Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 445, 2016 г.

О. М. Фоменко

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ЭПШТЕЙНА

§1

Пусть $Q(u_1, u_2, \dots, u_l)$ означает положительно определенную квадратичную форму

$$\sum d_{ij} u_i u_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l)$$

от $l(\geqslant 2)$ переменных с целыми коэффициентами $d_{ij}(= d_{ji})$. Рассмотрим дзета-функцию Эпштейна $\zeta_Q(s)$, ассоциированную с формой Q,

$$\zeta_Q(s) = \sum{}'(Q(u_1, u_2, \dots, u_l))^{-s},$$

где $s = \sigma + it$, $\sigma > \frac{l}{2}$ и суммирование идет по всем целым l-строкам $(u_1, u_2, \dots, u_l)$ с исключением $(0, 0, \dots, 0)$. Известно, что

$$\zeta_Q(s)(s - l/2)$$

является целой функцией, причем $\zeta_Q(s)$ обладает функциональным уравнением риманова типа $\ll s \to l/2 - s \gg$.

Известно [1], что при $l \geqslant 3$ все нули $\zeta_Q(s)$, кроме бесконечно малой пропорции, лежат в полосе $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{l-1}{2} + \delta$, $\delta > 0$ – любое фиксированное число; в случае $l = 2$ роль этой полосы играет $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$.

Если $l \geqslant 3$, то среднее квадратичное дзета-функции Эпштейна удовлетворяет (см. [2, 3])

$$\int\limits_0^T \left|\zeta_Q\left(\frac{l-1}{2} + it\right)\right|^2 = B_Q T \log T + O(T),$$

где $B_Q > 0$ – константа; в случае $l = 2$

$$\int\limits_0^T \left|\zeta_Q\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt = A_Q T (\log T)^2 + O(T \log T),$$

Ключевые слова: дзета-функции Эпштейна, квадратичные формы, экстремальные значения.

где $A_Q > 0$ – константа. Отметим, что в случае $\sigma > \frac{l-1}{2}$ $(l \geqslant 2)$ по классической теореме Карлсона

$$\int_0^T |\zeta_Q(\sigma+it)|^2\,dt \sim C_Q(\sigma)T,$$

$T \to \infty$, $C_Q(\sigma) > 0$.

Аналогично ведет себя дзета-функция Римана $\zeta(s)$ на вертикальных прямых полосы $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$ (см. [4]).

В 1928 году Тимтчмарш доказал следующий факт ($\ll$ эффект Титчмарша $\gg$; см. [4, Теорема 8.12]).

Пусть σ – фиксированное число, где $1/2 \leqslant \sigma < 1$. Тогда неравенство

$$|\zeta(\sigma+it)| > \exp(\log^\alpha t) \tag{1.1}$$

выполняется для некоторой последовательности $t = t_n$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

при условии $\alpha < 1 - \sigma$.

Цель настоящей работы – получить аналоги неравенства (1.1) для дзета-функций Эпштейна при $l \geqslant 2$. Речь идет об экстремальных значениях на вертикальных прямых полосы $(l-1)/2 \leqslant \sigma \leqslant l/2$. Обозначим дзета-функцию Эпштейна, ассоциированную с квадратичной формой

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_l) = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_l^2,$$

через $\zeta_l(s)$. В §2 рассматриваются дзета-функции Эпштейна $\zeta_l(s)(l \geqslant 4)$ и обсуждается возможность получения эффекта Титчмарша в общем случае $\zeta_Q(s)(l \geqslant 4)$. В §3 рассматривается тернарный случай $\zeta_Q(s)$, $l = 3$; в основном, будет трактоваться $Q(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. Дзета-функции Эпштейна, ассоциированные с бинарными формами, изучаются в §4.

Мы используем работы Рамачандры [5] и Баласубрамашиана и Рамачандры [6], в которых обобщался и уточнялся метод Титчмарша. При получении Ω-результатов для дзета-функций Эпштейна методом Титчмарша центральным является классический вопрос о представимости целых положительных чисел положительно определенными квадратичными формами.

§2

Рассмотрим сначала дзета-функции Эпштейна $\zeta_l(s)(l \geqslant 4)$. Отметим, что наличие эффекта Титчмарша для $\zeta_4(s)$ и $\zeta_6(s)$ очевидно в силу соотношений

$$\zeta_4(s) = 8(1 - 2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1),$$
$$\zeta_8(s) = 16(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s})\zeta(s)\zeta(s-3).$$

Мы воспользуемся результатами, сформулированными в Замечании 3 работы [6]. Пусть $\{a_n\}$ – последовтаельность комплексных чисел, обладающая следующими свойствами. (i) Ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

сходящийся в некоторой полуплоскости комплексной плоскости, может быть аналитически продолжен в область $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $T \leqslant t \leqslant T + Y$ и там

$$|F(s)| \leqslant T^A,$$

где A – константа. (ii) Существует бесконечное множество S простых чисел и постоянное целое число q такие, что a_n вещественные и одного и того же знака (0 может быть приписан любой знак), если n пробегает целые числа, целиком состоящие из простых множителей из S (в первой степени) и простых множителей, делителей числа q, в любой степени. (iii) Если n имеет вид

$$q \prod_{p \in S} p^{b(p)}$$

с $b(p) = 0$ или 1 и $b(p) = 0$ для всех p, кроме конечного множества, то $|a_n|$ ограничено снизу положительной константой. (iv) Существует константа $D' > 1$ такая, что для всех $x \geqslant 10$ величина

$$\sum_{x < p < D'x, p \in S} 1$$

лежит между $c'x/\log x$ и $c''x/\log x$, где $0 < c' < c''$ – некоторые константы (замечание: граница сверху всегда существует). Справедлив следующий результат из [6].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv); c *– любая положительная константа,* $T \geqslant 200$, $\log T \geqslant (200)^{1/c}$, *и* $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$. *Тогда существуют положительные константы* D_1, D_2 *такие, что*

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} |F(\frac{1}{2}+it)| \geqslant \exp\left\{D_1\left(\frac{\log Y}{\log\log Y}\right)^{1/2}\right\}, \tag{2.1}$$

и

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} |F(\sigma_0+it)| \geqslant \exp\left\{D_2\frac{(\log Y)^{1-\sigma_0}}{\log\log Y}\right\} \tag{2.2}$$

для каждой константы σ_0, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$.

Далее, существует положительная константа D_3 *такая, что для* $(\log\log T)^C \leqslant Y \leqslant T$ *и* $\log\log T \geqslant (200)^{1/c}$ *имеем*

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} |F(1+it)| \geqslant D_3 \log\log T. \tag{2.3}$$

Константы D_1, D_3 *зависят от* c, *константа* D_2 *– от* c *и* σ_0.

Возвращается к $\zeta_l(s)(l \geqslant 5)$. Легко видеть, что

$$\zeta_l(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_l(n)}{n^s} \quad (\sigma > \frac{l}{2}),$$

где $r_l(n)$ – количество представлений натурального n суммой l квадратов целых чисел. По классическому результату Харди (см. [7]), если $l \geqslant 5$, то при $n \to \infty$

$$r_l(n) = D_l n^{\frac{l}{2}-1}\sum_{q=1}^{\infty}\sideset{}{'}\sum_{h \bmod q}\left(\frac{S(h,q)}{q}\right)^l e\left(-\frac{nh}{q}\right) + O(n^{l/4});$$

здесь $D_l = \pi^{l/2}/\Gamma(l/2)$, суммирование $\sum'$ идет по приведенной системе вычетов, $e(z) = \exp(2\pi i z)$,

$$S(h,q) = \sum_{a \mod q} e\left(\frac{ha^2}{q}\right)$$

означает гауссову сумму. Остаточный член $O(n^{l/4})$ равен нулю при $5 \leqslant l \leqslant 8$.

Воспользуемся известным фактом: пусть $(h,q)=1$, тогда

$$|S(h,q)| = \begin{cases} q^{1/2}, & \text{если} \quad q \equiv 1 \pmod 2; \\ 0, & \text{если} \quad q \equiv 2 \pmod 4; \\ (2q)^{1/2}, & \text{если} \quad q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Простые вычисления показывают, что при $l \geqslant 5$

$$1 \ll r_l(n) \cdot n^{-\frac{l}{2}+1} \ll 1.$$

Введем функцию ($l \geqslant 5$)

$$F_l(s) = \zeta_l\bigl(s + \frac{l}{2} - 1\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} a_l(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1),$$
$$a_l(n) = r_l(n) n^{-\frac{l}{2}+1}.$$

Если в условии (ii) леммы 1 положить $S = \{p | p \geqslant p_0(l)\}$ и $q = 1$, то $F_l(s)$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) этой леммы. Поэтому функция $F_l(s)$ ($l \geqslant 5$) обладает эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

Переходим к диагональным кватернарным формам общего вида $Q(u_1, u_2, u_3, u_4) = d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_3 u_3^2 + d_4 u_4^2$, $D = d_1 d_2 d_3 d_4$. Пусть $r_Q(n)$ – количество целочисленных представлений натурального n формой Q. Клостерман [8] вычислил это количество: при $n \to \infty$

$$r_Q(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{D}} n S(n) + O\bigl(n^{\frac{17}{18}+\varepsilon}\bigr), \tag{2.4}$$

где $S(n)$ – сингулярный ряд,

$$S(n) = \prod_p \chi(p)$$

– разложение на p-множители; значение для $\chi(p)$ приводится ниже в замечании 1.

$$S(n) = \chi^{(1)} \chi^{(2)},$$

где $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$ – соответственно произведения

$$\chi^{(1)} = \prod_{p | 2D} \chi(p), \ \chi^{(2)} = \prod_{p \nmid 2D} \chi(p).$$

Накладывая на n условие представимости родом формы Q (что эквивалентно разрешимости некоторого сравнения и гарантирует $S(n) \neq 0$) и некоторые другие условия (например, $(n, 2D) = 1$) будем иметь

$$1 \ll \chi^{(1)} \ll 1. \tag{2.5}$$

С другой стороны,

$$\chi^{(2)} = \Biggl\{ \sum_{\substack{d | n \\ (d,2D)=1}} \frac{1}{d} \left(\frac{D}{d}\right) \Biggr\} \cdot \prod_{\substack{p \\ (p,2D)=1}} \Biggl\{ 1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^2} \Biggr\}, \tag{2.6}$$

где $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ – символ Кронекера. Теперь легко видеть, что

$$\frac{1}{\log\log n} \ll \chi^{(2)} \ll \log\log n.$$

Положим

$$F_Q(s) = \zeta_Q(s+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_Q(n) n^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где

$$a_Q(n) = r_Q(n) n^{-1}.$$

Для упрощения доказательства наложим на форму Q условие: коэффициенты формы d_1, d_2, d_3, d_4 – положительные нечетные попарно взаимно простые числа. Пусть также $(n, 2D) = 1$. Тогда (см. [8]) выполняется (2.5).

Положим в условии (ii) леммы 1

$$S = \{p | p \equiv 1 \pmod{4D}, p > p_0(D)\}, \quad q = 1.$$

На множестве бесквадратных чисел, порожденных простыми числами из S, в силу (2.5), (2.6), имеем $S(n) \gg 1$ и, следовательно, в силу (2.4), $a_Q(n) \gg 1$. Теперь ясно, что для $F_Q(s)$ все условия леммы 1 соблюдены; следовательно, $F_Q(s)$ обладает эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

Мы доказали следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $Q(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ – целочисленная положительно определенная квадратичная форма от $l \geqslant 4$ переменных, $\zeta_Q(s)$ – ассоциированная с Q дзета-функция Эпштейна. Тогда функция $F_Q(s) = \zeta_Q(s + l/2 - 1)$ обладает эффектом Титчмарша* (2.1)–(2.3) *в случаях*:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_l) = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_l^2,$$

где $l \geqslant 5$;

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_l) = d_1 u_1^2 + d_2 u_2^2 + d_3 u_3^2 + d_4 u_4^2,$$

где коэффициенты d_1, d_2, d_3, d_4 являются положительными нечетными попарно взаимно простыми числами.

Замечание 1. Результаты теоремы 1 в принципе переносятся на любые целочисленные положительно определенные квадратичные формы от $l \geqslant 4$ переменных. Действительно, еще в работах [9,10] была доказана при $l \geqslant 4$ асимптотическая формула для количества представлений

$r_Q(n)$ натурального n формой Q: если $n \to \infty$, то

$$r_Q(n) = \frac{(2\pi)^{l/2}}{\sqrt{D}\Gamma(l/2)} n^{\frac{l}{2}-1} S(n) + O(n^{\frac{l-1}{4}+\varepsilon}),$$

где D – детерминант формы; $S(n)$ – сингулярный ряд, который задается в явном виде следующим образом. Пусть

$$n = \prod_p p^{\alpha(p)}$$

– разложение n в произведение степеней простых чисел, $\lambda(2) = \alpha(2)+3$ и $\lambda(p) = \alpha(p) + 1$, если $p \geqslant 3$; $\nu(p)$ – количество решений сравнения

$$Q(u_1, u_2, \dots, u_l) \equiv n \pmod{p)^{\lambda(p)}}. \tag{2.7}$$

Тогда сингулярный ряд $S(n)$ дается формулой

$$S(n) = \prod_p \chi(p), \quad \chi(p) = p^{-(l-1)\lambda(p)} \nu(p).$$

Разрешимость сравнения (2.7) для каждого простого $p|2D$ гарантирует в случае $l \geqslant 5$ выполнение неравенства $S(n) \geqslant c > 0$, а в случае $l = 4$ (если n не содержит высоких степеней простых чисел p, делящих $2D$ и называемых анизотропными) выполнение неравенства

$$S(n) \gg \frac{1}{\log\log n}.$$

Это означает представимость достаточно больших n не только родом формы Q, но и самой формой Q.

Отметим, что анизотропное простое число $p = 2$ уже присутствует в случае суммы четырех квадратов, поскольку для четных n

$$r_4(n) = 24 \sum_{d\, odd, d|n} d.$$

При применении леммы 1 надо выбирать множество простых чисел S и постоянное число q таким образом, чтобы числа qn (где бесквадратные n порождаются только простыми из S) представлялись формой Q, а в случае $l = 4$ еще и удовлетворяли неравенству $S(qn) \gg 1$.

§3

Переходим к дзета-функции Эпштейна $\zeta_Q(s)$, где $Q(u_1,u_2,u_3)$ – положительная тернарная квадратичная форма с целыми коэффициентами. Подробно рассмотрим лишь случай

$$\zeta_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3(n)}{n^s}\quad \big(\sigma>\frac{3}{2}\big).$$

Приведем формулу Гаусса для $r_3(n)$:

$$r_3(n)=\sum_{d^2|n}R_3(n/d^2),$$

где $R_3(n)$ – количество примитивных представлений целого $n>0$ суммой трех квадратов целых чисел (т.е. представлений, в которых общим делителей трех квадратов u_1^2, u_2^2, u_3^2 является только 1); далее,

$$R_3(n)=\frac{G_n}{\pi}n^{1/2}L\big(1,\big(\frac{-4n}{*}\big)\big),$$

где

$$L\big(1,\big(\frac{-4n}{*}\big)\big)=\sum_{m=1}^{\infty}\big(\frac{-4n}{m}\big)\frac{1}{m},$$

$$G_n=\begin{cases}0, & \text{если}\quad n\equiv 0,4,7 \pmod 8,\\ 16, & \text{если}\quad n\equiv 3 \pmod 8,\\ 24, & \text{если}\quad n\equiv 1,2,5,6 \pmod 8.\end{cases}$$

Положим

$$F_3(s)=\frac{1}{6}\zeta_3\big(s+\frac{1}{2}\big)=\sum_{n=1}^{\infty}a_3(n)n^{-s}\quad (\sigma>1),$$

где $a_3(n)=6^{-1}r_3(n)n^{-1/2}$, $a_3(1)=1$.

Мы докажем эффект Титчмарша для $F_3(s)$ в форме (1.1), используя метод статьи [5]. Изложим этот метод (который также воспроизводится в статье автора [11]).

Рассмотрим ряд Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

абсолютно сходящийся в полуплоскости $\sigma>1$ и продолжимый как мероморфная функция в полуплоскость $\sigma\geqslant 1/2$.

Предположение α. *Если* $a_k(n)$ *определены для* $k{=}1,2,3,\ldots$ *соотношением*

$$(F(s))^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

и

$$F_k(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_k(n)|^2}{n^\sigma} \quad (1 < \sigma < 2),$$

то для фиксированного σ *при* $k \to \infty$

$$\log\log F_k(\sigma) \sim (2/\sigma)\log k.$$

Предположение β. *Пусть* $c > 0$ *– произвольная константа и* $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$, *где* $T > 20$ *фиксировано;* σ_0, $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, *фиксировано. Мы предполагаем, что* $F(s)$ *регулярна в области* $\sigma \geqslant \sigma_0$, $T \leqslant t \leqslant T + Y$, *и что в этой области*

$$|F(s)| \leqslant T^A,$$

где A *– константа, зависящая, возможно, только от* $F(s)$.

Этих предположений достаточно для доказательства эффекта Титчмарша у $F(s)$ в форме (1.1). Мы применим метод из [5] к функции $F_{3,\varepsilon'}(s)$, которую определим так. Пусть $-\Delta < 0$ – фундаментальный дискриминант, $L(s,\chi)$ – вещественный неглавный характер по модулю Δ. По теореме Зигеля, имеем

$$L(1,\chi) > \frac{1}{\Delta^\varepsilon},$$

если $\Delta > C_\varepsilon$. Хорошо известно, что

$$L\big(1, \big(\frac{-4n}{*}\big)\big) \ll \log n.$$

Здесь и ниже $\varepsilon, \varepsilon' \ldots$ – положительные сколь угодно малые постоянные числа. Пользуясь этими оценками, без труда получаем при некоторой достаточно большой константе $C_{\varepsilon'} > 0$, зависящей от ε',

$$1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}}{}' \frac{1}{n^{\sigma+\varepsilon'}} < 1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}} \frac{a_3(n)}{n^\sigma} < 1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}} \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon'}} \ (1 < \sigma < 2), \quad (3.1)$$

где $\sum'$ означает суммирование по бесквадратным n, порожденным простыми числами из S, где

$$S = \{p | p \equiv 1 \pmod 8, p > C_{\varepsilon'}\}.$$

Достаточно доказать эффект Титчмарша для функции

$$F_{3,\varepsilon'}(s) = 1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}} \frac{a_3(n)}{n^s} \quad (1 < \sigma < 2).$$

Найдем для нее аналог предположения α. Пусть

$$(F_{3,\varepsilon'}(s))^k = 1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}} \frac{a_{3,k}(n)}{n^s} \quad (1 < \sigma < 2)$$

и

$$F_{3,\varepsilon',k}(\sigma) = 1 + \sum_{n > C_{\varepsilon'}} \frac{a_{3,k}(n)^2}{n^\sigma} \quad (1 < \sigma < 2).$$

Граница сверху следует из (3.1) с применением аналогичной оценки в случае $\zeta(s)$ (см. [4, 5]). Имеем

$$F_{3,\varepsilon',k}(s) < \exp\{c'' \cdot k^{2/(\sigma-\varepsilon')}\}.$$

Граница снизу следует из (3.1) с применением неравенства

$$\prod_{p > (2k^2)^{1/(\sigma+\varepsilon')}}{}' (1 + k^2 p^{-(\sigma+\varepsilon')}) < F_{3,\varepsilon',k}(\sigma),$$

где $\prod'$ берется по простым числам из множества S; дальнейшие вычисления см., например, в [11]. Имеем

$$\exp\left\{c'\left(\frac{k^{2/(\sigma+\varepsilon')}}{\log k}\right)\right\} < F_{3,\varepsilon',k}(\sigma).$$

В результате доказан аналог предположения α: при $k > k_0(\varepsilon')$

$$\exp\{k^{2/(\sigma+2\varepsilon')}\} < F_{3,\varepsilon',k}(\sigma) < \exp\{k^{2/(\sigma-2\varepsilon')}\}. \tag{3.2}$$

Предположение β для $F_{3,\varepsilon'}(s)$ легко следует из свойств $\zeta_3(s)$.

Доказательство эффекта Титчмарша разбивается в [5] на восемь лемм, которым предшествует следующее допущение (напомним, что $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$, $c > 0$ – любая константа, σ_0 – константа из интервала $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$):

$$|F_{3,\varepsilon'}(\sigma_0 + it)| \leqslant M, \tag{γ}$$

где $M \geqslant 1$ будет выбрано позднее. Лемма 1 стандартна и мы ее не приводим (см., например, [11]). Сформулируем остальные семь лемм применительно к функции $F_{3,\varepsilon'}(s)$. Ниже константы, зависят от констант A, c, σ_0, σ_1, ε, где $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$.

При рассмотрении рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{3,k}(n)^j}{n^s} \quad (j=1,2)$$

подразумевается, что $a_{3,k}(1)=1$, $a_{3k}(n)=0$ $(2 \leqslant n \leqslant C_{\varepsilon'})$.

Лемма 2. *Пусть σ_1, $\sigma_0 < \sigma_1 < 1$, фиксировано и t_1 – вещественная переменная с $t_1 = T + Y/4 + \theta$, где $|\theta| \leqslant Y/80$. Наконец, пусть $\zeta_1 = \sigma_1 + it_1$. Тогда равномерно по t_1 имеем*

$$(F_{3,\varepsilon'}(s_1))^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{3,k}(n)}{n^{s_1}} e^{-n/Y} + O((MC_0)^k).$$

Доказательство стандартно.

Лемма 3. *Имеем*

$$800Y^{-1} \int\limits_{u}^{u+Y/800} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{3,k}(n) n^{-s_1} e^{-n/Y} \right|^2 dt$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{3,k}(n)^2 n^{-2\sigma_1} e^{-2n/Y} + O(W),$$

где

$$W = Y^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_{3,k}(n)^2 n^{1-2\sigma_1} e^{-2n/Y}.$$

Доказательство следует из теоремы о средних значениях полиномов Дирихле [12, с. 130].

Лемма 4. *Имеем*

$$(MC_1)^{2k} + W \gg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{3,k}(n)^2}{n^{2\sigma_1}} e^{-2n/Y}.$$

Доказательство использует стандартные факты и леммы 2, 3.

Каждая из следующих трех лемм выводится из предыдущей.

Лемма 5. *Для каждой константы ε, $0 < \varepsilon < 1$, имеем*

$$(MC_2)^{2k} \gg F_{3,\varepsilon',k}(2\sigma_1) - C_3 Y^{-\varepsilon} F_{3,\varepsilon',k}(2(\sigma_1 - \varepsilon)).$$

Лемма 6. *На основании аналога предположения* α *(т.е. утверждения* (3.2)) *имеем*

$$(MC_2)^{2k} \gg \exp\{k^{1/(\sigma_1+\varepsilon')}\} - C_3 Y^{-\varepsilon} \exp\{k^{1/(\sigma_1-\varepsilon-\varepsilon')}\}.$$

Лемма 7. *Предположим, что*

$$Y^{\varepsilon} \geqslant 2C_3 \exp\{k^{1/(\sigma_1-\varepsilon-\varepsilon')}\}$$

и что $k^{\varepsilon} > 2$. *Тогда*

$$MC_2 > (1/C_4)^{1/(2k)} \exp\{k^{1/(\sigma_1+\varepsilon')-1-\varepsilon)}\}.$$

Лемма 8. *Пусть* k *– наибольшее целое число такое, что*

$$Y^{\varepsilon} \geqslant 2C_3 \exp\left\{k^{1/(\sigma_1-\varepsilon-\varepsilon')}\right\}.$$

Тогда

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} \left|F_{3,\varepsilon'}(\sigma_0+it)\right| > C_2^{-1}\Big(\frac{1}{C_4}\Big)^{1/(2k)} \exp\left\{k^{1/(\sigma_1+\varepsilon')-1-\varepsilon}\right\}.$$

Утверждение леммы 8 справедливо, в противном случае лемма 7 противоречит допущению (γ).

Так как положительные константы ε, ε' произвольно малы и σ_1 может быть выбрано достаточно близким к ε_0, лемма 8 завершает доказательство эффекта Титчмарша в следующей форме: для $1/2 < \sigma_0 < 1$ справедливо неравенство

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} \left|F_{3,\varepsilon'}(\sigma_0+it)\right| > \exp\left\{(\log Y)^{1-\sigma_0-\varepsilon}\right\}, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon > 0$ – любая константа и $T \geqslant T_0(\sigma_0, A, c, \varepsilon)$.

По принципу максимума модуля, из (3.3) легко следует аналогичное утверждение для $1/2 \leqslant \sigma_0 < 1$.

Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть* σ_0, ε, c *фиксированы и такие, что* $1/2 \leqslant \sigma_0 < 1$, $\varepsilon > 0$, $c > 0$. *Пусть* $(\log T)^c \leqslant Y \leqslant T$. *Тогда для всех* $T \geqslant T_0$ $(\sigma_0, \varepsilon, c)$ *функция* $F_3(s) = \frac{1}{6}\zeta_3\big(s+\frac{1}{2}\big)$ *обладает эффектом Титчмарша*

$$\max_{T\leqslant t\leqslant T+Y} \left|F_3(\sigma_0+it)\right| > \exp\left\{(\log Y)^{1-\sigma_0-\varepsilon}\right\}.$$

Замечание 2. Результат теоремы 2 переносится на положительно определенные целочисленные тернарные квадратичные формы Q. Пусть

$D = \det Q$, $r_{GenQ}(n)$ – количество представлений (усредненное по Зигелю) натурального числа n родом формы Q,

$$L\big(s, \big(\frac{-Dn}{*}\big)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\frac{-Dn}{m}\big) m^{-s},$$

$Dn = r^2\omega$, где ω бесквадратно. Известен следующий результат [13]: пусть примитивно разрешимо сравнение

$$n \equiv Q(u_1, u_2, u_3) \pmod{8nD}.$$

Если $n \neq n_1^2 n_2$, где $n_2 | 2D$, то

$$r_Q(n) = c(n) n^{1/2} L\big(1, \big(\frac{-Dn}{*}\big)\big) + O\big(n^{\frac{1}{2}-\delta}\big), \tag{3.4}$$

где $\delta < \frac{1}{28}$ и $c(n) > c(D)$; $c(D) > 0$ – константа, зависящая лишь от D.

Главный член в (3.4) равен $r_{GenQ}(n)$; эта величина может быть вычислена. Для диагональных форм Q явное выражение нашел Г. А. Ломадзе [14]. Из (3.4) и оценки Зигеля

$$L\big(1, \big(\frac{-\omega}{*}\big)\big) \geqslant C_\varepsilon \omega^{-\varepsilon}$$

следует, что все достаточно большие числа n, $n \neq n_1^2 n_2$, представимые родом формы G, представляются самой формой Q.

Все это позволяет применить метод доказательства теоремы 2 к $\zeta_Q(s)$, Q – тернарная форма общего вида.

§4

Рассмотрим, наконец, дзета-функцию Эпштейна бинарной формы $\zeta_Q(s)$, где $Q(u_1, u_2) = au_1^2 + bu_1u_2 + cu_2^2$ – примитивная целочисленная положительно определенная бинарная квадратичная форма дискриминанта $\delta = b^2 - 4ac$, т.е. о.н.д.$(a, b, c) = 1$, $\delta < 0$.

$[Q]$ и $Gen(Q)$ – класс и род формы Q соответственно; $\Delta = -\delta/4$, если $2|b$; $\Delta = -\delta$, если $2 \nmid b$. $h(\delta)$ – число классов форм дискриминанта δ, $N(\Delta)$ – число родов форм дискриминанта δ.

Метод доказательства эффекта Титчмарша в §2,3 опирался на формулы для $r_Q(n)$. В бинарном случае формулы для $r_Q(n)$, где Q произвольная форма, не известны. Перечислим то немногое, что можно трактовать. Общие результаты получаются лишь для совокупностей форм в двух случаях.

1) Пусть $\Psi(n;\delta)$ – количество представлений натурального n всеми классами примитивных положительно определенных бинарных форм дискриминанта δ. Тогда при $(n,\delta)=1$

$$\Psi(n;\delta) = w\sum_{d|n}\left(\frac{\delta}{d}\right); \tag{4.1}$$

w – число единиц формы, $w=2$ (при $\delta<-4$). Этот факт принадлежит Дирихле. Пользуясь (4.1), легко доказать, что дзета-функция

$$\zeta_\Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi(n;\delta)}{n^s}$$

(на основе леммы 1) обладает эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

2) Рассмотрим величину

$$\Psi_0(n;Gen(Q)) = \sum_{[Q]\in Gen(Q)} r_Q(n),$$

т.е. количество представлений n всеми классами $[Q]$ примитивных положительно определенных бинарных форм Q, входящими в род $Gen(Q)$. Известно, что

$$\Psi_0(n;Gen(Q)) = \frac{1}{2}\rho(n;Q)\frac{h(\delta)}{N(\Delta)}, \tag{4.2}$$

где $\rho(n;Q)$ – т.н. “сингулярный ряд”, он вычислен в [15]. К дзета-функции

$$\zeta_{\Psi_0}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_0(n;Gen(Q))}{n^s}$$

применим лемму 1; после некоторых вычислений убеждается, что $\zeta_{\Psi_0}(s)$ обладает эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

Формула (4.2) превращается в

$$r_Q(n) = \frac{1}{2}\rho(n;Q) \tag{4.3}$$

если род $Gen(Q)$ состоит только из одного класса; таких родов конечное число.

Соотношение (4.3) выполняется также для нескольких неоднoклассных родов (см. [15]). Для соответствующих форм наблюдается эффект Титчмарша.

Ряд авторов (ван дер Блей, Ломадзе, Вепхвадзе) получили формулы для $r_Q(n)$ для некоторых специальных форм Q, принадлежащих родам, содержащим два или три класса. В большинстве случаев эти формулы зависят от коэффициентов разложения некоторых произведений тета-функций. Приведем несколько примеров.

Пример 1 [15]. Бинарные формы дискриминанта –39 образуют два двухклассных рода

$$G_1 = \{Q_1 = u_1^2 + u_1u_2 + 10u_2^2, Q_2 = 3u_1^2 + 3u_1u_2 + 4u_2^2\},$$
$$G_2 = \{Q_3^{\pm} = 2u_1^2 \pm u_1u_2 + 5u_1^2\}.$$

Доказано: если $n = 2^\alpha 3^\beta 13^\gamma u$, $(u, 78) = 1$, то

$$r_{Q_1}(n) = \frac{\alpha+1}{4}\Big(1+(-1)^\alpha\big(\frac{u}{3}\big)\Big)\Big(1+(-1)^\alpha\big(\frac{u}{13}\big)\Big)\sum_{d|u}\big(\frac{d}{39}\big)+\nu(n),$$

где

$$\nu(n) = \sum_{\substack{40n=x^2+39y^2\\ 2\nmid x, 2\nmid y, x>0, y>0\\ x\equiv\pm y \pmod{10}}} (-1)^{\frac{x\mp y}{10}}\big(\frac{xy}{5}\big);$$

для $r_{Q_2}(n)$ справедлива аналогичная формула, но с дополнительным членом $-\nu(n)$;

$$r_{Q_3^\pm}(n) = \frac{\alpha+1}{4}\Big(1-(-1)^\alpha\big(\frac{u}{3}\big)\Big)\Big(1-(-1)^\alpha\big(\frac{u}{13}\big)\Big)\sum_{d|u}\big(\frac{d}{39}\big).$$

Случай $Q_3^\pm$ уже обсуждался выше (для этих форм дзета-функция Эпштейна обладает эффектом Титчмарша), что касается форм Q_1, Q_2, то приведенные выше формулы не дают возможности применить лемму 1. Эффектом Титчмарша обладает лишь дзета-функция $\zeta_{\Psi_0}(s)$, где

$$\Psi_0(n; G_1) = r_{Q_1}(n) + r_{Q_2}(n).$$

Пример 2 [16]. Рассмотрим форму $Q_4 = u_1^2 + 32u_2^2$ дискриминанта -128. Доказано

$r_{Q_4}(n) = \sum\limits_{d|n}\big(\frac{-2}{d}\big) + \frac{1}{2}v(n)$, если $\alpha = 0$, $u \equiv 1 \pmod 8$;

$r_{Q_4}(n) = 2\sum\limits_{d|n}\big(\frac{-2}{d}\big)$, если $\alpha = 2$, $u \equiv 1 \pmod 8$;

$r_{Q_4}(n) = 0$ в остальных случаях; здесь $n = 2^\alpha u$, u нечетное, и $v(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции $\theta_{80}(\tau; 0, 8)$

$\theta_{01}(\tau;0,16)$ по степеням $Q=\exp(2\pi i\tau)$, где

$$\theta_{gh}(\tau;c,N)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\equiv c\,(\mathrm{mod}\ N)}}^{\infty}(-1)^{h(m-c)/N}Q^{(m+g/2)^2/2N}.$$

Положим в условии (ii) леммы 1

$$S=\big\{p|p\equiv 1(\mathrm{mod}8)\big\},\quad q=4.$$

Тогда для функции $\zeta_{Q_4}(s)$ все требования Леммы 1 соблюдены, поэтому $\zeta_{Q_4}(s)$ обладает эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

Пример 3. В работе [17] вполне элементарными методами авторы получили точные офрмулы для $r_Q(n)$, где Q пробегает ряд бинарных форм Q; эти формулы могут быть использованы при применении леммы 1. Рассмотрим формы дискриминанта -44, образующие род:

$$Q_5=u_1^2+11u_2^2, Q_6^{\pm}=3u_1^2\pm 2u_1u_2+4u_2^2.$$

Доказано: пусть $n=2^\alpha 11^\beta u$, где $(u,22)=1$; если $\alpha=0$, то

$$r_{Q_5}(n)=-\sum_{x_1^2+x_1x_2+3x_2^2=n}(-1)^{x_1},$$

$$r_{Q_6^{\pm}}(n)=\sum_{d|u}\big(\frac{-11}{d}\big)+\frac{1}{2}\sum_{x_1^2+x_1x_2+3x_2^2=n}^{2}(-1)^{x_1};$$

если $\alpha\geqslant 1$, то

$$r_{Q_5}(n)=r_{Q_6^{\pm}}(n)=\frac{1}{2}\Big(1+(-1)^\alpha\Big)\Big(1+\big(\frac{u}{11}\big)\Big)\sum_{d|u}\big(\frac{d}{11}\big).$$

Положим в условии (i) леммы 1

$$S=\big\{p|p\equiv 1(\mathrm{mod}11)\big\},\quad q=4.$$

Все требования леммы 1 соблюдены, поэтому дзета-функции Эпштейна $\zeta_{Q_5}(s)$, $\zeta_{Q_6^{\pm}}(s)$ обладают эффектом Титчмарша (2.1)–(2.3).

Тем самым, мы получили следующий результат.

Теорема 3. *Дзета-функции $\zeta_\Psi(s)$ и $\zeta_{\Psi_0}(s)$ обладают эффектом Титчмарша* (2.1)–(2.3). *Этим же эффектом обладают дзета-функции Эпштейна $\zeta_Q(s)$ некоторых бинарных форм, перечисленных выше.*

Литература

1. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **106** (1996), No. 3, 217–226.
2. W. Müller, *The mean square of automorphic forms.* — Monatsh. Math. **113** (1992), 121–159.
3. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна.* II. Зап. научн. семин. ПОМИ **371** (2009), 157–170.
4. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
5. K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for* $\zeta(s)$. — J. London Math. Soc.(2) **8** (1974), 683–690.
6. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for* ($\zeta(s)$. III. — Proc. Indian Acad. Sci. **86A** (1977), 341–351.
7. А. З. Вальфиш, *Целые точки в многомерных шарах*, Тбилиси, 1959.
8. H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. — Acta Math. **49** (1926), 407–464.
9. G. Pall, A. E. Ross, *The extension of a problem of Kloosterman.* — Amer. J. Math. **68** (1946), 59–65.
10. А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами.* — Труды мат. ин-та им.В. А. Стеклова **65** (1962), 1–212.
11. О. М. Фоменко, *Экстремальные значения автоморфных* L*-функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 233–247.
12. A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, New York, 1985.
13. W. Duke, R. Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids.* — Invent. Math. **99** (1990), No. 1, 49–57.
14. Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами.* I, II. — Acta Arithm. **19** (1971), No. 3, 267–305; No. 4, 387–407.
15. Т. В. Венхвадзе, *О представлении чисел положительными бинарными квадратичными формами нечетного дискриминанта.* — Труды Тбилис. мат. ин-та **45** (1974), 5–40.
16. Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел положительными бинарными диагональными квадратичными формами.* — Мат. сб. **68** (1965), No. 2, 282–312.
17. P. Kaplan, K. S. Williams, *On the number of representations of a positive integer by a binary quadratic forms.* — Acta Arithm. **114** (2004), No. 1, 87–98.

Fomenko O. M. Extreme values of Epstein zeta-functions.

Let $Q(u_1, u_2, \dots, u_l)$ be a positive definite quadratic form in $l(\geqslant 2)$ variables and with integer coefficients. Put

$$\zeta_Q(s) = \sum{}'(Q(u_1, u_2, \dots, u_l))^{-s}$$

where the accent indicates that the summation is over all integer l-tuples $(u_1, u_2, \ldots, u_l)$ with the exception of $(0, 0, \ldots, 0)$. It is known that $\zeta_Q(s)\big(s-\frac{l}{2}\big)$ is an entire function.

We treat Ω-theorems for $\zeta_Q(s)(l \geqslant 3)$ and for some $\zeta_Q(s)(l = 2)$. Let $l \geqslant 4$ and $F_Q(s) = \zeta_Q\big(s + \frac{l}{2} - 1\big)$. As t tends to infinity, we have

$$\log|F_Q\big(\frac{1}{2} + it\big)| = \Omega_+\bigg(\Big(\frac{\log t}{\log\log t}\Big)^{1/2}\bigg),$$

and

$$\log|F_Q\big(\sigma_0 + it\big)| = \Omega_+\bigg(\frac{(\log t)^{1-\sigma_0}}{\log\log t}\bigg)$$

for fixed $\sigma_0 \in \big(\frac{1}{2}, 1\big)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 9 марта 2016 г.