, T_l v_{lm}\rangle_l + \langle u_{lm}, T_l u_{lm}\rangle_l + (\phi_{lm}, T_l \phi_{lm}) \right). \tag{16}$$

Рассмотрим подпространство P_a,

$$P_a = \{ \big(\hat{l}\frac{w_{lm}}{r^2} + (\frac{a w_{lm}}{r})'\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(\frac{w'_{lm}}{r} + \hat{l}\frac{a w_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm}\}, \quad 1 \leqslant l,$$

натянутое на векторы, ортогональные к P_ϕ, у которых параметры v_{lm} и u_{lm} связаны простейшим линейным соотношением

$$v_{lm}(r) = a u_{lm}(r), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Отдельно выделим подпространство продольных векторов, натянутых на $\vec{\Upsilon}_0$:

$$P = \{\frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0\}.$$

Подпространство, ортогональное к P_a, P и к P_ϕ, строится с помощью модулярного преобразования параметра a:

$$a \to -\frac{1}{\overline{a}}, \tag{17}$$

и, таким образом, все пространство векторных функций $\mathcal{H}_{\mathrm{vec}}(\mathbb{R}^3)$ раскладывается в сумму

$$\mathcal{H}_{\mathrm{vec}}(\mathbb{R}^3) = P \dot{+} P_\phi \dot{+} P_a \dot{+} P_{-1/\overline{a}}, \tag{18}$$

соответственно группам слагаемых в разложении

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0 + \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} \tag{19}$$

$$+ \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \Big(\big(\hat{l}\frac{w_{lm}}{r^2} + (\frac{a w_{lm}}{r})'\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(\frac{w'_{lm}}{r} + \hat{l}\frac{a w_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm}\Big) \tag{20}$$

$$+ \sum_{1\leqslant l,|m|\leqslant l} \Big(\big(\hat{l}\frac{\tilde{w}_{lm}}{r^2} - (\frac{\tilde{w}_{lm}}{\overline{a} r})'\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(\frac{\tilde{w}'_{lm}}{r} - \frac{\hat{l}}{\overline{a}}\frac{\tilde{w}_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm}\Big). \tag{21}$$

Мы не называем пространство векторных функций $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$, так как требуем от его элементов дифференцируемости. В то же время, вопрос о замкнутости полученного ортогонального разложения может ставиться только при наличии нормы, сохраняющей условие поперечности, например, нормы, порожденной квадратичными формами (1) или (3).

Подпространства P_a сохраняют главные свойства части продольного подпространства (7)

$$P_a|_{a=\infty} = \{(\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\}$$

и части поперечного подпространства $P^{\perp}$, порожденной первым слагаемым в (8)

$$P_a|_{a=0} = \{\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\}, \quad P^{\perp} = P_a|_{a=0} \dot{+} P_{\phi}.$$

А именно, действие оператора Лапласа сводится к действию операторов T_l на параметры w_{lm}, то есть, если

$$\vec{f}_{w_{lm}} = \big(\hat{l}\frac{w_{lm}}{r^2} + (\frac{aw_{lm}}{r})'\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(\frac{w'_{lm}}{r} + \hat{l}\frac{aw_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm},$$

то

$$\Delta\vec{f}_{w_{lm}} = \big(\hat{l}\frac{T_l w_{lm}}{r^2} + (\frac{aT_l w_{lm}}{r})'\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(\frac{(T_l w_{lm})'}{r} + \hat{l}\frac{aT_l w_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm} = \vec{f}_{T_l w_{lm}}. \tag{22}$$

При этом скалярное произведение пропорционально скалярному произведению (12) для соответствующих параметров w_{lm}:

$$(\vec{f}_{w_{lm}}, \vec{f}_{\tilde{w}_{l'm'}}) = (1+|a|^2)\langle w_{lm}, \tilde{w}_{l'm'}\rangle_l \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Квадратичная форма оператора Лапласа (16), соответственно разложению (18), может быть переписана в виде суммы

$$\begin{aligned} Q_\Delta(\vec{f}) = (v_0, T_1 v_0) &+ \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} (\phi_{lm}, T_l\phi_{lm}) \\ &+ \sum_{1\leqslant l, |m|\leqslant l} (1+|a|^2)\big(\langle w_{lm}, T_l w_{lm}\rangle_l + |a|^{-2}\langle \tilde{w}_{lm}, T_l\tilde{w}_{lm}\rangle_l\big), \end{aligned} \tag{23}$$

в которой функции w_{lm} и $\tilde{w}_{lm}$ параметризуют векторы из подпространств P_a и $P_{-1/\overline{a}}$, соответственно. Переход от параметров u_{lm}, v_{lm}

к w_{lm}, $\tilde{w}_{lm}$ выглядит следующим образом:

$$u_{lm} = w_{lm} + \tilde{w}_{lm}, \qquad w_{lm} = \frac{1}{1+|a|^2}(u_{lm} + \overline{a} v_{lm}),$$
$$v_{lm} = a w_{lm} - \frac{1}{\overline{a}}\tilde{w}_{lm}, \qquad \tilde{w}_{lm} = \frac{|a|^2}{1+|a|^2}(u_{lm} - \frac{1}{a} v_{lm}).$$

Далее мы будем рассматривать действие оператора Лапласа и его квадратичной формы на подпространство функций $\mathcal{H}^a_{\mathrm{vec}}(\mathbb{R}^3)$, образованное первыми тремя слагаемыми суммы (18) или множеством функций, параметризуемых в виде сумм (19)–(20). Такое подпространство описывает электромагнитное поле $\vec{f}(\vec{x})$, удовлетворяющее следующим калибровочным условиям:

$$\begin{aligned}\bigl(r\frac{\partial}{\partial r} + a\hat{l} + 2\bigr)\int_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)} \cdot \vec{f}(\vec{x}(r,\Omega))\, d\Omega \\ = \bigl(ar\frac{\partial}{\partial r} + \hat{l} + a\bigr)\int_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)} \cdot \vec{f}(\vec{x}(r,\Omega))\, d\Omega, \quad 1 \leqslant l, |m| \leqslant l.\end{aligned}$$

Квадратичная форма оператора Лапласа на подпространстве $\mathcal{H}^a_{\mathrm{vec}}(\mathbb{R}^3)$ при переносе на параметризующие функции представляет из себя часть слагаемых суммы (23)

$$Q^a_\Delta(\vec{f}) = (v_0, T_1 v_0) + \sum_{1\leqslant l, |m| \leqslant l} \bigl((\phi_{lm}, T_l \phi_{lm}) + (1+|a|^2)\langle w_{lm}, T_l w_{lm}\rangle_l\bigr). \tag{24}$$

Теперь рассмотрим такое расширение квадратичной формы Q^a_Δ,

$$\begin{aligned}Q^{a\kappa}_\Delta(\vec{f}) = (v_0, T_1 v_0) + \sum_{1\leqslant l, |m| \leqslant l} (\phi_{lm}, T_l \phi_{lm}) + \sum_{|m|\leqslant 1} \langle w_{1m}, T^\kappa_1 w_{1m}\rangle_1 \\ + \sum_{2\leqslant l, |m| \leqslant l} (1+|a|^2)\langle w_{lm}, T_l w_{lm}\rangle_l,\end{aligned} \tag{25}$$

в котором в первом слагаемом суммы, соответствующей подпространству P_a, квадратичные формы $\langle w_{1m}, T_1 w_{1m}\rangle_1$ заменяются на квадратичные формы оператора T^κ_1

$$q_\kappa(w_{1m}) = \langle w_{1m}, T^\kappa_1 w_{1m}\rangle_1.$$

При этом, соответственно, области определения этих форм расширяются до множества два раза дифференцируемых функций, исчезающих в нуле, с ограниченным значением производной. Все остальные слагаемые в (24), соответствующие другим подпространствам, остаются без изменения. Таким образом, в область определения расширенной формы попадают функции, расходящиеся как $|r|^{-1}$ в начале координат.

§3. Перенос в трехмерное пространство

Убедимся теперь, что расширенная форма $Q_\Delta^{a\kappa}$ может быть представлена в виде (1) с некоторым параметром $\alpha(a)$. Для этого положим

$$\vec{f}_m = \sqrt{2}\big(z(\frac{w'_{1m}}{r} - \frac{w_{1m}}{r^2}) + \frac{w_{1m}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{1m} + \big(2\frac{zw_{1m}}{r^2} + \frac{w'_{1m}}{r}\big)\vec{\Psi}_{1m}, \quad a=\sqrt{2}z, \tag{26}$$

и вычислим значение формы (25) на этом векторе:

$$\begin{aligned} Q_\Delta^{a\kappa}(\vec{f}_m) &= (1+2|z|^2)\langle w_{1m}, T_1^\kappa w_{1m}\rangle_1 \\ &= (1+2|z|^2)\lim_{\rho\to 0}\int_\rho^\infty \big(\frac{d\overline{w}_{1m}}{dr}\frac{d}{dr}T_1^\kappa w_{1m} + \frac{2}{r^2}\overline{w}_{1m}T_1^\kappa w_{1m}\big)\,dr \\ &= (1+2|z|^2)\lim_{\rho\to 0}\int_\rho^\infty \big(\frac{d\overline{w}_{1m}}{dr}\frac{d}{dr}T_1 w_{1m} + \frac{2}{r^2}\overline{w}_{1m}T_1 w_{1m} \\ &\quad + 2(\frac{\overline{w}'_{1m}}{r^2} - \frac{2\overline{w}_{1m}}{r^3})w'_{1m}(0)\big)\,dr. \end{aligned}$$

Здесь мы раскрыли действие расширенного оператора T_1^κ в соответствии с (14). Последнее слагаемое в интеграле является полной производной, а все, что содержит операцию T_1, можно с помощью формулы (22) выразить через действие оператора Лапласа на $\vec{f}_m$, получим

$$Q_\Delta^{a\kappa}(\vec{f}) = -\lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x + 2(1+2|z|^2)w'_{1m}(0)\frac{\overline{w_{1m}(\rho)}}{\rho^2}\Big) \tag{27}$$

Теперь, следуя теореме Гаусса–Остроградского, проинтегрируем по частям первое слагаемое:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x + \int\limits_{\partial B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\partial_k f_m^j(\vec{x})\,d^2\sigma_k,$$

здесь $d^2\vec{\sigma}$ – это вектор, нормальный к поверхности ∂B_ρ шара B_ρ с центром в начале координат. Полагая $\vec{x} = \vec{x}(\rho, \Omega)$ и $d^2\vec{\sigma} = \vec{x}\rho d^2\Omega$, где Ω — это, как и ранее, точка на единичной сфере $\mathbb{S}^2$, интеграл по поверхности можно переписать как интеграл по единичной сфере:

$$\int\limits_{\partial B_\rho} \overline{f^j_m(\vec{x})}\partial_k f^j_m(\vec{x})\, d^2\sigma^k = \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{f^j_m(\vec{x})}\partial_k f^j_m(\vec{x}) x_k \rho\, d^2\Omega. \tag{28}$$

Подставим выражение (26) в производную $x_k\partial_k \vec{f}_m$, получим

$$\begin{aligned} x_k\partial_k \vec{f}_m &= x_k\partial_k \Big(\sqrt{2}\big((\frac{z w_{1m}}{r})' + \frac{w_{1m}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{1m} + \big(2\frac{z w_{1m}}{r^2} + \frac{w'_{1m}}{r}\big)\vec{\Psi}_{1m}\Big) \\ &= \sqrt{2}\big(z w''_{1m} + (1-2z)\frac{w'_{1m}}{r} - 2(1-z)\frac{w_{1m}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{lm} \\ &\quad + \big(w''_{1m} + (2z-1)\frac{w'_{1m}}{r} - 4z\frac{w_{1m}}{r^2}\big)\vec{\Psi}_{lm}, \end{aligned}$$

здесь мы использовали свойство независимости векторных сферических гармоник от радиальной переменной:

$$x_k\partial_k \vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = 0, \quad x_k\partial_k \vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = 0.$$

Перемножая полученные выражения для $x_k\partial_k \vec{f}_m$ и $\vec{f}_m$, придем к следующему выражению для интеграла (28):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{f^j_m(\vec{x})}\,\partial_k f^j_m(\vec{x}) x_k \rho\, d^2\Omega$$

$$= (1+2|z|^2) w''_{1m}\overline{w}'_{1m} + 2(z+\overline{z}-|z|^2)\frac{w''_{1m}\overline{w}_{1m}}{\rho} \tag{29}$$

$$+ (2(z+\overline{z}) - 4|z|^2 - 1)\frac{|w'_{1m}|^2}{\rho} + (8|z|^2 - 4(z+\overline{z}) + 2)\frac{w'_{1m}\overline{w}_{1m}}{\rho^2} \tag{30}$$

$$+ 4(|z|^2 - z - \overline{z})\frac{\overline{w}'_{1m} w_{1m}}{\rho^2} - (12|z|^2 - 4(z+\overline{z}) + 4)\frac{|w_{1m}|^2}{\rho^3}, \tag{31}$$

где $w_{1m} = w_{1m}(\rho)$. Теперь напишем разложение функции $w(\rho)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$w(\rho) = w'(0)\rho + w''(0)\frac{\rho^2}{2} + \dots, \quad w'(\rho) = w''(0)\rho + \dots, \quad \rho \to 0,$$

подставим в него граничное условие из (15) и вычислим первые члены разложения для квадратичных слагаемых в (29)–(31) и (27):

$$\frac{w'(\rho)\overline{w(\rho)}}{\rho^2} \simeq \frac{1}{\rho}|w'(0)|^2 + w''(0)\overline{w'(0)} + \frac{1}{2}w'(0)\overline{w''(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + 2\kappa\big)|w'(0)|^2,$$

$$\frac{|w(\rho)|^2}{\rho^3} \simeq \frac{1}{\rho}|w'(0)|^2 + \frac{1}{2}w'(0)\overline{w''(0)} + \frac{1}{2}w''(0)\overline{w'(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{4}{3}\kappa\big)|w'(0)|^2,$$

$$\frac{|w'(\rho)|^2}{\rho} \simeq \frac{1}{\rho}|w'(0)|^2 + w'(0)\overline{w''(0)} + w''(0)\overline{w'(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{8}{3}\kappa\big)|w'(0)|^2,$$

$$w''(\rho)\overline{w'(\rho)} \simeq \frac{4}{3}\kappa|w'(0)|^2, \quad \frac{w''(\rho)\overline{w(\rho)}}{\rho} \simeq \frac{4}{3}\kappa|w'(0)|^2$$

$$\frac{\overline{w(\rho)}}{\rho^2} \simeq \frac{1}{\rho}\overline{w'(0)} + \frac{1}{2}\overline{w''(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{3}\kappa\big)\overline{w'(0)}.$$

Далее соберем вместе слагаемые из (29)–(31) и (27), получим

$$Q_\Delta^{\alpha\kappa}(\vec{f}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x$$
$$- \big(\frac{1}{\rho}(8|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 5) + (\frac{16}{3}|z|^2 + \frac{8}{3}(z+\overline{z}) + 4)\kappa\big)|w'_{1m}(0)|^2\Big)$$

и сравним это выражение с интегралом по сфере от квадрата модуля $\vec{f}_m$,

$$\int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}_m(\vec{x})|^2\, d^2s$$
$$= \int\limits_{\partial B_\rho} \big|\sqrt{2}\big(z(\frac{w_{1m}}{\rho})' + \frac{w_{1m}}{\rho^2}\big)\vec{\Upsilon}_{1m} + \big(2\frac{zw_{1m}}{\rho^2} + \frac{w'_{1m}}{\rho}\big)\vec{\Psi}_{1m}\big|^2\, d^2s$$
$$= (2|z|^2 + |1-z|^2)\frac{2|w_{1m}|^2}{\rho^2} + (z(1-\overline{z}) + \overline{z})\frac{2w'_{1m}\overline{w}_{1m}}{\rho} + (\overline{z}(1-z) + z)\frac{2\overline{w}'_{1m}w_{1m}}{\rho}$$
$$+ (2|z|^2+1)|w'_{1m}|^2 \simeq \big((4|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 3) + \frac{16}{3}|z+1|^2\kappa\rho\big)|w'_{1m}(0)|^2.$$

В результате получим

$$Q_\Delta^{\alpha\kappa}(\vec{f}_m) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x - \big(\frac{\alpha}{\rho} - \beta\kappa\big)\int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}_m(\vec{x})|^2\, d^2s\Big), \quad (32)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{8|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 5}{4|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 3},$$

$$\beta(z) = \frac{16}{3}\frac{4|z|^4 + 6|z|^2(z+\overline{z}) + (z+\overline{z})^2 + 7|z|^2 + 4(z+\overline{z}) + 11/4}{(4|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 3)^2}.$$

Несложно увидеть, что все вычисления и конечная формула для квадратичной формы (32) справедливы и в случае, когда векторная функция (26) представляется в виде суммы по сферическим гармоникам с разными значениями орбитального момента l и m. Формулу (32) можно рассматривать далее для функции $\vec{f}(\vec{x})$ общего вида (19)–(20), и, таким образом, расширить ее на все подпространство $\mathcal{H}^a_{\mathrm{vec}}(\mathbb{R}^3)$ функций с фиксированной калибровкой.

§4. Коэффициенты $\alpha(z)$ и $\beta(z)$

Посмотрим теперь, что из себя представляют полученные коэффициенты $\alpha(z)$, $\beta(z)$. Для этого перейдем к вещественным переменным $z = x + iy$. Тогда подстановка уравнения окружности

$$(x-\chi)^2 + y^2 = R^2 \tag{33}$$

с центром на вещественной прямой в выражение для $\alpha(z)$

$$\alpha(z) = \frac{8|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 5}{4|z|^2 + 2(z+\overline{z}) + 3} = \frac{8(x^2+y^2) + 4x + 5}{4(x^2+y^2) + 4x + 3}$$
$$= \frac{(16\chi+4)x + 8R^2 - 8\chi^2 + 5}{(8\chi+4)x + 4R^2 - 4\chi^2 + 3}$$

позволяет получить соотношение для радиуса R и положения центра χ окружностей линий уровня $\alpha(z)$:

$$R^2(\chi) = (\chi+1)(\chi - \frac{1}{2}), \quad \alpha(\chi) = \frac{4\chi+1}{2\chi+1}. \tag{34}$$

Из этих формул видно, что когда положение центра меняется в пределах $\chi \leqslant -1$, $1/2 \leqslant \chi$, задаваемых требованием положительности квадрата радиуса, то значение коэффициента α меняется в диапазоне $3/2 \leqslant \alpha \leqslant 3$. Так как χ и R находятся однозначно из соотношений (33), (34) при заданных x, y, то такие окружности, очевидно, не пересекаются друг с другом и покрывают всю комплексную плоскость.

Модулярное преобразование (17) для параметра z переводит систему окружностей уровней $\alpha(z)$ в набор окружностей

$$\tilde{\alpha} = \alpha(-\frac{1}{2\overline{z}}) = \frac{5|z|^2 + z + \overline{z} + 2}{3|z|^2 + z + \overline{z} + 1} = \frac{5(x^2+y^2) + 2x + 2}{3(x^2+y^2) + 2x + 1},$$

который описывается такой же зависимостью радиуса от положения центра:

$$R^2(\chi) = (\chi+1)(\chi - \frac{1}{2}), \quad \tilde{\alpha}(\chi) = \frac{5\chi - 1}{3\chi - 1},$$

то есть в ту же систему окружностей. Неподвижной точкой этого преобразования является окружность $\alpha(z) = \frac{9}{5}$, радиуса $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $z = 2$. В этом случае квадратичная форма (1) может иметь расширения в любом из подпространств (но не в обоих!) P_a, $P_{-1/\overline{a}}$ в разложении (18).

Перейдем теперь к описанию поведения коэффициента $\beta(z)$. Полином четвертой степени, стоящий в числителе, можно разложить на множители следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta(z) &= \frac{16}{3}\frac{4(x^2+y^2)^2 + 12(x^2+y^2)x + 11x^2 + 7y^2 + 8x + 11/4}{(4x^2+4y^2+4x+3)^2}\\ &= \frac{64}{3}\frac{\big((x+\frac{3+\sqrt{5}}{4})^2 + y^2 - \frac{\sqrt{5}}{4}\big)\big((x+\frac{3-\sqrt{5}}{4})^2 + y^2 + \frac{\sqrt{5}}{4}\big)}{(4x^2+4y^2+4x+3)^2}.\end{aligned}$$

Линии уровней такой функции можно опять искать в виде окружностей типа (33), в результате подстановки получаем

$$\beta(z) = \frac{4}{3}\frac{\big((2\chi + \frac{3-\sqrt{5}}{2})x + R^2 - \chi^2 + \frac{7-\sqrt{5}}{8}\big)\big((2\chi + \frac{3+\sqrt{5}}{2})x + R^2 - \chi^2 + \frac{7+\sqrt{5}}{8}\big)}{\big((2\chi+1)x + R^2 - \chi^2 + \frac{3}{4}\big)^2}.$$

Здесь в числителе и в знаменателе стоят полиномы второй степени по x. Для того, чтобы они сократились и дали константу, необходимо, чтобы их коэффициенты были пропорциональны друг другу, то есть, чтобы одновременно выполнялись два уравнения на R и χ, например

$$\begin{aligned}(\frac{7-\sqrt{5}}{8} + R^2 - \chi^2)(4\chi+2) &= \big(R^2 - \chi^2 + \frac{3}{4}\big)(4\chi + 3 - \sqrt{5}),\\ (\frac{7+\sqrt{5}}{8} + R^2 - \chi^2)(4\chi+2) &= \big(R^2 - \chi^2 + \frac{3}{4}\big)(4\chi + 3 + \sqrt{5}).\end{aligned}$$

Несложно увидеть, что это имеет место при

$$R^2(\chi) = (\chi+1)(\chi-\frac{1}{2}), \quad \beta(\chi) = \frac{16(\chi+\frac{3+\sqrt{5}}{4})(\chi+\frac{3-\sqrt{5}}{4})}{3(2\chi+1)^2},$$

то есть линии уровней коэффициента $\beta(z)$ совпадают с окружностями уровней коэффициента $\alpha(z)$. На окружности

$$\chi = -\frac{3+\sqrt{5}}{4}, \quad R = \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$$

коэффициент $\beta(z)$ обращается в ноль, в этом случае квадратичная форма (32) приобретает вид

$$\lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} |\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}|^2 d^3x - \frac{3+\sqrt{5}}{2\rho}\int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}(\vec{x})|^2\, d^2s\Big),$$

а все различия между расширениями содержатся только в области определения.

§5. Заключение

Мы рассмотрели сужения квадратичной формы оператора Лапласа на подпространства линейных комбинаций векторных функций из поперечного и параллельного подпространств, задаваемых параметризациями вида (19)–(21). Далее на одном из подпространств построили расширения квадратичной формы оператора, действующего на параметризующие функции, и перенесли действие расширения назад на пространство векторных функций. В полученном сравнительно простом выражении для квадратичной формы (32) мы исследовали зависимость коэффициентов от выбора комлексного параметра в описанном выше линейном подпространстве.

Литература

1. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом.* — Доклады АН СССР **137**, вып. 5 (1961), 1011–1014.
2. Т. А. Болохов, *Собственные состояния для квантового гамильтониана свободного поперечного поля.* — Препринт ПОМИ 2015/8, arxiv:1512.04121.
3. Б. Шутц, *Геометрические методы математической физики.* М. Мир, 1984.
   E. L. Hill, “The Theory of Vector Spherical Harmonics”, *Am. J. Phys.*, **22**, 211 (1954).
4. Т. А. Болохов, *Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **433** (2015), 78–110.

5. Т. А. Болохов, *Свойства радиальной части оператора Лапласа при $l = 1$ в специальном скалярном произведении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **434** (2015), 32–52.

Bolokhov T. A. Properties of some extensions of the quadratic form of the vector Laplace operator.

The action of the quadratic form of the Laplace operator and its extensions is treated in subspaces of linear combinations of the "transverse" and "parallel" functions with fixed orbital momentum with respect to the coordinate origin. The problem is posed in such a way that the resulting extensions, when transferred back to the space of vector functions, represent a simple limiting expressions with two coefficients. We study the behavior of these coefficients with respect to the initial choice of the linear subspace.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 2016 г.