Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 445, 2016 г.

В. О. Кузнецов

О ВНУТРЕННЕМ РАДИУСЕ, ПОЛЯРИЗАЦИИ И КРУГОВОМ УСЕЧЕНИИ МНОЖЕСТВА

В предыдущей работе [4] было показано, что разность приведенного модуля односвязной области и ее кругового усечения не уменьшается при поляризации и круговой симметризации. В данной работе этот результат распространяется на случай произвольного открытого множества.

Пусть B – открытое множество, $r > 0$. Будем использовать следующие обозначения: $U_r = \{|z| < r\}$, $T_r = \{|z| = r\}$, $B_r = B \cap U_r$, $\mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $B^+ = B \cap \mathbb{C}^+$, $l(\varphi) = \{z : \operatorname{Im}(ze^{-i\varphi}) = 0\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $\widetilde{B}$ – множество, полученное в результате поляризации множества B, относительно прямой $l(\varphi)$, B' – связная компонента множества B, содержащая точку $z = 0$.

Под функцией Грина $G(z,\zeta)$ открытого множества $B \subset \mathbb{C}$ будем понимать функцию Грина связной компоненты этого множества, содержащей точку ζ. Функцию Грина $G(z,\zeta)$ множества B будем предполагать доопределеной нулем на $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$.

Если $g(z,\zeta) = -\log|z-\zeta| + A(z,\zeta)$ – функция Грина множества B, то величина

$$m(B,\zeta) = \frac{1}{2\pi} A(\zeta,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{z\to\zeta} \big(g(z,\zeta) - \log|z-\zeta|\big)$$

называется приведенным модулем множества B относительно точки $z = \zeta$ [1]. В частном случае, когда B – односвязная область гиперболического типа, содержащая точку ζ, получаем классическое определение приведенного модуля [1,2]

$$m(B,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log r(B,\zeta),$$

где $r(B,\zeta)$ – конформный радиус области B относительно точки $z = \zeta$. Если область B не является односвязной, то величину

$$r(B,\zeta) = \exp\big(2\pi\, m(B,\zeta)\big)$$

Ключевые слова: приведенный модуль, поляризация, симметризация, функция Грина.

называют внутренним радиусом области относительно точки $z = \zeta$ [2,3]. Приведенный модуль множества B относительно точки $z = 0$ будем обозначать через $m(B)$.

Теорема 1. *Пусть B – открытое множество, $0 \in B \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$*

$$m(\widetilde{B}) - m(\widetilde{B}_r) \geqslant m(B) - m(B_r). \tag{1}$$

Таким образом, при поляризации множества возрастает (не уменьшается) не только приведенный модуль этого множества, но и скорость его изменения при круговом усечении области. При доказательстве теоремы 1 будем использовать две леммы.

Лемма 1. *Если A, B – открытые множества и $0 \in A \subset B \subset U_R$, то при любом $r \in (0, R)$*

$$m(B) - m(B_r) \geqslant m(A) - m(A_r). \tag{2}$$

Если множества A и B связны, имеют классическую функцию Грина, и $B \cap T_r \neq \varnothing$, то равенство в этом неравенстве достигается только в случае $A = B$.

Доказательство. Так как множество $(A')_r$, вообще говоря, несвязно, то $(A_r)' \subset (A')_r$. Тем не менее, поскольку

$$\big((A')_r\big)' \subset (A_r)' = \big((A_r)'\big)' \subset \big((A')_r\big)',$$

то $\big((A')_r\big)' = (A_r)'$ и, значит,

$$m\big((A')_r\big) = m\big((A_r)'\big). \tag{3}$$

Поэтому неравенство (2) для множеств A и B равносильно неравенству

$$m(\mathcal{B}) - m\big((\mathcal{B}_r)'\big) \geqslant m(\mathcal{A}) - m\big((\mathcal{A}_r)'\big) \tag{4}$$

для областей $\mathcal{A} = A'$ и $\mathcal{B} = B'$. Для односвязных областей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ неравенство (4) вместе с утверждением о знаке равенства в этом неравенстве доказано в [4, Лемма 1]. Поскольку в этом доказательстве нигде не использовалась односвязность областей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то оно остается справедливым и в общем случае. □

Лемма 2. *Пусть K – объединение конечного числа замкнутых круговых прямоугольников, на которые разбивает $\overline{U_R}$ полярная сетка прямых $\{z\colon \mathrm{Im}\,(z^n) = 0\}$ и окружностей $T_{k\delta}$, $k = 1, \ldots, n$, $\delta = R/n$,* *и пусть* $0 \in B = U_R \setminus K$. *Тогда функция* $m(r) = m(B_r)$ *непрерывна и дифференцируема слева на* $(0, R]$ *и*

$$m'_-(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_r} \left(\frac{\partial g_r(z,0)}{\partial n} \right)^2 |dz|, \quad r \in (0, R], \tag{5}$$

где $\partial/\partial n$ *– производная по внутренней нормали к* T_r *от функции Грина* $g_r(z,0)$ *множества* B_r.

Для односвязной области аналогичная формула в терминах отображающей функции Римана была получена в [5].

Доказательство леммы 2. Положим $A_r(z,0) = g_r(z,0) - \log|z|$, $D = (B_r)'$. Тогда $m(D) = m(B_r)$. Пусть $0 < r' < r \leqslant R$, $z \in T_{r'}$. Поскольку $B_{r'} \subset B_r \subset U_r$, то $0 = g_{r'}(z,0) \leqslant g_r(z,0) \leqslant \log r - \log r'$.[1] Значит, $0 \leqslant g_r(z,0) - g_{r'}(z,0) \leqslant \log r - \log r'$. Поскольку $g_r(z,0) - g_{r'}(z,0) = A_r(z,0) - A_{r'}(z,0)$ – гармоническая в B_r функция, то по принципу максимума $0 \leqslant m(r) - m(r') = A_r(0,0) - A_{r'}(0,0) \leqslant \log r - \log r'$. Это доказывает непрерывность функции $m(r)$.

Пусть $\varepsilon = r - r' > 0$. По формуле Тейлора

$$g_r(r' e^{i\theta}, 0) = \frac{\partial g_r(re^{i\theta}, 0)}{\partial n} \varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{6}$$

Покажем, что оценка $O\left(\varepsilon^2\right)$ равномерна по θ. Пусть

$$I_k = \left(\pi(k-1)/n, \, \pi k/n\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

$m\delta < r' < r \leqslant (m+1)\delta$, $m \in \mathbb{Z}$; $P_k = \left\{ z = \rho e^{i\theta} : \theta \in I_k, \ m\delta < \rho < r \right\}$. Достаточно проверить равномерность оценки в (6) для каждого из промежутков I_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Если $P_k \cap D = \varnothing$, то утверждение очевидно.

Пусть $P_k \cap D \neq \varnothing$. Функцию $g_r(z,0)$ можно продолжить гармонически с P_k на соседние круговые прямоугольники P_{k-1} и P_{k+1}. Полученная при этом функция $h(z)$ будет гармонической в круговом прямоугольнике $Q = P_{k-1} \cup P_k \cup P_{k+1}$ и будет обращаться в нуль на его стороне, лежащей на T_r. Отметим, что $h(z) = g_r(z,0)$, если $z \in P_{k\pm 1} \cap D$. Функцию $h(z)$ продолжим гармонически в симметричный Q относительно окружности T_r круговой прямоугольник,

---

[1] $g_{r'}(z,0) = g_r(z,0)$, если $z \notin D$.

обозначим его Q_1. Полученная при этом продолжении функция, обозначим ее $h_1(z)$, будет гармонической в круговом прямоугольнике $Q_2 = Q_1 \cup Q$, включая точки $z = re^{\pi(k-1)/n}$ и $z = re^{\pi k/n}$, поскольку она ограничена в окрестности этих точек. В P_k значения функций $h_1(z)$ и $g_r(z,0)$ совпадают. Поэтому в P_k совпадают и значения всех производных этих функций. Кроме того,

$$\sup_{z\in Q_2} |h_1(z)| \leqslant \sup_{z\in Q_1} g_r(z,0) \leqslant \log r - \log(m\delta).$$

Из ограниченности гармонической в Q_2 функции $h_1(z)$ вытекает ограниченность всех производных этой функции *внутри* Q_2 и, значит, равномерность оценки в (3).

Функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_r} \frac{\partial g_r(\zeta,0)}{\partial n_\zeta} \frac{\partial g_r(\zeta,z)}{\partial n_\zeta} |d\zeta|$$

является решением задачи Дирихле в области $D_{r'}$ для граничных условий $f(z)\big|_{z\in(\partial D_{r'})\setminus T_{r'}} = 0$, $f(z)\big|_{z\in T_{r'}} = \partial g_r(\zeta,0)/\partial n_\zeta$. Поэтому $h(z) = g_r(\zeta,0) - g_{r'}(\zeta,0) - \varepsilon f(z)$ – гармоническая в области $D_{r'}$ функция. Из (6) вытекает, что $h(z)\big|_{z\in\partial D_{r'}} = O(\varepsilon^2)$ и, значит, эта оценка справедлива во всей области $D_{r'}$. В частности, $A_r(0,0) - A_{r'}(0,0) = \varepsilon f(0) + O(\varepsilon^2)$. Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим формулу (5). $\square$

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала утверждение теоремы в том случае, когда $B = U_R \setminus K$, где K – объединение замкнутых круговых прямоугольников полярной сетки в лемме 2. Можем считать, что $\varphi = 0$ и поляризация производится так, что $B^+ \subset \widetilde{B}^+$. Положим $B' = D$. Поскольку $\widetilde{D} \subset \widetilde{B}$, то используя лемму 1 и соотношение (3), получаем

$$m(\widetilde{B}) - m(\widetilde{B}_r) \geqslant m(\widetilde{D}) - m(\widetilde{D}_r), \tag{7}$$

$$m(B) - m(B_r) = m(D) - m\big((B_r)'\big) = m(D) - m(D_r). \tag{8}$$

Пусть $g(z,0)$ и $\widetilde{g}(z,0)$ – функции Грина областей $(D_r)'$ и $\big(\widetilde{D}_r\big)'$ соответственно. Поскольку эти области имеют регулярную границу, то к ним применима теорема 1 работы [6]. Повторяя рассуждения, примененные в [4] при доказательстве аналогичной теоремы, получим, что

$$\Big(\frac{\partial \widetilde{g}(z,0)}{\partial n}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \widetilde{g}(\bar z,0)}{\partial n}\Big)^2 \geqslant \Big(\frac{\partial g(z,0)}{\partial n}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g(\bar z,0)}{\partial n}\Big)^2 \tag{9}$$

при всех $z \in T_r^+$. Для функции $m(r) = m(\widetilde{D}_r) - m(D_r)$ из (5) и (9) тогда получаем

$$m'_-(r) = \int\limits_{T_r} \left[\Big(\frac{\partial \widetilde{g}(\bar{z},0)}{\partial n} \Big)^2 - \Big(\frac{\partial g(z,0)}{\partial n} \Big)^2 \right] |dz|$$

$$= \int\limits_{T_r^+} \left[\Big(\frac{\partial \widetilde{g}(z,0)}{\partial n} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial \widetilde{g}(\bar{z},0)}{\partial n} \Big)^2 - \Big(\frac{\partial g(z,0)}{\partial n} \Big)^2 - \Big(\frac{\partial g(\bar{z},0)}{\partial n} \Big)^2 \right] |dz| \geqslant 0$$

и, поскольку функция $m(r) = m(\widetilde{D}_r) - m(D_r)$ непрерывна на $(0, R]$, то

$$m(\widetilde{D}) - m\big(\widetilde{D}_r\big) \geqslant m(D) - m(D_r) \tag{10}$$

при всех $r \in (0, R]$. Из (7),(8) и (10) вытекает, что в рассматриваемом случае утверждение теоремы справедливо.

Пусть теперь B, $0 \in B$, – произвольное открытое множество в U_R. Положим $B^{(1)} = U_R \setminus K^{(1)}$, где $K^{(1)}$ – объединение замкнутых круговых прямоугольников полярной сетки в лемме 2, пересекающихся с $U_R \setminus B$. Уменьшив вдвое шаг полярной сетки, построим область $B^{(2)} = U_R \setminus K^{(2)}$, и т.д. В результате получим исчерпание множества B последовательностью открытых множеств

$$B^{(1)} \subset B^{(2)} \subset \cdots \subset B^{(n)} \subset \cdots$$

и исчерпание множества $\widetilde{B}$ последовательностью множеств

$$\widetilde{B^{(1)}} \subset \widetilde{B^{(2)}} \subset \cdots \subset \widetilde{B^{(n)}} \subset \cdots .$$

Приведенный модуль множества равен пределу приведенных модулей исчерпывающих его множеств (см, например, [1]). Поскольку для множеств $B^{(k)}$ утверждение теоремы справедливо, то оно справедливо и в общем случае. $\square$

Через $\operatorname{Sym} B$ будем обозначать результат круговой симметризации открытого множества B относительно вещественной положительной полуоси.

Теорема 2. *Пусть B – открытое множество, $0 \in B \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$*

$$m(\operatorname{Sym} B) - m\big((\operatorname{Sym} B)_r\big) \geqslant m(B) - m(B_r). \tag{11}$$

Доказательство. Если множество B удовлетворяет условиям леммы 2, то симметризовать множество B можно при помощи конечной последовательности поляризаций относительно надлежащим образом выбранных прямых $l(\varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$ (см, например, [1]). Поскольку при каждой поляризации разность (11) не уменьшается, то утверждение теоремы 2 для такого множества выполняется. Справедливость теоремы 2 в общем случае устанавливается, как и для теоремы 1, построением исчерпания множества B множествами, удовлетворяющими лемме 2. $\square$

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
2. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping.* Ergeb. Math. Grenz. (N.F.) Bd.**18**, Springer-Verlag (1958); 2nd ed. mcorrected, 1965. Пер. на рус. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения. М., 1962.
3. В. К. Хейман, *Многолистные функции.* Пер. с англ. М., ИЛ, 1960.
4. В. О. Кузнецов, *Поляризация и круговое усечение области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 162–169.
5. А. Ю. Солынин, *Минимизация конформного радиуса при круговом сужении области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 145–164.
6. А. Ю. Солынин, *Поляризация и функциональные неравенства.* — Алгебра и анализ **8**, No. 6 (1996), 148–185.

Kuznetsov V. O. Inner radius, polarization and circular truncation of the set.

The difference of the reduced module $m(B, 0)$ of an open set B, $0 \in B$, and the reduced module $m(B_r, 0)$ of its circular truncation B_r, where $B_r = B \cap \{|z| < r\}$, is considered. It is proved that in the case of polarization and circular symmetrization this difference does not decrease.

Государственный университет
морского и речного флота
им. адмирала С. О. Макарова
E-mail: kvo_kuz@mail.ru

Поступило 12 марта 2016 г.