

В. Г. Журавлев

МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Определение множеств ограниченного остатка. Рассмотрим категорию $(\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{X})$ из преобразований $\mathcal{S} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ пространств \mathcal{T} с выделенными на них подмножествами $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$. Обозначим через $r_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ функцию распределения точек \mathcal{S} -орбиты $x_0, x_1 = \mathcal{S}(x_0), \dots, x_{i-1} = \mathcal{S}^{i-1}(x_0)$, попавших в множество \mathcal{X} . Определим $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ как отклонение

$$r_{\mathcal{X}}(i, x_0) = a_{\mathcal{X}}i + \delta_{\mathcal{X}}(i, x_0) \quad (0.1)$$

от среднего значения $a_{\mathcal{X}}i$ числа попаданий точек орбиты в \mathcal{X} . В общем случае равномерного распределения точек орбит по пространству \mathcal{T} для отклонений $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ из (0.1) будет выполняться оценка $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0) = o(i)$. Относительно величины функции отклонения $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ все множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$ распределяются в некотором порядке, в начале которого будут расположены множества \mathcal{X} с минимальными отклонениями $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0) = O(1)$. Такие \mathcal{X} называются *множествами ограниченного остатка* или кратко – *BR-множествами*. Первыми открыли BR-множества Э. Гекке [1] на окружности относительно поворотов и Р. Сюз [2] на двумерном торе относительно сдвигов.

Используемый нами при определении множеств ограниченного остатка \mathcal{X} принцип оптимальности и в данном случае приводит к интересным результатам. В настоящем обзоре предлагается рассмотреть комбинации следующих троек $(\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{X})$:

- 1) \mathcal{T} – окружность [3], тор [4, 5] или бутылка Клейна [6];
- 2) \mathcal{S} – поворот окружности [3, 7, 8], сдвиг [4, 5, 9] или перекладывание тора [10];
- 3) \mathcal{X} – фиксированное множество или последовательность множеств, зависящих от шага итерации $i = 0, 1, 2, \dots$

0.2. Разбиения Розы. Пусть T – некоторое подмножество из D -мерного тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$, на котором задан сдвиг $S : x \mapsto x +$

Ключевые слова: перекладывания тора, индуцированные разбиения, множества ограниченного остатка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант \mathcal{N} 14-01-00360.

$\alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Будем предполагать T множеством ограниченного остатка и, следовательно, для его функции распределения $r_T(i, x_0)$ выполняется равенство

$$r_T(i, x_0) = a_T i + \delta_T(i, x_0) \quad (0.2)$$

с отклонением

$$|\delta_T(i, x_0)| \leq c_{T, x_0}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь a_T, c_{T, x_0} – некоторые константы и a_T равна объему множества T в случае равномерного распределения на торе \mathbb{T}^D точек орбиты $\text{Orb}(x_0)$.

Разбиения Розы $\mathcal{T}^{(m)}$ уровней $m = 0, 1, 2, \dots$ – это разбиения двумерного тора \mathbb{T}^2 , строящиеся рекуррентно [11] на основе фрактала Розы \mathcal{R} [12] – связного подмножества из \mathbb{R}^2 , имеющего фрактальную границу $\partial\mathcal{R}$ и являющегося разверткой тора \mathbb{T}^2 . Разбиение нулевого уровня $T^{(0)} = T_0^{(0)} \sqcup T_1^{(0)} \sqcup T_2^{(0)}$ является разверткой тора \mathbb{T}^2 , допускающей переключивание

$$T^{(0)} \xrightarrow{S} T^{(0)} : S(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (0.3)$$

на линейно независимые векторы v_k , где $\text{col}(x) = k$ обозначает цвет точки $x \in T_k^{(0)}$ для $k = 0, 1, 2$. В случае произвольного уровня m разбиение

$$T^{(m)} = B^m T^{(0)} = T_0^{(m)} \sqcup T_1^{(m)} \sqcup T_2^{(m)}$$

получается аффинным отображением с матрицей $B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & \zeta^2 \end{pmatrix}$, где $\zeta = \theta^{-1}$ для кубического числа Пизо θ , являющегося вещественным корнем уравнения $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Тогда разбиения Розы $\mathcal{T}^{(m)}$ получаются, как разбиения

$$\mathcal{T}^{(m)} = \mathcal{T}_0^{(m)} \sqcup \mathcal{T}_1^{(m)} \sqcup \mathcal{T}_2^{(m)} \quad (0.4)$$

всего тора \mathbb{T}^2 , составленные из орбитных разбиений

$$\mathcal{T}_k^{(m)} = T_k^{(m)} \sqcup S^1(T_k^{(m)}) \sqcup \dots \sqcup S^{n_k-1}(T_k^{(m)})$$

соответственно длин $n_0 = t_m, n_1 = t_{m-1} + t_{m-2}, n_2 = t_{m-1}$, где t_m – числа Трибоначчи.

Разбиение $T^{(m)}$ и сдвиг тора S связаны следующим образом. Если обозначить через

$$S^{(m)} = S|_{T^{(m)}} \quad (0.5)$$

ограничение отображения S на множество $T^{(m)} \subset \mathbb{T}^2$, то индуцированное отображение $S^{(m)}$ снова будет перекладыванием

$$T^{(m)} \xrightarrow{S^{(m)}} T^{(m)} : S^{(m)}(x) = x + v_{\text{col}(x)}^{(m)}, \quad (0.6)$$

при этом составляющие разбиение $T^{(m)}$ подмножества $T_k^{(m)}$, $k = 0, 1, 2$, будут множествами ограниченного остатка относительно сдвига S [11]. Поскольку они обладают свойством (0.6) для индуцированного отображения (0.5), то $T^{(m)}$ и $T_k^{(m)}$ называются индуцированными множествами ограниченного остатка.

0.3. Множества нулевого уровня. В случае произвольной размерности D разбиения нулевого уровня

$$T^{(0)} = T_0^{(0)} \sqcup T_1^{(0)} \sqcup \dots \sqcup T_D^{(0)} \quad (0.7)$$

содержат $D+1$ множество, являются разверткой тора $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D/L$ для некоторой решетки L и при этом $T^{(0)}$ допускает перекладывание вида (0.3). К настоящему времени разбиения $T^{(0)}$ хорошо исследованы: многомерный случай в [4, 5, 9], двумерный – в [13, 14]. Для построения разбиений $T^{(0)}$ используется метод вытягивания D -мерного единичного куба [5], в результате которого получают параллелоэдры – свойство, обеспечивающее $T^{(0)}$ быть разверткой тора \mathbb{T}_L^D .

В унифицированном виде результат об отклонениях формулируется в виде теоремы 3.2: если $\delta_{T_k^{(0)}}(i, x_0)$ – отклонение для области $T_k^{(0)} \subset T^{(0)}$ из разбиения (0.3) и x_0 – любая фиксированная начальная точка из развертки $T^{(0)}$, то $T_k^{(0)}$ являются множествами ограниченного остатка и для их отклонений имеет место оценка

$$|\delta_{T_k^{(0)}}(i, x_0)| \leq d_1(T)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где $d_1(T)$ – диаметр развертки тора $T^{(0)}$ относительно базиса \mathbf{I} решетки L .

0.4. Индуцированные разбиения тора. Пусть $T \subset \mathbb{R}^D$ – перекладывающаяся развертка $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ тора $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D/L$, являющаяся подмножеством тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$, на котором задан сдвиг S . Формализация свойств, которыми обладают разбиения Розы (0.4), приводит к понятию *вложения* $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D$ развертки T в тор \mathbb{T}^D относительно сдвига S (см. п. 1). Метод из [15] и [16] позволяет строить

вкладываемые в тор \mathbb{T}^D развертки T соответственно размерности $D = 2$ и произвольной размерности D .

Если развертка T вкладывается в тор, то она порождает орбитное разбиение тора \mathbb{T}^D , аналогичное разбиению Розы (0.4), и все ее составляющие $T_k \subset T$ будут множествами ограниченного остатка относительно сдвига S тора \mathbb{T}^D с отклонениями $\delta_{T_k}(i, x_0)$, удовлетворяющими неравенству (теорема 4.1):

$$|\delta_{T_k}(i, x_0)| \leq (1 + \nu(T))(2 + d_1(T)) - 1. \quad (0.8)$$

Здесь $\nu(T)$ – объемный коэффициент, указывающий на верхнюю границу разброса отношений объемов $\text{vol}(T_k)/\text{vol}(T_{k'})$ областей $T_k, T_{k'}$ из разбиения развертки T .

Естественно, разбиения Розы $T^{(m)} = T_0^{(m)} \sqcup T_1^{(m)} \sqcup T_2^{(m)}$ всех уровней m вкладываются $T^{(m)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$ в тор \mathbb{T}^2 . Из неравенства (0.8) для них вытекает оценка (теорема 5.1)

$$|\delta_{T_k^{(m)}}(i, x_0)| < 15$$

для $k = 0, 1, 2$ и всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Ранее [11] в частном случае было доказано неравенство

$$|\delta_{T_k^{(m)}}(i, 0)| < 2, \quad (0.9)$$

когда в качестве начальной точки выбиралось $x_0 = 0$. Доказательство неравенства (0.9) основывалось на использовании системы счисления Трибоначчи – кубического аналога чисел Фибоначчи.

В связи с неравенством (0.8) интересно заметить, что Розы [12] и Ференци [17] связывали свойство $T \subset \mathbb{T}^D$ быть множеством ограниченного остатка со свойством соответствующего индуцированного отображения $S|T$ быть эквивалентным сдвигу тора. Согласно (0.6) разбиения Розы $T^{(m)} \subset \mathbb{T}^2$ указанным свойством обладают, поскольку известно, что перекладывания тора вида (0.6) эквивалентны его сдвигу на подходящий вектор. Вкладываемые $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D$ в тор \mathbb{T}^D развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ также удовлетворяют данному свойству.

0.5. Сравнение с теоремой Гекке. В одномерном случае если в качестве множества $T \subset \mathbb{T}^1$ выбрать отрезок длины $a_T = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ и рассмотреть вращение $S(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$ окружности

\mathbb{T}^1 на иррациональный угол α , то Гекке доказал [1], что для отклонений $\delta_T(i, x_0) = r_T(i, x_0) - a_T i$ выполняется неравенство

$$|\delta_T(i, x_0)| \leq h. \quad (0.10)$$

Неравенство (0.8) является многомерным обобщением теоремы Гекке (0.10) для индуцированных множеств $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$. Ранее аналогичное неравенство было доказано в [4] для множеств $T = T^{(0)}$ нулевого уровня (0.7).

0.6. Многогранники ограниченного остатка. Пусть на D -мерном торе $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ задано некоторое отображение $\mathbb{T}^D \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathbb{T}^D$, и пусть

$$\text{Orb}(\mathbf{x}_0, \mathbb{S}) = \{ \mathbf{x}_i = \mathbb{S}^i(\mathbf{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \dots \} \quad (0.11)$$

– орбита некоторой начальной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^D$ относительно отображения \mathbb{S} . Функцию отклонения снова определим равенством

$$\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0) = \mathbf{r}_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0) - ia(\mathbb{X}), \quad (0.12)$$

где константа $a(\mathbb{X}) \geq 0$ зависит только от множества \mathbb{X} , и будем считать \mathbb{X} множеством ограниченного остатка, т.е. для отклонения (0.12) выполняется неравенство

$$|\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0)| \leq c(\mathbb{X}, \mathbf{x}_0) \quad (0.13)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

В [4, 5, 9] для сдвигов S тора \mathbb{T}^D были построены многогранники ограниченного остатка (BR -многогранники) – это параллелепедры, которые могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми многогранниками.

В [5] было введено скрещенное произведение (\otimes_i -произведение) – некоммутативная и неассоциативная операция, зависящая от целого индекса i . С помощью данного произведения из двух BR -многогранников $\mathbb{X}^{D_1} \subset \mathbb{T}^{D_1}$ и $\mathbb{X}^{D_2} \subset \mathbb{T}^{D_2}$ можно строить новые многогранники $\mathbb{X}^D = \mathbb{X}^{D_1} \otimes_i \mathbb{X}^{D_2}$ на торе \mathbb{T}^D размерности $D = D_1 + D_2$, также являющиеся BR -множествами. При этом константа $c(\mathbb{X}^D, \mathbf{x}_0)$ из неравенства (0.13) для произведения \mathbb{X}^D явно вычисляется через соответствующие константы исходных множеств \mathbb{X}^{D_1} и \mathbb{X}^{D_2} . Применяя несколько раз операцию \otimes_i -произведения, будем получать все более сложные композиционные BR -многогранники

$$\mathbb{X}^D = \mathcal{P}^{D_1} \otimes_{i_1} \mathcal{P}^{D_2} \otimes_{i_2} \dots \otimes_{i_{k-1}} \mathcal{P}^{D_k} \quad (0.14)$$

из элементарных BR -многогранников \mathcal{P}^{D_j} , которые в свою очередь уже не разлагаются в произведение вида (0.14). В малых размерностях $D = 1, 2, 3, 4$ примерами таких элементарных многогранников \mathcal{P}^D являются: отрезки Гекке [1], параллелограммы Сюза [2] и гексагоны с попарно параллельными сторонами [5], ромбо-додекаэдр Федорова [18], параллелоэдры Вороного [19] и др.

0.7. Деформации BR -множеств. В [4, 5] было замечено, что грани многогранников \mathcal{P}^D , транверсальные сдвигу S тора \mathbb{T}^D , можно подвергать малым непрерывным деформациям так, что в результате будут снова получаться BR -множества $\mathbb{X}^D = \partial\mathcal{P}^D$. Такой же подход можно применить и к фрактальным разбиениям Розы [11, 12]. Указанный метод деформации BR -многогранников можно распространить и на более широкие классы BR -множеств и отображений S тора \mathbb{T}^D , включающих в себя сдвиги тора как частный случай.

Рассматривается следующий простейший случай. Пусть S – поворот единичной окружности C на угол $0 < \alpha < 1$ и S' – семейство отображений S'_x другой единичной окружности C' , параметризуемое точками x окружности C . Определим на торе $\mathbb{T}^2 = C \times C'$ косое произведение $S \times S'$ отображения S и семейства отображений S' , полагая

$$S \times S' (x, x') = (S(x), S'_x(x')). \quad (0.15)$$

Пусть $C = C_0 \sqcup C_1$ – разбиение окружности C на две части $C_0 = [0, \omega)$ и $C_1 = [\omega, 1)$ с сечением $\omega = 1 - \alpha$. По теореме Гекке [1] C_0 и C_1 являются BR -множествами относительно поворота окружности S . Зададим разбиение $\mathbb{T}_r^2 = \mathcal{T}_0^2 \sqcup \mathcal{T}_1^2$ тора \mathbb{T}^2 на два кольца $\mathcal{T}_0^2 = C_0 \times C'$ и $\mathcal{T}_1^2 = C_1 \times C'$. Очевидно, что каждое из этих колец $\mathbb{X} = \mathcal{T}_k^2$, $k = 0, 1$, будет BR -множеством на торе \mathbb{T}^2 относительно отображения косого произведения $S \times S'$.

Деформации будут подвергаться множества $\mathbb{X} = \mathcal{T}_k^2$. Для этого вводится некоторое кольцо $\mathbb{W} = W \times C'$, где W – произвольный полуинтервал, содержащий точку ω . Затем это кольцо разбивается $\mathbb{W} = \mathbb{W}_0 \sqcup \mathbb{W}_1$ на два произвольных множества \mathbb{W}_0 и \mathbb{W}_1 . Указанное разбиение \mathbb{W} выступает в качестве возмущения прямого разбиения тора $\mathbb{T}_r^2 = \mathcal{T}_0^2 \sqcup \mathcal{T}_1^2$ путем добавления к \mathcal{T}_k^2 точек из \mathbb{W}_k . В п. 5 методом торических разверток [5] строится некоторое новое возмущенное разбиение тора

$$\partial : \quad \mathbb{T}_r^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 = \partial\mathbb{T}_r^2$$

где $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2$ разбито на новые деформированные множества \mathbb{T}_k^2 , уже не являющиеся кольцами, как исходные \mathbb{T}_k^2 из разбиения \mathbb{T}_r^2 . Оказывается, что для малых возмущений

$$|\mathbb{W}| < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}. \quad (0.16)$$

где $|\mathbb{W}|$ – ширина кольца \mathbb{W} , так построенные $\mathbb{X} = \mathbb{T}_k^2$, $k = 0, 1$, снова будут BR -множествами относительно исходного отображения косоугольного произведения $S \times S'$ из (0.15).

В предложении 12.1 доказано следующее утверждение: *если $\mathbb{X} = \mathbb{T}_k^2$, где $k = 0, 1$, и выполнено условие (0.16), то для произвольной начальной точки \mathbf{x}_0 на торе \mathbb{T}^2 функция отклонения $\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0)$, определенная в (0.12), будет удовлетворять неравенству*

$$|\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0)| \leq 1 + |\mathbb{W}| \quad (0.17)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку границы изменения в неравенстве (0.17) для функций отклонения $\delta_{\mathbb{X}}(i, \mathbf{x}_0)$ напрямую зависят от ширины кольца \mathbb{W} , то отсюда видна роль возмущения \mathbb{W} . В п. 8 подробно рассмотрены несколько типичных случаев отображений косоугольного произведения (0.15): двойные сдвиги тора (биективные и стягивающие) и непрерывный косоугольный сдвиг тора \mathbb{T}^2 .

Методом торических разверток можно также проводить деформации

$$\partial : \mathbb{X}^D \longrightarrow \mathbb{X}_\partial^D = \partial \mathbb{X}^D$$

для BR -множеств \mathbb{X}^D на торах $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}^{D_1} \times \mathbb{T}^{D_2}$ произвольных размерностей $D = D_1 + D_2$ относительно отображений косоугольного произведения $S^{D_1} \times S'^{D_2}$ на \mathbb{T}^D . Более трудная задача – выйти за пределы малых возмущений (0.16). В этом направлении сделаны пока еще первые шаги.

0.8. Неавтономные множества ограниченного остатка. Пусть X – некоторое подмножество единичной окружности $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, на которой задан

$$S_\alpha : C \longrightarrow C$$

поворот $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$ на угол α . Для орбиты

$$\text{Orb}(x_0, S_\alpha) = \{x_i = S_\alpha^i(x_0) \equiv x_0 + i\alpha \pmod{1}; \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$$

произвольной начальной точки $x_0 \in C$ относительно преобразования поворота S_α и подмножества $X \subset C$ рассмотрим функцию распределения

$$r(i; x_0, X) = \#\{x_j \in X; \quad j = 0, 1, \dots, i-1\}, \quad (0.18)$$

а также определим отклонение

$$\delta(i; x_0, X) = r(i; x_0, X) - ia_X, \quad (0.19)$$

удовлетворяющее в случае множества ограниченного остатка X неравенству

$$|\delta(i; x_0, X)| \leq c_{x_0, X} \quad (0.20)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь константа $c_{x_0, X}$ возможно зависит только от выбора начальной точки $x_0 \in C$ и подмножества $X \subset C$. В случае равномерного распределения орбиты $\text{Orb}(x_0, S_\alpha)$ по окружности C в качестве коэффициента a_X в правой части формулы (0.19) выбирают меру $\mu(X)$ множества X . Так если X — дуга окружности C , то $a_X = \mu(X)$ — ее длина.

Исходя из абстрактных соображений, можно в определении (0.18) функции распределения $r(i; x_0, X)$ не ограничиваться фиксированным множеством X , а допустить его зависимость от времени — номера итерации $j = 0, 1, 2, \dots$, т.е. вместо X рассмотреть некоторую последовательность

$$\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, \dots\} \quad (0.21)$$

множеств $X_j \subset C$. После этого модифицированная функция распределения примет вид

$$r(i; x_0, \mathcal{X}) = \#\{x_j \in X_j; \quad j = 0, 1, \dots, i-1\}. \quad (0.22)$$

Что же касается отклонения (0.19), то в его определении

$$\delta(i; x_0, \mathcal{X}) = r(i; x_0, \mathcal{X}) - ia_{\mathcal{X}} \quad (0.23)$$

прежний коэффициент a_X нужно заменить подходящей средней мерой $a_{\mathcal{X}} = \mu(\mathcal{X})$ множеств X_j из последовательности \mathcal{X} .

Теперь \mathcal{X} будем называть *множествами ограниченного остатка*, если для отклонения (0.23) выполняется неравенство

$$|\delta(i; x_0, \mathcal{X})| \leq c_{x_0, \mathcal{X}} \quad (0.24)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константа $c_{x_0, \mathcal{X}}$ зависит от выбора начальной точки $x_0 \in C$ и последовательности множеств \mathcal{X} . Заметим, что неравенство (0.24) для последовательностей \mathcal{X} аналогично неравенству

(0.20) для множеств X . Поскольку в определении (0.22) функции распределения $r(i; x_0, \mathcal{X})$ множества X_j зависят от параметра j , то \mathcal{X} следует называть *неавтономными* множествами ограниченного остатка. Указанные множества \mathcal{X} являются обобщением ранее рассмотренных множеств X , которые получаются из \mathcal{X} в частном случае

$$X = X_0 = X_1 = X_2 = \dots$$

Первоначально неавтономные множества \mathcal{X} появились в [20]. В настоящей работе будут рассмотрены неавтономные множества ограниченного остатка – последовательности \mathcal{X} вида (0.21) с периодически (теорема 19.1) или квазипериодически (теорема 19.2) меняющимися множествами X_j при $j = 0, 1, 2, \dots$

Указанные последовательности \mathcal{X} можно преобразовать в другие последовательности (теорема 18.1)

$$\mathcal{X}' = \{X'_0, X'_1, X'_2, \dots\}, \quad (0.25)$$

получающиеся из \mathcal{X} задержкой времени $X'_j = X_{j'}$. Здесь новое локальное время $j' = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию

$$\Delta j' = (j+1)' - j' = 0 \text{ или } 1,$$

при этом состоящая из нулей и единиц последовательность $\Delta 0', \Delta 1', \Delta 2', \dots$ является квазипериодической. Например, она может быть последовательностью Штурма. Новые последовательности \mathcal{X}' вида (0.25) также удовлетворяют неравенству (0.24).

Материал статьи излагается в следующей последовательности.

- §1. Вложения разверток в тор.
- §2. Отклонения.
- §3. Границы локальных отклонений.
- §4. Границы отклонений на торе \mathbb{T}^D .
- §5. Индуцированные множества для разбиений Розы.
- §6. Косые произведения отображений.
- §7. Стабилизатор отображения \widehat{S} : случай биекций.
- §8. Стабилизатор отображения \widehat{S} : общий случай.
- §9. Торы и стабилизаторы.
- §10. Изоморфизмы.
- §11. Распределение точек на прямой.
- §12. Распределение точек на торе.
- §13. Приложение.
- §14. Отображения двухцветной полосы.

- §15. Стабилизатор.
- §16. Сечения стабилизатора и разбиения окружности.
- §17. Границы отклонений на стабилизаторе.
- §18. Функции отклонения на окружности и неавтономные множества ограниченного остатка.
- §19. Вырожденные множества ограниченного остатка.

§1. ВЛОЖЕНИЯ РАЗВЕРТОК В ТОР

1.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D] \quad (1.1)$$

– полная решетка в \mathbb{R}^D с базисом l_1, \dots, l_D , т.е. векторы l_1, \dots, l_D линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} , и пусть T – некоторое подмножество из \mathbb{R}^D . Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D/L$, если отображение

$$T \longrightarrow \mathbb{T}_L^D : x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (1.2)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (1.3)$$

на векторы v_0, v_1, \dots, v_D , связанные с базисом решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, D. \quad (1.4)$$

В формуле (1.3) $\text{col}(x) = k$ обозначает цвет точки $x \in T_k$ для $k = 0, 1, \dots, D$.

Заметим, что при переходе (1.4) от векторов перекладывания $\{v_k\}_{k=0}^D$ к базису $\{l_k\}_{k=1}^D$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно для него ввести дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (1.5)$$

В частности, из равенств (1.4) и (1.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$. Поэтому перекладывание (1.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L} \quad (1.6)$$

на вектор $\alpha' \pmod{L}$.

Замечание 1.1. В качестве элементарных перекладывающихся разверток T тора \mathbb{T}^D можно взять построенные в [9] перекладывающиеся многогранники \mathcal{P} , которые могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми. Указанные \mathcal{P} являются параллелоэдрами, т.е. трансляционными многогранниками, разбивающими все пространство \mathbb{R}^D с помощью одних только параллельных переносов. Для размерностей $D = 1$ и 2 это будут множества, содержащие соответственно отрезки и шестиугольники с попарно параллельными и равными сторонами, а для $D = 3, 4$ – параллелоэдры Вороного [19], среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова [18]. Более сложные перекладывающиеся развертки T размерности $D = D' + D''$ можно получать [5] с помощью операции \otimes_k -произведения $T = T' \otimes_k T''$ из некоторых исходных перекладывающихся разверток T' и T'' соответственно размерностей D' и D'' . Например, за базисные можно взять отмеченные выше многогранники $T' = \mathcal{P}'$ и $T'' = \mathcal{P}''$ размерностей D' и D'' .

Кроме тора \mathbb{T}_L^D , нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$, где $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_D]$ – кубическая решетка в \mathbb{R}^D с ортонормированным базисом $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_D = (0, \dots, 1)$. Зададим сдвиг $S = S_{\alpha}$ тора \mathbb{T}^D на вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$, полагая

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S} \mathbb{T}^D : x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (1.7)$$

Далее тор \mathbb{T}^D будет использоваться, как вмещающее пространство для вложений различных торов \mathbb{T}_L^D с изменяющимися решетками L .

1.2. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 1.1. \triangleright Перекладывающаяся развертка T из (1.2) *вкладывается*

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D \quad (1.8)$$

в тор \mathbb{T}^D относительно сдвига $S = S_{\alpha}$, если выполняются следующие условия.

1. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$ является \mathbb{Z}^D -различимым, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}^D}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \longrightarrow T \bmod \mathbb{Z}^D : x \mapsto x \bmod \mathbb{Z}^D \quad (1.9)$$

– биекция; и поэтому используя отображение (1.9) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^D \quad (1.10)$$

в тор \mathbb{T}^D .

2. Векторы перекладывания (1.3) имеют вид

$$v_k \equiv n_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D} \quad (1.11)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$ с некоторыми коэффициентами $n_k = 1, 2, 3, \dots$

3. Пусть

$$\text{Orb}'(T_k) = \{S^j(T_k); j = 1, \dots, n_k - 1\} \quad (1.12)$$

обозначает орбиту подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (1.10) будем полагать $\text{Orb}'_k \subseteq \mathbb{T}^D$. Тогда по определению орбиты (1.12) удовлетворяют условию

$$\text{Orb}'(T_k) \cap T = \emptyset \quad (1.13)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. \triangleleft

Замечание 1.2. Вкладывающиеся в тор развертки $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D$ можно построить, используя метод [15] и [16] дифференцирования индуцированных разбиений тора \mathbb{T}^D соответственно размерности $D = 2$ и произвольной размерности D .

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (1.12) определить еще *полные* орбиты

$$\text{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k); j = 0, 1, \dots, n_k - 1\}. \quad (1.14)$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ из (1.7) *иррациональным*, когда

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_D \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (1.15)$$

Теорема 1.1. Пусть развертка T вкладывается (1.8) в тор \mathbb{T}^D , развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор сдвига α из (1.7) будет иррациональным. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Множества из полных орбит $\text{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е.

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset \quad (1.16)$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. Имеет место разбиение тора \mathbb{T}^D :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D, \quad (1.17)$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{n_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в орбиту $\text{Orb}(T_k)$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (1.16), при этом можем считать $j_1 \geq j_2$. Тогда из (1.16) следует

$$S^{j_1-j_2}(T_{k_1}) \cap S^0(T_{k_2}) = S^{j_1-j_2}(T_{k_1}) \cap T_{k_2} \neq \emptyset$$

и, значит,

$$S^j(T_{k_1}) \cap T \neq \emptyset, \quad (1.18)$$

где $j = j_1 - j_2$. По условию имеем $0 \leq j \leq j_1 \leq n_{k_1} - 1$. Отсюда, из определения 1.1 и условия (1.13) получаем $j = 0$, т.е. $j_1 = j_2$. Следовательно, из свойства (1.18) будет вытекать $T_{k_1} \cap T_{k_2} \neq \emptyset$, поэтому $k_1 = k_2$ и, тем самым, первое утверждение (1.16) доказано.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы 1.1, нам потребуется

Лемма 1.1. Множество \mathcal{T} , определенное в (1.17), замкнуто

$$S : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \quad (1.19)$$

относительно сдвига $S = S_\alpha$.

Доказательство леммы. Выберем любое множество $S^j(T_k)$ из орбиты $\text{Orb}(T_k)$ со степенью $0 \leq j < n_k - 1$. Тогда выполняется включение

$$S(S^j(T_k)) = S^{j+1}(T_k) \subset \text{Orb}(T_k), \quad (1.20)$$

так как $j \leq n_k - 1$.

Если же выбрать множество $S^{n_k-1}(T_k)$ из $\text{Orb}(T_k)$, то имеем

$$S(S^{n_k-1}(T_k)) = S^{n_k}(T_k) \equiv T_k + n_k \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D} \equiv T_k + v_k \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (1.21)$$

Поскольку по определению (1.3) можем записать $T_k + v_k \subset T$, то отсюда и (1.21) следует

$$S(S^{n_k-1}(T_k)) \subset T \pmod{\mathbb{Z}^D}. \quad (1.22)$$

Из включений (1.20) и (1.22) получаем замкнутость (1.19) разбиения \mathcal{T} . Лемма доказана. \square

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы 1.1. По условию множество T имеет внутреннюю точку $x^* \in T$. Это значит существует шар $B_\varepsilon(x^*) \subset T$ с центром в точке x^* радиуса $\varepsilon > 0$. По определению 1.1 множество $T \subset \mathbb{R}^D$ является \mathbb{Z}^D -различимым, значит, и его подмножество $B_\varepsilon(x^*)$ также будет \mathbb{Z}^D -различимо. Поэтому можем считать шар $B_\varepsilon(x^*)$ вложенным в тор \mathbb{T}^D .

Пусть x – произвольная точка на торе \mathbb{T}^D . По условию теоремы сдвиг тора $S = S_\alpha$ определен для иррационального вектора α . По теореме Вейля [25] орбита любой точки под действием сдвига S с иррациональным вектором (1.15) всюду плотна на торе \mathbb{T}^D . Поэтому найдется такое $j = 0, 1, 2, \dots$, для которого образ $S^{-j}(x)$ точки $x \in \mathbb{T}^D$ попадет в шар $B_\varepsilon(x^*)$.

Итак, мы имеем точку x_0 , удовлетворяющую условию $x_0 = S^{-j}(x) \in B_\varepsilon(x^*)$ и, следовательно, в силу включений $B_\varepsilon(x^*) \subset T \subset \mathcal{T}$ точка x_0 будет принадлежать

$$x_0 = S^{-j}(x) \in \mathcal{T} \quad (1.23)$$

разбиению (1.17). Но по лемме 1.1 разбиение \mathcal{T} замкнуто относительно сдвига S тора \mathbb{T}^D . Тогда ввиду включения (1.23) точка $S^j(x_0) = x$ также будет принадлежать разбиению \mathcal{T} . Поскольку точка x была произвольной, то тем самым второе утверждение теоремы 1.1 доказано. \square

Из теоремы 1.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \rightarrow T$ из (1.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^D \rightarrow \mathbb{T}^D$ из (1.7), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \quad (1.24)$$

§2. ОТКЛОНЕНИЯ

2.1. Индуцированные отображения и распределение точек на торе. Для любой точки x_0 на торе \mathbb{T}^D обозначим $\text{Orb}(x_0)$ ее бесконечную орбиту

$$x_0 = S^0(x_0), \quad x_1 = S^1(x_0), \dots, \quad x_i = S^i(x_0), \dots \quad (2.1)$$

и

$$f = f(x_0) = \min\{i = 0, 1, 2, \dots : x_i \in T\} \quad (2.2)$$

– динамическое расстояние относительно сдвига тора S от точки $x_0 \in \mathbb{T}^D$ до подмножества $T \subset \mathbb{T}^D$. Таким образом, по определению (2.2) точка

$$x'_0 = x_f \quad (2.3)$$

принадлежит развертке T и однозначно определяется начальной точкой $x_0 \in \mathbb{T}^D$.

Пусть x_0 – любая фиксированная точка на торе \mathbb{T}^D . Для произвольного индекса $i = 0, 1, 2, \dots$ зададим разложение

$$i = i_- + i_0 + i_+, \quad (2.4)$$

зависящее от точки x_0 . Слагаемые в разложении (2.4) определяются условиями:

$$i_- = \begin{cases} i, & \text{если } i < f, \\ f, & \text{если } i \geq f; \end{cases}$$

$$i_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } i < f, \\ \max\{0 \leq j \leq i - f : x_{f+j} \in T\}, & \text{если } i \geq f; \end{cases}$$

$$i_+ = i - i_- + i_0.$$

Если степень $i \geq f$, то он определяет *индуцированную степень* $i' = 0, 1, 2, \dots$ с помощью равенства

$$S'^{i'}(x'_0) = S^{i_0}(x'_0), \quad (2.5)$$

где S' – индуцированное отображение (1.6).

Пусть

$$r_T(i, x_0) = \#\{j; S^j(x_0) \in T, 0 \leq j < i\} \quad (2.6)$$

– *функция распределения*, равная количеству первых i точек из орбиты $\text{Orb}(x_0)$, попавших в область T . Тогда из определения (2.5) вытекает формула

$$i' = r_T(i, x_0) \quad (2.7)$$

для $i \geq f$. Заметим, что в случае $i < f$ мы уже не можем определить степень i' , используя равенство (2.5). С целью сохранения формулы (2.5) для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ доопределим степень i' и для начальных значений $i < f$, полагая

$$i' = 0 \quad \text{для } i < f. \quad (2.8)$$

Теперь, с учетом соглашения (2.8), формула (2.7) будет выполняться для всех степеней i .

С этого места будем предполагать развертку $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$, определенную в (1.2), *кубической*, все ее области T_k которой имеют объемы

$$\text{vol}(T_k) = \int_{T_k} dx > 0. \quad (2.9)$$

2.2. Случай: $i = i_0$. При этом условии имеем

$$x'_0 = x_0 \in T. \quad (2.10)$$

Пусть

$$i' = i'(i_0) \quad (2.11)$$

определено условиями (2.5) и (2.8). Для $k = 0, 1, \dots, D$ обозначим

$$r'_k(i', x'_0) = \#\{j'; x'_{j'} = S'^{j'}(x'_0) \in T_k, 0 \leq j' < i'\} \quad (2.12)$$

количество первых i' точек из орбиты $\text{Orb}'(x'_0)$, попавших в область $T_k \subset T$. Тогда из существования разбиения (1.17) тора вытекает тождество

$$r'_0(i', x'_0)n_0 + r'_1(i', x'_0)n_1 + \dots + r'_D(i', x'_0)n_D = i \quad (2.13)$$

при условии, что $i = i_0$. Запишем функции распределения (2.12) в виде

$$r'_k(i', x'_0) = a'_k i' + \delta'_k(i', x'_0) \quad (2.14)$$

с коэффициентом

$$a'_k = \text{vol}(T_k) / \text{vol}(T), \quad (2.15)$$

равным отношению объемов областей T_k и T . Здесь $\delta'_k(i', x'_0)$ обозначает *отклонение* $r'_k(i', x'_0)$ от среднего значения $a'_k i'$. Подставляя (2.14) в соотношение (2.13), получаем новое соотношение

$$a' i' + \delta'(i', x'_0) = i \quad (2.16)$$

с взвешенными коэффициентом

$$a' = n_0 a'_0 + n_1 a'_1 + \dots + n_D a'_D \quad (2.17)$$

и отклонением

$$\delta'(i', x'_0) = n_0 \delta'_0(i', x'_0) + n_1 \delta'_1(i', x'_0) + \dots + n_D \delta'_D(i', x'_0). \quad (2.18)$$

Из (2.16) находим аппроксимационную формулу

$$i' = \frac{i}{a'} - \frac{\delta'(i', x'_0)}{a'} \quad (2.19)$$

обратного для (2.5) перехода от степени i к индуцированной степени i' . Пусть

$$r_k(i, x'_0) = \#\{x_j = S^j(x'_0) \in T_k, \quad 0 \leq j < i\} \quad (2.20)$$

– количество первых i точек из орбиты $\text{Orb}(x'_0)$, попавших в область $T_k \subset T$.

Лемма 2.1. *В случае $i = i_0$ и, следовательно, с начальной точки $x_0 = x'_0$ из (2.10) функции распределения (2.12) и (2.20) связаны соотношением*

$$r_k(i, x_0) = r'_k(i', x'_0). \quad (2.21)$$

Доказательство вытекает из формулы (2.7). \square

Используя (2.14) и (2.19) находим для функции распределения (2.20) следующее представление

$$r_k(i_0, x'_0) = \frac{a'_k}{a'} i_0 + \Delta'_k(i', x'_0) \quad (2.22)$$

в виде главного $\frac{a'_k}{a'} i_0$ и дополнительного члена

$$\Delta'_k(i', x'_0) = \delta'_k(i', x'_0) - \frac{a'_k}{a'} \delta'(i', x'_0). \quad (2.23)$$

Вычислим коэффициент

$$a_k = a'_k / a' \quad (2.24)$$

в формуле (2.22). Согласно определению (2.15) и (2.17) взвешенный коэффициент a' равен

$$a' = \frac{n_0 \text{vol}(T_0) + n_1 \text{vol}(T_1) + \dots + n_D \text{vol}(T_D)}{\text{vol}(T)}.$$

В силу равенства (1.17) из теоремы 1.1 можем записать соотношение

$$n_0 \text{vol}(T_0) + n_1 \text{vol}(T_1) + \dots + n_D \text{vol}(T_D) = \text{vol}(\mathbb{T}^D) = 1, \quad (2.25)$$

поскольку тор \mathbb{T}^D получается факторизацией пространства \mathbb{R}^D по кубической решетке \mathbb{Z}^D , имеющей фундаментальную область единичного объема. Таким образом, из (2.25) находим для взвешенного коэффициента (2.17) явную формулу

$$a' = \frac{1}{\text{vol}(T)}. \quad (2.26)$$

Поэтому, используя (2.15) и (2.26), имеем

$$a_k = \frac{a'_k}{a'} = \frac{\text{vol}(T_k)}{\text{vol}(T)} / \frac{1}{\text{vol}(T)},$$

что приводит к требуемому выражению

$$a_k = \text{vol}(T_k) \quad (2.27)$$

для коэффициента в формуле (2.22). Поэтому формулу (2.22) можем переписать в виде

$$r_k(i_0, x'_0) = a_k i_0 + \Delta'_k(i', x'_0) \quad (2.28)$$

с коэффициентом (2.27).

С другой стороны, так как согласно (2.27) коэффициент a_k равен объему области T_k , то по этой причине равенство

$$r_k(i_0, x'_0) = a_k i_0 + \delta_k(i_0, x'_0) \quad (2.29)$$

определяет *отклонение* $\delta_k(i, x'_0)$ количества попаданий $r_k(i_0, x'_0)$ точек орбиты $\text{Orb}(x'_0)$ в область $T_k \subset T$ от среднего значения $a_k i_0$.

Лемма 2.2. Пусть $i = i_0$ и, значит, начальная точка $x'_0 = x_0$ в силу (2.10) принадлежит развертке T . Тогда отклонение $\delta_k(i_0, x'_0)$, определенное в (2.29), вычисляется по формуле

$$\delta_k(i_0, x'_0) = \Delta'_k(i', x'_0), \quad (2.30)$$

где справа стоит сумма (2.23) и $i' = i'(i_0)$ определено условиями (2.5) и (2.8).

Доказательство вытекает из равенств (2.28) и (2.29). \square

2.3. Общий случай: $i = i_- + i_0 + i_+$, где слагаемые i_* определены в (2.4) и $i_0 = 0$, если $i < f$.

Лемма 2.3. Пусть x_0 – произвольная начальная точка на торе \mathbb{T}^D , а x'_0 из (2.3) – первая точка орбиты $\text{Orb}(x_0)$, попавшая в T ; и пусть $r_k(i, x_0)$ – функция распределения (2.20). Тогда имеет место следующая формула аппроксимации

$$r_k(i, x_0) = r_k(i_0, x'_0) + \varepsilon_k(i, x_0), \quad (2.31)$$

где

$$\varepsilon_k(i, x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } i_+ = 0; \\ 1, & \text{если } i_+ > 0, \quad x_{i_-+i_0} \in T_k; \\ 0, & \text{если } i_+ > 0, \quad x_{i_-+i_0} \notin T_k. \end{cases} \quad (2.32)$$

Доказательство проводится прямым перебором всевозможных разложений для начального количества точек i в орбите $\text{Orb}(x_0)$. \square

Теорема 2.1. В случае произвольных i и x_0 отклонение (2.29) вычисляется по формуле

$$\delta_k(i, x_0) = \Delta'_k(i', x'_0) + \theta_k(i, x_0), \quad (2.33)$$

где

$$\theta_k(i, x_0) = \varepsilon_k(i, x_0) - a_k(i_- + i_+). \quad (2.34)$$

Доказательство. По определению (2.29) имеем

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - a_k i. \quad (2.35)$$

Подставим в правую часть значение функции распределения $r_k(i, x_0)$ из леммы 2.3 и разложение $i = i_- + i_0 + i_+$ в виде суммы (2.4). Тогда формулу (2.35) можно переписать в виде

$$\delta_k(i, x_0) = [r_k(i_0, x'_0) - a_k i_0] + [\varepsilon_k(i, x_0) - a_k(i_- + i_+)].$$

Согласно (2.29), первая разность справа равна отклонению $\delta_k(i_0, x'_0)$. После подстановки приходим к формуле

$$\delta_k(i, x_0) = \delta_k(i_0, x'_0) + [\varepsilon_k(i, x_0) - a_k(i_- + i_+)], \quad (2.36)$$

связывающую общее отклонение $\delta_k(i_0, x'_0)$ с частным ранее изученным в лемме 2.2 отклонением $\delta_k(i_0, x'_0)$. Теперь из (2.30) и (2.36) следуют формулы (2.33) и (2.34). \square

§3. ГРАНИЦЫ ЛОКАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

3.1. Точные границы локальных отклонений. В [4] были найдены границы изменения для локальных отклонений $\delta'_k(i', x'_0)$. Чтобы привести их, нам потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ – решетка, определенная в (1.1). Рассмотрим для нее двойственную решетку $L^* = \mathbb{Z}[l_1^*, \dots, l_D^*]$ с базисом, удовлетворяющим условию

$$l_k^* \cdot l_{k'} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k', \\ 0, & \text{если } k \neq k'. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$ обозначает скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_D)$ и $y = (y_1, \dots, y_D)$ из \mathbb{R}^D . По условию (1.1) решетка

L полная, поэтому двойственная решетка L^* существует. Кроме базисных векторов l_k решетки L , введем еще вспомогательный вектор

$$l_0 = -(l_1 + \dots + l_D) \quad (3.2)$$

и для него формально определим отвечающий ему вектор

$$l_0^* = -(l_1^* + \dots + l_D^*). \quad (3.3)$$

Отметим, что для расширенных систем векторов l_0, l_1, \dots, l_D и $l_0^*, l_1^*, \dots, l_D^*$ условие (3.1) уже не будет выполняться.

Обозначим

$$m_k = \inf_{x' \in T} l_k^* \cdot x', \quad M_k = \sup_{x' \in T} l_k^* \cdot x' \quad (3.4)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ граничные значения для развертки тора $T \subset \mathbb{R}^D$, определенной в (1.2). Важно заметить, что граничные значения (3.4) зависят от выбора базиса решетки L из (1.1).

В [4] был доказан следующий результат.

Теорема 3.1. *При любом выборе начальной точки x'_0 из развертки T локальные отклонения $\delta'_k(i', x'_0)$ с $k = 0, 1, \dots, D$ изменяются в границах*

$$m_k - l_k^* \cdot x'_0 \leq \delta'_k(i', x'_0) \leq M_k - l_k^* \cdot x'_0 \quad (3.5)$$

для всех $i' = 0, 1, 2, \dots$. Если вектор сдвига α' иррациональный (1.15), то границы в (3.5) точные, т.е. для любого k при сколь угодно малом сужении границ в (3.5) найдется такое i' , что значение отклонения $\delta'_k(i', x'_0)$ выйдет за измененные границы.

3.2. Грубые границы локальных отклонений. Пусть

$$x' = (x'_1, \dots, x'_D) \text{ из } \mathbb{R}^D$$

записан в ортонормированном базисе e_1, \dots, e_D . Используя двойственный базис (3.1) и дополнительный вектор (3.3), введем в пространстве \mathbb{R}^D новую метрику

$$\varrho_1(x') = \max_{0 \leq k \leq D} |l_k^* \cdot x'|. \quad (3.6)$$

Важно заметить, что так определенная метрика зависит от выбора базиса $\mathbf{l} = \{l_1, \dots, l_D\}$ решетки $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$. Геометрический смысл метрики $\varrho_1(x')$ следующий: нормированное тело

$$\mathbf{P} = \{x' \in \mathbb{R}^D; \varrho_1(x') \leq 1\}$$

представляет собою D -мерный параллелепипед, усеченный двумя параллельными гиперплоскостями $l_0^* \cdot x' = \pm 1$, т.е. \mathbf{P} является невырожденным выпуклым многогранником с $2D + 2$ гранями.

Введение метрики $\varrho_1(x')$ мотивировано тем, что на ее языке удобно будет заменить границы для отклонений $\delta'_k(i', x'_0)$ из теоремы 3.1 на более геометрические универсальные границы. С этой целью определим в метрике (3.6) *диаметр* развертки тора T , полагая

$$d_1(T) = \sup_{x', y' \in T} \varrho_1(x' - y'). \quad (3.7)$$

Из определения метрики $\varrho_1(x')$ следует, что диаметр (3.7) инвариантен

$$d_{A1}(AT) = d_1(T) \quad (3.8)$$

относительно невырожденных аффинных преобразований A пространства \mathbb{R}^D . Например, если A есть преобразование подобия $x \mapsto \lambda x$ с коэффициентом $\lambda \neq 0$, то диаметр развертки λT , полученной растяжением T , не изменится

$$d_{\lambda 1}(\lambda T) = d_1(T).$$

Поэтому $d_1(T)$ естественно называть *относительным диаметром*.

Воспользуемся инвариантностью (3.8) и заменим базис \mathbf{I} на единичный базис $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_D\}$. В этом базисе метрика (3.6) принимает особенно простой вид

$$\varrho_{\mathbf{e}}(x') = \max\{|x'_1|, \dots, |x'_D|, |x'_1 + \dots + x'_D|\}. \quad (3.9)$$

Для примера рассмотрим D -мерный куб \mathbf{C} , натянутый на векторы из базиса \mathbf{e} . Тогда его диаметр равен

$$d_{\mathbf{e}}(\mathbf{C}) = D$$

– размерности куба \mathbf{C} .

Теорема 3.2. *Для любой фиксированной начальной точки x'_0 из развертки T отклонения $\delta'_k(i', x'_0)$ с $k = 0, 1, \dots, D$ ограничены*

$$|\delta'_k(i', x'_0)| \leq d_1(T) \quad (3.10)$$

для всех $i' = 0, 1, 2, \dots$ *диаметром* (3.7) *развертки тора T .*

Доказательство. Из определения (3.4) граничных значений m_k и M_k следует, что при любом k выполняются неравенства

$$m_k \leq l_k^* \cdot x' \leq M_k$$

для всех $x' \in T$. Следовательно, в неравенствах (3.5) для отклонения $\delta'_k(i', x'_0)$ имеем $m_k - l_k^* \cdot x'_0 \leq 0$ и $M_k - l_k^* \cdot x'_0 \geq 0$. Отсюда получаем неравенства

$$|\delta'_k(i', x'_0)| \leq M_k - m_k,$$

что можно записать иначе

$$|\delta'_k(i', x'_0)| \leq \sup_{x', y' \in T} (l_k^* \cdot x' - l_k^* \cdot y') = \sup_{x', y' \in T} |l_k^* \cdot (x' - y')|. \quad (3.11)$$

По определению (3.6) метрики $\varrho_1(x')$ имеем соотношение

$$|l_k^* \cdot (x' - y')| \leq \varrho_1(x' - y')$$

и, значит, тем более будет выполняться неравенство

$$\sup_{x', y' \in T} |l_k^* \cdot (x' - y')| \leq \sup_{x', y' \in T} \varrho_1(x' - y')$$

с правой частью, равной в силу (3.7) диаметру $d_1(T)$ развертки тора T . Отсюда и (3.11) выводим неравенства (3.10). \square

§4. ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЙ НА ТОРЕ \mathbb{T}^D

4.1. Вспомогательные результаты. Сочетание теорем 2.1 и 3.2 позволяет получить оценку величины отклонений $\delta_k(i, x_0)$ распределения точек орбиты $\text{Orb}(x_0)$ на всем торе \mathbb{T}^D . В отличие от локальных отклонений $\delta'_k(i', x'_0)$, отклонения $\delta_k(i, x_0)$ будем называть *глобальными*.

Вначале оценим по отдельности оба слагаемых, входящих в разложение отклонения $\delta_k(i, x_0) = \Delta'_k(i', x'_0) + \theta_k(i, x_0)$.

Лемма 4.1. *Первое слагаемое $\Delta'_k(i', x'_0)$, входящее в глобальное отклонение $\delta_k(i, x_0)$ и определенное равенством (2.23), может быть оценено как*

$$|\Delta'_k(i', x'_0)| \leq \left(1 + \frac{\text{vol}(T_{\max})}{\text{vol}(T_{\min})}\right) d_1(T). \quad (4.1)$$

Здесь $d_1(T)$ – диаметр (3.7) развертки тора $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ из (1.2),

$$\text{vol}(T_{\min}) = \min_k \{\text{vol}(T_k)\}, \quad \text{vol}(T_{\max}) = \max_k \{\text{vol}(T_k)\}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Согласно (2.23) имеем

$$\Delta'_k(i', x'_0) = \delta'_k(i', x'_0) - \frac{a'_k}{a'} \delta'(i', x'_0),$$

где первое слагаемое ранее уже было оценено в теореме 3.2, и осталась оценить второе, в котором $a' = n_0 a'_0 + n_1 a'_1 + \dots + n_D a'_D$ и $\delta'(i', x'_0) = n_0 \delta'_0(i', x'_0) + n_1 \delta'_1(i', x'_0) + \dots + n_D \delta'_D(i', x'_0)$ – взвешенные коэффициенты (2.17) и отклонения (2.18) соответственно. Используя оценку (3.10), можем записать неравенство

$$|\delta'(i', x'_0)/\alpha'| \leq \frac{(n_0 + n_1 + \dots + n_D) d_1(T)}{(n_0 + n_1 + \dots + n_D) a'_{\min}} = \frac{d_1(T)}{a'_{\min}}$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{a'_k}{a'} \delta'(i', x'_0) \right| \leq \frac{a'_{\max}}{a'_{\min}} d_1(T),$$

если воспользоваться обозначениями

$$a'_{\min} = \min_k \{a'_k\}, \quad a'_{\max} = \max_k \{a'_k\}. \quad (4.3)$$

Так как в силу (2.15) $a'_k = \text{vol}(T_k)/\text{vol}(T)$, то из последнего неравенства и теоремы 3.2 вытекает оценка (4.1). \square

Лемма 4.2. Для второго слагаемого $\theta_k(i, x_0)$, входящего в глобальное отклонение $\delta_k(i, x_0)$ и определенного в (2.34), выполняется неравенство

$$|\theta_k(i, x_0)| \leq 1 + 2 \frac{\text{vol}(T_{\max})}{\text{vol}(T_{\min})}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Первое слагаемое $\varepsilon_k(i, x_0)$ из разложения

$$\theta_k(i, x_0) = \varepsilon_k(i, x_0) - a_k(i_- + i_+)$$

оценим как $|\varepsilon_k(i, x_0)| \leq 1$ ввиду (2.32).

Далее, из определения (2.4) следуют неравенства

$$i_-, i_+ \leq n_{\max}, \quad (4.5)$$

где обозначили $n_{\max} = \max_k \{n_k\}$ для коэффициентов n_k из (1.11). Следовательно, можем записать оценку

$$|a_k(i_- + i_+)| \leq 2a_k n_{\max}. \quad (4.6)$$

Из существования разбиения (1.17) следует соотношение (2.25) между коэффициентами n_k и объемами $\text{vol}(T_k)$, откуда заключаем, что для всех k выполняется неравенство

$$n_k \leq \frac{1}{\text{vol}(T_k)}. \quad (4.7)$$

Если воспользоваться обозначениями $\text{vol}(T_{\min})$, $\text{vol}(T_{\max})$ из (4.2), то применяя неравенство (4.7) последовательно получаем

$$a_k n_{\max} \leq a_k \frac{1}{\text{vol}(T_{\min})} \leq \frac{\text{vol}(T_{\max})}{\text{vol}(T_{\min})},$$

так как $a_k = \text{vol}(T_k)$. Отсюда, (4.6) и неравенства $|\varepsilon_k(i, x_0)| \leq 1$ выводим оценку (4.4). \square

4.2. Основная теорема о глобальных отклонениях. В формулировках леммы 4.1 и 4.2 участвует отношение $\text{vol}(T_{\max})/\text{vol}(T_{\min})$ объемов, определенных в (4.2). Введем для него отдельное обозначение

$$\nu(T) = \frac{\text{vol}(T_{\max})}{\text{vol}(T_{\min})} \quad (4.8)$$

и назовем $\nu(T)$ *объемным коэффициентом* перекладывающейся развертки тора T . Данный коэффициент указывает на верхнюю границу разброса отношений объемов $\text{vol}(T_k)/\text{vol}(T_{k'})$ областей T_k и $T_{k'}$ из разбиения развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$. Коэффициент $\nu(T)$ обладает свойством аффинной инвариантности

$$\nu(AT) = \nu(T) \quad (4.9)$$

для любого аффинного отображения $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$.

Из лемм 4.1 и 4.2 вытекает следующий основной результат.

Теорема 4.1. Пусть $\delta_k(i, x_0)$ – глобальные отклонения, определенные в (2.29), и x_0 – произвольная начальная точка на торе \mathbb{T}^D . Тогда имеет место оценка

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq (1 + \nu(T))(2 + d_1(T)) - 1 \quad (4.10)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ и всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $\nu(T)$ – объемный коэффициент (4.8) и $d_1(T)$ – относительный диаметр (3.7) развертки T .

\square

Из теоремы 4.1 следует, что все множества $T_k \subset \mathbb{T}^D$ из разбиения развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ являются множествами ограниченного остатка, для которых в формуле

$$r_k(i, x_0) = a_k i + \delta_k(i, x_0) \quad (4.11)$$

для функций распределения $r_k(i, x_0)$ точек орбит $\text{Orb}(x_0)$ по областям T_k отклонения $\delta_k(i, x_0)$ ограничены при $i = 0, 1, 2, \dots$

Предположим, что T – некоторое произвольное подмножество на торе \mathbb{T}^D . Ограничение $S_T = S|_T$ сдвига S тора \mathbb{T}^D на подмножество $T \subset \mathbb{T}^D$ задает на нем *индуцированное отображение*

$$S_T : T \longrightarrow T. \quad (4.12)$$

Теперь вернемся к случаю нашей развертки тора T . Формула (1.6) показывает, что

$$S_T = S'$$

и, значит, отображение S_T индуцирует перекладывание (1.3) областей T_k из T .

Итак, мы пришли к следующему утверждению.

Предложение 4.1. *Если перекладывающаяся развертка $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ вкладывается $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D$ в тор \mathbb{T}^D относительно сдвига S (см. определение (1.8)), то индуцированное отображение $S_T = S|_T$ из (4.12) перекладывает ее области $T_k \longrightarrow T_k + v_k$ на векторы из (1.3).*

Таким образом, из теоремы 4.1 и предложения 4.1 следует, что все T_k из развертки T являются *индуцированными* множествами ограниченного остатка. Более того, из этого будет вытекать, что полная развертка T как конечное объединение таких T_k также будет множеством ограниченного остатка. Если через $\delta_T(i, x_0)$ обозначить отклонение из формулы

$$r_T(i, x_0) = \text{vol}(T)i + \delta_T(i, x_0), \quad (4.13)$$

то в силу теоремы 4.1 для отклонения будет выполняться оценка

$$|\delta_T(i, x_0)| \leq (D + 1)[(1 + \nu(T))(2 + d_1(T)) - 1] \quad (4.14)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

§5. ИНДУЦИРОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ РАЗБИЕНИЙ РОЗИ

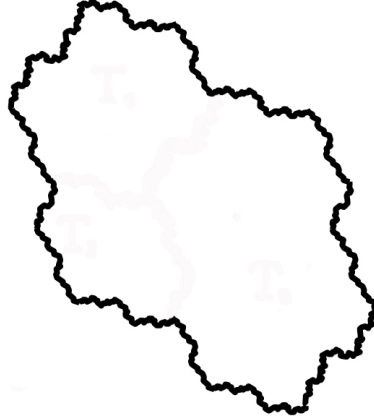
5.1. Разбиения Розы. В [12] был построен *фрактал Розы* \mathcal{R} (см. рис. 5.1) – связное подмножество из \mathbb{R}^2 , имеющее фрактальную границу $\partial\mathcal{R}$ и являющееся разверткой тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Разбиения Розы $\mathcal{R}^{(m)}$ уровней m определяются рекуррентно [11]:

1) для начальных уровней разбиения Розы

$$\mathcal{R}^{(-3)} = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{(-2)} = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{(-1)} = \mathcal{R} \quad (5.1)$$

совпадают с фракталом Розы \mathcal{R} ;

Рис. 5.1. Фрактал Розы \mathcal{R} .

2) для следующих уровней $m = 0, 1, 2, \dots$ разбиения $\mathcal{R}^{(m)}$ определяются через рекуррентное соотношение

$$\mathcal{R}^{(m)} = B\mathcal{R}^{(m-1)} \sqcup (B^2\mathcal{R}^{(m-2)} + z) \sqcup (B^3\mathcal{R}^{(m-3)} + z + Bz), \quad (5.2)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1 - \zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

при этом $\zeta = \theta^{-1}$, где θ обозначает число Пизо, являющееся вещественным корнем уравнения

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Первое нетривиальное разбиение Розы $\mathcal{R}^{(0)}$ имеет нулевой уровень $m = 0$ и представляет собою разбиение

$$\mathcal{R}^{(0)} = \mathcal{R}_0^{(0)} \sqcup \mathcal{R}_1^{(0)} \sqcup \mathcal{R}_2^{(0)}, \quad (5.4)$$

состоящее из трех множеств

$$\mathcal{R}_0^{(0)} = B\mathcal{R}, \quad \mathcal{R}_1^{(0)} = B^2\mathcal{R} + z, \quad \mathcal{R}_2^{(0)} = B^3\mathcal{R} + z + Bz.$$

5.2. Индуцированные множества. Для произвольного уровня $m = 0, 1, 2, \dots$ индуцированные множества $T^{(m)}$ порождаются аффинным

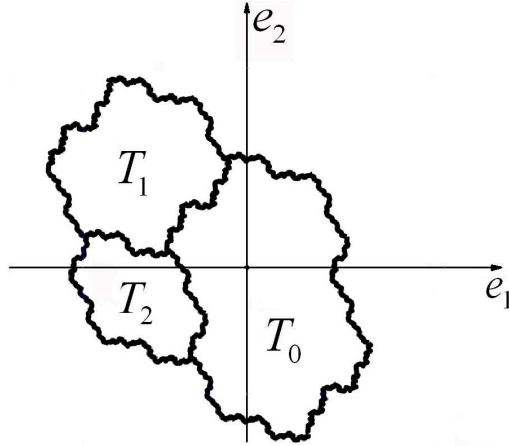


Рис. 5.2. Индуцированное множество нулевого уровня $T^{(0)}$.

отображением с матрицей B из (5.3) следующим образом:

$$T^{(m)} = T_0^{(m)} \sqcup T_1^{(m)} \sqcup T_2^{(m)}, \quad (5.5)$$

где

$$T_0^{(m)} = B^m \mathcal{R}_0^{(0)}, \quad T_1^{(m)} = B^m \mathcal{R}_1^{(0)}, \quad T_2^{(m)} = B^m \mathcal{R}_2^{(0)}. \quad (5.6)$$

Из определения (5.5) и (5.6) вытекает, что для нулевого уровня индуцированное множество $T^{(0)}$ совпадает с разбиением Розы $\mathcal{R}^{(0)}$ (см. рис. 5.2).

Индуцированное множество $T^{(0)} = T_0^{(0)} \sqcup T_1^{(0)} \sqcup T_2^{(0)}$ является раз-
верткой тора \mathbb{T}^2 , допускающей перекладывание

$$T^{(0)} \xrightarrow{S'} T^{(0)} : \quad S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (5.7)$$

на векторы

$$v_0 = \alpha - e_1, \quad v_1 = \alpha - e_2, \quad v_2 = \alpha, \quad (5.8)$$

где столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

далее будет рассматриваться, как вектор сдвига тора \mathbb{T}^2 .

5.3. Орбитные разбиения. Числа Трибоначчи t_m определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$t_m = t_{m-1} + t_{m-2} + t_{m-3} \quad (5.10)$$

с начальными условиями $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 4$. Для удобства выпишем начальный ряд чисел Трибоначчи и несколько продолженных влево членов с отрицательными индексами

$$\begin{aligned} t_{-3} = 0, \quad t_{-2} = 0, \quad t_{-1} = 1, \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 2, \\ t_2 = 4, \quad t_3 = 7, \quad t_4 = 13, \quad t_5 = 24, \dots \end{aligned}$$

Из [11] следует, что разбиений Розы $\mathcal{R}^{(m)}$, определенные рекуррентным соотношением (5.1), (5.2), являются орбитными разбиениями

$$\mathcal{T}^{(m)} = \mathcal{T}_0^{(m)} \sqcup \mathcal{T}_1^{(m)} \sqcup \mathcal{T}_2^{(m)}, \quad (5.11)$$

порождаемыми индуцированными множествами $T^{(m)}$ из (5.5), (5.6). Здесь в (5.11) составляющие $\mathcal{T}_k^{(m)}$ являются орбитами

$$\mathcal{T}_k^{(m)} = T_k^{(m)} \sqcup S^1(T_k^{(m)}) \sqcup \dots \sqcup S^{n_k-1}(T_k^{(m)}) \quad (5.12)$$

областей $T_k^{(m)}$ из разбиения $T^{(m)} = T_0^{(m)} \sqcup T_1^{(m)} \sqcup T_2^{(m)}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^2 на вектор (5.9). Орбиты в (5.12) имеют соответственно длины

$$n_0 = t_m, \quad n_1 = t_{m-1} + t_{m-2}, \quad n_2 = t_{m-1}. \quad (5.13)$$

Формулы (5.13) указывают на интересную связь [11], существующую между рекуррентным числовым соотношением (5.10) и рекуррентным соотношением (5.1), (5.2) для разбиений Розы $\mathcal{R}^{(m)}$: соотношение для разбиений Розы представляет собою геометрическую интерпретацию рекуррентного соотношения для чисел Трибоначчи. Аналогичная связь существует между числами и одномерными разбиениями Фибоначчи [7].

5.4. Границы для отклонений. Из существования разбиений (5.5), (5.11) и (5.12) вытекает, что индуцированные множества $T^{(m)}$ всех уровней $m = 0, 1, 2, \dots$, являющиеся перекладывающимися развертками, вкладываются (см. определение (1.8))

$$T^{(m)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^2$$

в тор \mathbb{T}^2 . Поэтому, чтобы оценить отклонения $\delta_k(i, x_0)$, можно применить теорему 4.1, а для этого необходимо знать значения объемных коэффициентов $\nu(T^{(m)})$ и относительного диаметра $d_{\mathbf{1}(m)}(T^{(m)})$ из (4.8) и (3.7).

Сначала вычислим эти значения для множества нулевого уровня $T^{(0)} = T_0^{(0)} \sqcup T_1^{(0)} \sqcup T_2^{(0)}$. Его области $T_k^{(0)}$ имеют площади

$$v(T_0^{(0)}) = \zeta, \quad v(T_1^{(0)}) = \zeta^2, \quad v(T_2^{(0)}) = \zeta^3,$$

поэтому объемный коэффициент (4.8) для разбиения $T^{(0)}$ будет равен

$$\nu(T^{(0)}) = \frac{v(T_{\max}^{(0)})}{v(T_{\min}^{(0)})} = \frac{\zeta}{\zeta^3} < 3.4. \quad (5.14)$$

Чтобы найти относительный диаметр $d_{\mathbf{1}(0)}(T^{(0)})$ разбиения $T^{(0)}$, согласно (3.7) нужно для решетки $L^{(0)} = \mathbb{Z}[l_1^{(0)}, l_2^{(0)}]$ знать ее двойственную решетку $L^* = \mathbb{Z}[l_1^*, l_2^*]$ (см. определения (1.1) и (3.1)). В силу (5.7) и (5.8) находим

$$l_1^{(0)} = v_1 - v_0 = e_1 - e_2, \quad l_2^{(0)} = v_2 - v_0 = e_1.$$

Следовательно, для $L^{(0)}$ двойственная решетка L^* будет иметь базис

$$l_1^* = -e_2, \quad l_2^* = e_1 + e_2.$$

Отсюда, используя формулу (3.7), для диаметра $d_{\mathbf{1}(0)}(T^{(0)})$ получаем неравенство

$$d_{\mathbf{1}(0)}(T^{(0)}) < 1.5. \quad (5.15)$$

Теперь перейдем к множествам $T^{(m)}$ произвольных уровней $m \geq 1$. Обозначим через

$$\mathbf{1}^{(m)} = B^m \mathbf{1}^{(0)} = \{B^m l_1^{(0)}, B^m l_2^{(0)}\}$$

базис решетки $L^{(m)}$ для индуцированного множества $T^{(m)}$. Из определения (5.5) и (5.6) вытекает соотношение

$$T^{(m)} = B^m T^{(0)}.$$

Поэтому применяя (3.8) и (4.8) приходим к формулам

$$\nu(T^{(m)}) = \nu(T^{(0)}) \quad (5.16)$$

и

$$d_{\mathbf{1}(m)}(T^{(m)}) = d_{\mathbf{1}(0)}(T^{(0)}). \quad (5.17)$$

Из формул (5.16) и (5.17) видно, что объемные коэффициенты $\nu(T^{(m)})$ и относительные диаметры $d_{1^{(m)}}(T^{(m)})$ являются инвариантами относительно аффинного преобразования с матрицей B , определенной в (5.3). Отмеченное свойство представляет собою частный случай инвариантности, отмеченной в (3.8) и (4.9).

Теорема 5.1. Пусть $\delta_k^{(m)}(i, x_0)$ – отклонения из формулы

$$r_k^{(m)}(i, x_0) = \nu(T_k^{(m)})i + \delta_k^{(m)}(i, x_0)$$

для функций распределения $r_k^{(m)}(i, x_0)$ точек орбит $\text{Orb}(x_0)$ относительно сдвига тора S по областям $T_k^{(m)} \subset \mathbb{T}^2$. Тогда при всех уровнях $m = 0, 1, 2, \dots$ имеет место оценка

$$|\delta_k^{(m)}(i, x_0)| < 15 \quad (5.18)$$

для $k = 0, 1, 2$ и всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Используя теорему 4.1 и формулы (5.14)–(5.17), получаем неравенство

$$|\delta_k^{(m)}(i, x_0)| \leq (1 + 3.4) \cdot (2 + 1.5) - 1 < 15. \quad (5.19)$$

□

Как указывалось во введении, ранее вместо (5.18) было доказано в [11] более сильное неравенство (0.9) с ограничением, что в качестве начальной точки выбирается $x_0 = 0$. При этом в работе [11] использовался иной метод, основанный на разложении натуральных чисел в системе счисления Трибоначчи (5.10).

§6. КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

6.1. Трансляционное преобразование прямой. Переходим к следующей теме данного обзора – деформациям множеств ограниченного остатка. Для этого на множестве вещественных чисел \mathbb{R} зададим разбиение

$$R = R_0 \sqcup R_1 \quad (6.1)$$

на два полуинтервала $R_0 = [-\infty, \omega)$, $R_1 = [\omega, +\infty)$, где $\omega \in \mathbb{R}$ – произвольное сечение. С помощью разбиения (6.1) определим отображение

$$\mathbb{R} \xrightarrow{S_v} \mathbb{R}: S_v(x) = x + v(x), \quad (6.2)$$

где $v(x) = v_k$ для $x \in R_k$, $k = 0, 1$. Здесь v_0, v_1 — некоторые числа из \mathbb{R} . Отображение S_v называется *трансляционным*, поскольку оно любую точку $x \in \mathbb{R}$ переводит некоторым параллельным переносом (трансляцией) в ее образ $S_v(x) = x + v(x)$.

Если в определениях (6.1) и (6.2) положить

$$\omega = 1 - \alpha, \quad v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - 1, \quad (6.3)$$

где $0 < \alpha < 1$, то при таких параметрах отображение S_v обладает свойством

$$S_v(\mathbb{R}) = \mathbb{R},$$

т.е. \mathbb{R} является *стабилизатором* отображения S_v . Но если бесконечную прямую \mathbb{R} заменить произвольным конечным интервалом $\mathbb{R}_c = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq c\}$ при условии $c > 1$, то будет иметь место уже строгое включение

$$S_v(\mathbb{R}_c) \subset \mathbb{R}_c.$$

Поэтому S_v является *стягивающим* отображением на интервалах \mathbb{R}_c . Заметим, что оно не будет сжимающим отображением, поскольку расстояние между образами двух точек может как уменьшаться, так и оставаться неизменным.

6.2. Отображения единичной окружности. Будем рассматривать отображения на единичной окружности C' . Удобно ее отождествить $C' \simeq T'$ с единичным полуинтервалом $T' = I = [0, 1)$, на котором и будем задавать отображения. Любое такое отображение можно представить в виде

$$T' \xrightarrow{S_{v'}} T' : S_{v'}(x') = x' + v'(x'), \quad (6.4)$$

где вектора сдвигов $v'(x')$ зависят от $x' \in T'$ и выбираются таким образом, чтобы отображение (6.4) было замкнутым $S_{v'}(T') \subseteq T'$.

6.3. Косое произведение отображений Пусть задано семейство отображений S' вида (6.4)

$$T' \xrightarrow{S_{v'_x}} T' : S_{v'_x}(x') = x' + v'_x(x'), \quad (6.5)$$

зависящее от параметра $x \in \mathbb{R}$. Будем предполагать указанное семейство периодическим mod 1, т.е. выполняется равенство

$$S_{v'_x}(x') = S_{v'_y}(x') \quad (6.6)$$

для всех $x' \in T'$, если $x \equiv y \pmod 1$. Определим на бесконечной *полосе*

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T' \quad (6.7)$$

косое произведение $S \times S'$ отображения $S = S_v$ и семейства отображений $S' = \{S_{v'_x}; x \in \mathbb{R}\}$, полагая (см., например, [21])

$$S_v \times S' (x, x') = (S_v(x), S_{v'_x}(x')). \quad (6.8)$$

6.4. Склейка. В полосе (6.7) выделим прямоугольник

$$\widehat{W} = W \times T', \quad (6.9)$$

где $W = [w_0, w_1)$ – некоторый полуинтервал, содержащий точку ω . Пусть прямоугольник \widehat{W} разбит каким-то образом

$$\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1. \quad (6.10)$$

Прямоугольник $\widehat{W} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть *склейкой*, а разбиение (6.10) – *раскраской* склейки, указывающей на то, что точки из \widehat{W} имеют два цвета 0 и 1. Склейка \widehat{W} вместе с ее разбиением (6.10) будут выступать в роли *возмущения* для отображения косого произведения $S \times S'$.

6.5. Возмущение отображения косого произведения. Используя склейку \widehat{W} , мы определим на полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ некоторое возмущение отображения $S \times S'$. С этой целью зададим *раскраску* полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{R} = \widehat{R}_0 \sqcup \widehat{R}_1, \quad (6.11)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{R}_0 &= (R_0 \setminus W) \times T' \cup \widehat{W}_0, \\ \widehat{R}_1 &= (R_1 \setminus W) \times T' \cup \widehat{W}_1. \end{aligned}$$

Будем говорить, что точки \widehat{x} из \widehat{R}_k , $k = 0, 1$, имеют *цвет* $\text{col}(\widehat{x}) = k$.

Используя разбиение (6.11), определим на полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ отображение

$$S \times_{\widehat{W}} S' : (x, x') \longrightarrow (x, x') + (v_k, v'_x(x')), \quad (6.12)$$

если точка (x, x') принадлежит множеству \widehat{R}_k , $k = 0, 1$. Для *возмущенного* отображения (6.12) будем использовать сокращенное обозначение

$$\widehat{S}(\widehat{x}) = S \times_{\widehat{W}} S'(\widehat{x}) \quad (6.13)$$

для произвольной точки $\widehat{x} = (x, x')$ из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Из определения следует замкнутость

$$\widehat{S} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}$$

полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ относительно отображения (6.13). Заметим, что если склейка \widehat{W} имеет нулевую ширину, то отображение (6.12) совпадает с косым произведением (6.8).

§7. СТАБИЛИЗАТОР ОТОБРАЖЕНИЯ \widehat{S} : СЛУЧАЙ БИЕКЦИЙ

7.1. Биекции. В этом параграфе будем предполагать, что каждое отображение

$$S_{v'_x} : T' \xrightarrow{\sim} T', \quad (7.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, из параметрического семейства S' отображений (6.5) является *биекцией* на единичном полуинтервале $T' = [0, 1)$.

7.2. Стабилизатор. Выделим в полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ следующее подмножество

$$\widehat{T} = \widehat{S}(\widehat{R}_0) \cap \widehat{S}(\widehat{R}_1), \quad (7.2)$$

где \widehat{R}_0 и \widehat{R}_1 – подмножества из разбиения полосы (6.11). Перенесем разбиение полосы (6.11) на множество $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1, \quad (7.3)$$

где

$$\widehat{T}_k = \widehat{R}_k \cap \widehat{T} \subset \widehat{T}.$$

Заметим, что (7.3) – в точности разбиение множества $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ на две области \widehat{T}_0 и \widehat{T}_1 , окрашенные в 0- и 1-цвет соответственно.

Далее нам, кроме (7.3), потребуется еще одно дополнительное разбиение множества \widehat{T} вида

$$\widehat{T} = \widehat{T}_l \sqcup \widehat{T}_c \sqcup \widehat{T}_r, \quad (7.4)$$

на области

$$\begin{aligned} \widehat{T}_l &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_1, w_1 + v_1) \times T'), \\ \widehat{T}_c &= [w_1 + v_1, w_0 + v_0) \times T', \\ \widehat{T}_r &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_0, w_1 + v_0) \times T'). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Сгруппируем разбиение (7.5) в виде

$$\widehat{T} = \widehat{T}_{\text{st}} \sqcup \widehat{T}_{\text{var}}, \quad (7.6)$$

где $\widehat{T}_{\text{st}} = \widehat{T}_c$ и $\widehat{T}_{\text{var}} = \widehat{T}_l \sqcup \widehat{T}_r$ – соответственно *стационарное* и *переменное* множества. Первое множество \widehat{T}_{st} – это центральная область из \widehat{T} , представляющая собою прямоугольник. Его размеры и положение в полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ не зависят от выбора семейства отображений S' из (6.5).

Наоборот, множество \widehat{T}_{var} , примыкающее слева и справа к \widehat{T}_{st} , полностью формируется семейством отображений S' . Обратим внимание на то, что раскраска обоих множеств \widehat{T}_{st} и \widehat{T}_{var} естественно зависит от раскраски (возмущения) (6.10) склейки \widehat{W} .

Предложение 7.1. Пусть \widehat{S} – отображение косога произведения (6.13), удовлетворяющее условию (7.1), и пусть $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ – подмножество, определенное в (7.2). Предположим, что выполнено условие

$$|W| < \min\{|v_0|, |v_1|\}, \quad (7.7)$$

где $|W|$ – длина интервала W из (6.9). Тогда \widehat{T} замкнуто относительно отображения \widehat{S} :

$$\widehat{S} : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T}. \quad (7.8)$$

Доказательство. Из (7.4) и определения (7.2) множества \widehat{T} вытекают включения

$$\widehat{S}(\widehat{T}_c \setminus \widehat{W}) \subset \widehat{T}_c, \quad \widehat{S}(\widehat{W}) \subset (\widehat{T}_l) \cup (\widehat{T}_r),$$

следовательно,

$$\widehat{S}(\widehat{T}_c) \subset \widehat{T}. \quad (7.9)$$

Из условия (7.7) и снова из (7.4) получаем еще два включения

$$\widehat{S}(\widehat{T}_l) \subset \widehat{T}_c, \quad \widehat{S}(\widehat{T}_r) \subset \widehat{T}_c$$

из которых заключаем, что

$$\widehat{S}(\widehat{T}_l) \subset \widehat{T}, \quad \widehat{S}(\widehat{T}_r) \subset \widehat{T}, \quad (7.10)$$

так как очевидно $\widehat{T}_c \subset \widehat{T}$. Теперь замкнутость (7.8) множества \widehat{T} относительно действия отображения \widehat{S} следует из (7.9) и (7.10). \square

§8. СТАБИЛИЗАТОР ОТОБРАЖЕНИЯ \widehat{S} : ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

8.1. Общий случай. В этом параграфе рассмотрим более общие семейство S' параметрических отображений (6.5), допуская, что среди них

$$S_{v'_x} : T' \longrightarrow T', \quad (8.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$, могут встречаться и не взаимно однозначные отображения полуинтервала $T' = [0, 1)$.

8.2. Стабилизатор. В условиях (8.1) несколько изменим определение (7.2) множества \widehat{T} , которое теперь принимает общий вид

$$\widehat{T} = \bigcap_{0 \leq i < +\infty} \widehat{S}^i(\widehat{W}_v), \quad (8.2)$$

при этом

$$\widehat{W}_v = (\widehat{W} + v_0 \cdot I) \cup (\widehat{W} + v_1 \cdot I) \quad (8.3)$$

– прямоугольник, где $\widehat{W} + v_k \cdot I$ обозначает сумму Минковского двух множеств \widehat{W} и $v_k \cdot I = \{tv_k; t \in I\}$. Данный прямоугольник замкнут

$$\widehat{S} : \widehat{W}_v \longrightarrow \widehat{W}_v \quad (8.4)$$

относительно отображения \widehat{S} , но не является его стабилизатором, поскольку имеет место строгое включение

$$\widehat{S}(\widehat{W}_v) \subset \widehat{W}_v,$$

из которого вытекает монотонная последовательность включений

$$\widehat{W}_v = \widehat{S}^0(\widehat{W}_v) \supset \widehat{S}^1(\widehat{W}_v) \supset \dots \supset \widehat{S}^i(\widehat{W}_v) \supset \dots \quad (8.5)$$

Если последовательность (8.5) стабилизируется на шаге i , то \widehat{S} называется отображением *конечного типа* (подробности см. [22]). В этом случае

$$\widehat{T} = \widehat{S}^i(\widehat{W}_v) \quad (8.6)$$

– *стабилизатор* отображения \widehat{S} , т.е.

$$\widehat{S}(\widehat{T}) = \widehat{T}. \quad (8.7)$$

В общем случае (8.1) найти стабилизатор \widehat{T} – задача более трудная по сравнению с аналогичной задачей для биекций (7.1). Более того, в случае произвольной склейки \widehat{W} явное геометрическое описание стабилизатора \widehat{T} потребует введения новых понятий.

Поэтому вместо указанного множества \widehat{T} из (8.2) рассмотрим его прямоугольную модификацию

$$\widehat{T}^{\text{rec}} = \widehat{T}_l^{\text{rec}} \sqcup \widehat{T}_c^{\text{rec}} \sqcup \widehat{T}_r^{\text{rec}}, \quad (8.8)$$

где справа в (8.8) выделены области

$$\begin{aligned}\widehat{T}_l^{\text{rec}} &= \widehat{S}(\widehat{W}_1), \\ \widehat{T}_c^{\text{rec}} &= [w_1 + v_1, w_0 + v_0) \times T', \\ \widehat{T}_r^{\text{rec}} &= \widehat{S}(\widehat{W}_0),\end{aligned}$$

при этом множества \widehat{W}_0 и \widehat{W}_1 взяты из разбиения (6.10) склейки \widehat{W} . Сравнивая определения (7.4) и (8.8), замечаем, что выполняются соотношения

$$\widehat{T}_l^{\text{rec}} = \widehat{T}_l, \quad \widehat{T}_c^{\text{rec}} \supseteq \widehat{T}_c, \quad \widehat{T}_r^{\text{rec}} = \widehat{T}_r, \quad (8.9)$$

так как центральная часть \widehat{T}_c заменена содержащим ее прямоугольником $\widehat{T}_c^{\text{rec}}$. Поэтому между множествами (7.4) и (8.8) имеет место включение

$$\widehat{T} \subseteq \widehat{T}^{\text{rec}}. \quad (8.10)$$

По аналогии с (7.3) перенесем разбиение полосы (6.11) на множество $\widehat{T}^{\text{ext}} \subset \widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{T}^{\text{rec}} = \widehat{T}_0^{\text{rec}} \sqcup \widehat{T}_1^{\text{rec}}, \quad (8.11)$$

где

$$\widehat{T}_k^{\text{rec}} = \widehat{R}_k \cap \widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{T}^{\text{rec}}.$$

Снова (8.11) – это разбиение множества $\widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ на две области $\widehat{T}_0^{\text{rec}}$ и $\widehat{T}_1^{\text{rec}}$, окрашенные в 0- и 1-цвет соответственно.

Предложение 8.1. Пусть \widehat{S} – отображение (6.13) с условием (8.1) и $\widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ – подмножество, определенное в (8.8). Предположим, что ширина склейки \widehat{W} удовлетворяет ограничению (7.7). Тогда множество \widehat{T}^{rec} замкнуто относительно отображения \widehat{S} :

$$\widehat{S} : \widehat{T}^{\text{rec}} \longrightarrow \widehat{T}^{\text{rec}}. \quad (8.12)$$

Доказательство такое же, как в предложении 7.1. \square

§9. ТОРЫ И СТАБИЛИЗАТОРЫ

9.1. Торы. Обозначим $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$, где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ – единичный базис, квадратную решетку на плоскости \mathbb{R}^2 . Тором $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2}^2$ называется фактор-пространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Разверткой $T^2 = T_{\mathbb{Z}^2}^2$ тора

\mathbb{T}^2 называется любое подмножество T^2 из \mathbb{R}^2 , такое что каноническое отображение

$$T^2 \xrightarrow{\text{mod } \mathbb{Z}^2} \mathbb{T}^2 : \hat{x} \mapsto \hat{x} \text{ mod } \mathbb{Z}^2 \quad (9.1)$$

является биекцией. Быть разверткой – геометрически означает, что T^2 является фундаментальной областью относительно решетки \mathbb{Z}^2 , разбивающей плоскость

$$\mathbb{R}^2 = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^2} T^2[l]$$

на множества $T^2[l] = T^2 + l$, получающиеся сдвигами области T^2 на векторы l . При этом $T^2[l_1] \cap T^2[l_2] = \emptyset$ для любых $l_1 \neq l_2$.

9.2. Стабилизатор \hat{T} и развертка тора.

Предложение 9.1. Пусть \hat{S} – отображение косога произведения (6.13), удовлетворяющее условию (7.1) и \widehat{W} – склейка ширины (7.7). Тогда множество \hat{T} , определенное в (7.2), является разверткой

$$\hat{T} = T^2 \quad (9.2)$$

тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки \mathbb{Z}^2 .

Доказательство. Предположим, что в раскраске (6.10) склейки \widehat{W} присутствует только 0-цвет, т.е. $\widehat{W} = \widehat{W}_0$. Тогда множество

$$\hat{T}^* = \hat{T}_c \sqcup \hat{S}(\widehat{W}) \quad (9.3)$$

будет представлять собою прямоугольник

$$\hat{T}^* = [w_1 + v_1, w_1 + v_0) \times T' = [w_1 + v_1, w_1 + v_0) \times [0, 1), \quad (9.4)$$

являющимся единичным квадратом, поскольку в силу (6.3) имеем $(w_1 + v_0) - (w_1 + v_1) = 1$. Поэтому по определению (9.1) он будет разверткой $\hat{T}^* = T^2$ тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки \mathbb{Z}^2 .

Теперь возвращаемся к случаю общей раскраски $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$. Если сдвигом на вектор $-e_1 = (-1, 0)$ подействуем на ту часть множества $\hat{S}(\widehat{W})$ из разбиения (9.3), которая соответствует подмножеству $\widehat{W}_1 \subset \widehat{W}$, то в силу разбиения (7.4) мы получим другим способом множество \hat{T} , определенное в (7.2). Это утверждение следует из периодичности (6.6) семейства отображений \mathcal{S}' и соотношения

$$S_v(x_1) = S_v(x_0) - 1$$

между S_v -образами точки x , имеющей 0-цвет $x = x_0$, и той же самой точки x , если бы она была окрашена $x = x_1$ в 1-цвет.

Таким образом, учитывая равенства (9.3) и (9.4), видим, что множество \widehat{T} получается деформацией единичного квадрата \widehat{T}^* путем параллельного переноса некоторой его части на вектор $-e_1 = (-1, 0)$ из квадратной решетки \mathbb{Z}^2 . Отсюда и равенства (9.4) выводим утверждение предложения 9.1. \square

9.3. Вложение в тор. Переходим к случаю (8.1) общего семейства \mathcal{S}' параметрических отображений (6.5). В новой ситуации множество \widehat{T}^{rec} , определенное в (8.8), уже не будет разверткой тора \mathbb{T}^2 . Чтобы как-то связать множество \widehat{T}^{rec} с тором \mathbb{T}^2 , требуется наложить дополнительные ограничения на семейство отображений \mathcal{S}' и раскраску $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ склейки \widehat{W} .

Если образы двух точек $x', y' \in T'$ совпадают

$$S_{v'_x}(x') = S_{v'_y}(y') \quad (9.5)$$

под действием некоторого отображения $S_{v'_x}$ из семейства \mathcal{S}' , то пусть указанные точки имеют одинаковый цвет $\text{col}(x') = \text{col}(y')$. В таком случае будем говорить, что раскраска склейки \widehat{W} согласована с семейством параметрических отображений \mathcal{S}' .

Множество $\widehat{X} \subset \mathbb{R}^2$ назовем \mathbb{Z}^2 -различимым, если оно удовлетворяет свойству

$$\forall \widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X} : \widehat{x} - \widehat{y} \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow \widehat{x} = \widehat{y}. \quad (9.6)$$

Из определения (9.6) следует, что все развертки тора \widehat{T} из предложения 9.1 являются \mathbb{Z}^2 -различимыми.

Предложение 9.2. Пусть \widehat{S} – отображение (6.13) с условием (9.5) и $\widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ – подмножество, определенное в (8.8). Предположим, что ширина склейки \widehat{W} удовлетворяет ограничению (7.7). Тогда множество \widehat{T}^{rec} будет \mathbb{Z}^2 -различимым.

Доказательство. Рассуждение снова проводим по схеме из предложения 9.1.

Предположим, что в раскраске (6.10) склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0$ присутствует только 0-цвет. Тогда множество $\widehat{T}_c \sqcup \widehat{S}(\widehat{W})$ будет содержаться

$$\widehat{T}_c \sqcup \widehat{S}(\widehat{W}) \subseteq \widehat{T}^* \quad (9.7)$$

в единичном квадрате (9.4). Поэтому указанное множество является \mathbb{Z}^2 -различимым.

В случае общей раскраски $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ сдвигом на вектор $-e_1 = (-1, 0)$ подействуем на ту часть множества $\widehat{S}(\widehat{W})$ из разбиения (9.3), которая соответствует подмножеству $\widehat{W}_1 \subset \widehat{W}$, и тогда в силу разбиения (7.4) мы получим другим способом множество \widehat{T}^{rec} , определенное в (8.8).

Чтобы при таком переходе от множества $\widehat{T}_c \sqcup \widehat{S}(\widehat{W})$ из (9.7) к деформированному множеству \widehat{T}^{rec} последнее оставалось \mathbb{Z}^2 -различимым, нужно отсутствие точек \widehat{y} из $\widehat{S}(\widehat{W})$, являющихся образом

$$\widehat{y} = \widehat{S}(\widehat{x}_0) = \widehat{S}(\widehat{x}_1) \tag{9.8}$$

двух слипающихся точек \widehat{x}_0 и \widehat{x}_1 из склейки \widehat{W} разного цвета $\text{col}(\widehat{x}_0) = 0$ и $\text{col}(\widehat{x}_1) = 1$. Выполнение данного требования обеспечивается согласованностью (9.5) раскраски склейки \widehat{W} с семейством параметрических отображений \mathcal{S}' .

Их включения (9.7) и свойства (9.8) выводим утверждение предложения 9.2. \square

§10. ИЗОМОРФИЗМЫ

10.1. Косой сдвиг тора. Рассмотрим бесконечный цилиндр $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ и зададим биекцию полосы $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times T'$ и данного цилиндра

$$\iota' : \widehat{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{C}} : \widehat{x} = (x, x') \mapsto (x, x' \bmod \mathbb{Z}). \tag{10.1}$$

Используя биекцию (10.1), перенесем отображение полосы $\widehat{S} = S \times_{\widehat{W}} \mathcal{S}'$, определенного в (6.13), на цилиндр $\widehat{\mathbf{C}}$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathbf{C}} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{\mathbf{C}} \end{array} \quad \iota' \tag{10.2}$$

и оставим за новым отображением прежнее обозначение \widehat{S} . Введем еще одно фактор-отображение цилиндра $\widehat{\mathbf{C}}$ на тор

$$\iota : \widehat{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbb{T}^2 : \widehat{x} = (x, x' \bmod \mathbb{Z}) \mapsto \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^2, \tag{10.3}$$

где была использована связь $\widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^2 = (x \bmod \mathbb{Z}, x' \bmod \mathbb{Z})$. С помощью (10.2) и (10.3) перенесем отображение \widehat{S} на тор \mathbb{T}^2 через коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{\mathbb{R}} \\ \widehat{\iota} \downarrow & & \downarrow \widehat{\iota} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\widehat{S}} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (10.4)$$

при этом $\widehat{\iota} = \iota \circ \iota'$ – композиция и отображение \widehat{S} задается формулой

$$\widehat{S}: \widehat{x} = (x, x') \mapsto (x + \alpha, S_{v'_x}(x')) \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (10.5)$$

поскольку, согласно определениям (6.2) и (6.3) отображения S_v , выполняется сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z} \quad (10.6)$$

и по условию (6.6) семейство отображений S' периодически по $x \bmod 1$.

Пусть любое отображение $S_{v'_x}$ из семейства S' будет перекладыванием двух отрезков. Это равносильно условию, что все $S_{v'_x} = S_{\alpha'_x}$ являются поворотами единичной окружности

$$S_{\alpha'_x}(x') \equiv x' + \alpha'_x \bmod \mathbb{Z} \quad (10.7)$$

на угол α'_x , зависящий от параметра x из единичной окружности $C \simeq I = [0, 1)$. При условии (10.7) отображение тора \widehat{S} из (10.4) и (10.5) будет иметь вид

$$\widehat{S}: \widehat{x} \mapsto \widehat{x} + \widehat{\alpha}_x \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (10.8)$$

где $\widehat{\alpha}_x = (\alpha, \alpha'_x)$ – вектор сдвига тора \mathbb{T}^2 , зависящий от параметра $x \in C$. В этом случае отображение \widehat{S} называется *косым сдвигом* тора \mathbb{T}^2 на переменный вектор $\widehat{\alpha}_x$, $x \in C$.

10.2. Раскраска тора: случай биекций. Начиная с этого места, по умолчанию будем предполагать, что склейка \widehat{W} удовлетворяет условию (7.7) из предложения 7.1.

Пусть $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ – развертка тора (9.2), $\widehat{\mathbf{x}}$ – произвольная точка на торе \mathbb{T}^2 и $\widehat{\iota}$ – отображение из диаграммы (10.4). Тогда в силу предложения 9.1 и определения (10.4) отображения $\widehat{\iota}$ для данной точки $\widehat{\mathbf{x}}$ существует единственная точка $\widehat{x} \in \widehat{T}$ с условием

$$\widehat{\iota}(\widehat{x}) = \widehat{\mathbf{x}}. \quad (10.9)$$

Используя биекцию (10.9) и разбиение (7.3), задающее раскраску раз-
вертки тора $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$, перенесем эту раскраску на тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2, \quad (10.10)$$

полагая $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}}) = \text{col}(\widehat{x})$.

Предложение 10.1. Пусть \widehat{S} – отображение полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ удовлетво-
ряет условиям из предложения 7.1 и $\widehat{\mathbb{S}}$ – отображение тора \mathbb{T}^2 из
диаграммы (10.4). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{T} \\ \widehat{\iota} \downarrow & & \downarrow \widehat{\iota} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\widehat{\mathbb{S}}} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (10.11)$$

где вертикальные стрелки обозначают биекцию $\widehat{\iota}$.

2. Отображения из диаграммы (10.11) согласуют цвета

$$\text{col}(\widehat{S}(\widehat{x})) = \text{col}(\widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{x}})) \quad (10.12)$$

точек \widehat{x} из множества \widehat{T} и их образов $\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\iota}(\widehat{x})$ на торе \mathbb{T}^2 .

Доказательство вытекает из диаграммы (10.4), существования би-
екции (10.9) и определения раскраски (10.10). \square

10.3. Раскраска тора: общий случай. Ограничим

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}^{\text{rec}} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{T}^{\text{rec}} \\ \widehat{\iota} \downarrow & & \downarrow \widehat{\iota} \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\widehat{\mathbb{S}}} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (10.13)$$

диаграмму (10.4) на подмножество $\widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{\mathbb{R}}^2$. Согласно предложе-
нию 9.2, вертикальные стрелки в диаграмме (10.13) являются вложе-
ниями

$$\widehat{\iota}: \widehat{T}^{\text{rec}} \hookrightarrow \mathbb{T}^2 \quad (10.14)$$

\mathbb{Z}^2 -различимого множества \widehat{T}^{rec} в тор \mathbb{T}^2 . Используя вложение (10.14)
и разбиение (8.11), задающее раскраску множества \widehat{T}^{rec} , перенесем его
раскраску на его образ $\widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})$, полагая

$$\widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}}) = \widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})_0 \sqcup \widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})_1, \quad (10.15)$$

где $\widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})_k = \widehat{\iota}(\widehat{T}_k^{\text{rec}})$ для $k = 0, 1$. Продолжим (10.15) до полной раскраски

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \quad (10.16)$$

всего тора \mathbb{T}^2 с условием, что

$$\widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})_k \subset \mathbb{T}_k^2 \quad (10.17)$$

для $k = 0, 1$. Иными словами, разность

$$\mathbb{T}_{\text{uncol}}^2 = \mathbb{T}^2 \setminus \widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}}) \quad (10.18)$$

— это *область неопределенного цвета*: ее разбиение можно задать произвольным образом. Тогда разбиение (10.15) в совокупности с условием (10.17) полностью задают указанное разбиение тора (10.16).

Теперь можем рассмотреть еще одно нужное нам для дальнейшего разбиение

$$\widehat{T}^{\text{ext}} = \widehat{T}_0^{\text{ext}} \sqcup \widehat{T}_1^{\text{ext}}. \quad (10.19)$$

Здесь множества $\widehat{T}_k^{\text{ext}}$ определяются следующими условиями:

$$\widehat{\iota}(\widehat{T}_k^{\text{ext}}) = \mathbb{T}_k^2, \quad \widehat{T}_k^{\text{rec}} \subset \widehat{T}_k^{\text{ext}}, \quad \widehat{T}_k^{\text{ext}} \subset \widehat{W}_v \quad (10.20)$$

для $k = 0, 1$, где \widehat{W}_v — прямоугольник, определенный в (8.3) и удовлетворяющий ограничению (7.7). Из (10.16), (10.17) и (10.20) следует, что разбиение (10.19) и само множество

$$\widehat{T}^{\text{ext}} \subset \widehat{W}_v \quad (10.21)$$

существуют и однозначно определены.

Лемма 10.1. *Если отображение \widehat{S} полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условиям из предложения 8.1, то множество \widehat{T}^{ext} , определенное в (10.19), является разверткой тора \mathbb{T}^2 , обладает свойством*

$$\widehat{S}(\widehat{T}^{\text{ext}}) \subset \widehat{T}^{\text{rec}} \quad (10.22)$$

и замкнуто

$$\widehat{S} : \widehat{T}^{\text{ext}} \longrightarrow \widehat{T}^{\text{ext}} \quad (10.23)$$

относительно отображения \widehat{S} .

Доказательство. Утверждение о том, что \widehat{T}^{ext} — развертка тора, вытекает из определения (10.20). Включение (10.22) следует из определения (8.8) множества \widehat{T}^{rec} и включения (10.21). Замкнутость же (10.23)

множества \widehat{T}^{ext} относительно отображения \widehat{S} выводим из (10.22) и включения

$$\widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{T}^{\text{ext}},$$

выполняющегося в силу второго свойства из (10.20). \square

Предложение 10.2. Пусть \widehat{S} – отображение полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ удовлетворяет условиям из предложения 8.1 и $\widehat{\mathbb{S}}$ – отображение тора \mathbb{T}^2 из диаграммы (10.4). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{T}^{\text{ext}} & \xrightarrow{\widehat{S}} & \widehat{T}^{\text{ext}} & & \\ \widehat{\iota} \downarrow & & \downarrow & \widehat{\iota} & \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\widehat{\mathbb{S}}} & \mathbb{T}^2 & & \end{array} \quad (10.24)$$

где вертикальные стрелки обозначают биекцию $\widehat{\iota}$.

2. Отображения из диаграммы (10.24) согласуют цвета

$$\text{col}(\widehat{S}(\widehat{x})) = \text{col}(\widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{x}})) \quad (10.25)$$

точек \widehat{x} из множества \widehat{T}^{ext} и их образов $\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\iota}(\widehat{x})$ на торе \mathbb{T}^2 .

Доказательство. Первое утверждение следует из диаграммы (10.13), леммы 10.1 и определения (10.19), (10.20) множества \widehat{T}^{ext} , а второе утверждение – из определения раскраски (10.19) этого множества. \square

10.4. Трансляционное отображение прямой $S_{v,c}$. Рассмотрим проекцию полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ на прямую

$$\text{pr} : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} : \widehat{x} = (x, x') \mapsto x \quad (10.26)$$

и зададим цвет $\text{col}(x)$ точек x на прямой \mathbb{R} , полагая $\text{col}(x) = \text{col}(\widehat{x})$, где $x = \text{pr}(\widehat{x})$.

Ограничим отображение (10.26) орбитами

$$\text{Orb}(\widehat{x}_0, S_{\widehat{v}}) = \{\widehat{x}_i = S_{\widehat{v}}^i(\widehat{x}_0); i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (10.27)$$

произвольных начальных точек $\widehat{x}_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$ относительно трансляционного отображения \widehat{S} полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, определенного в (6.13), и перенесем цвет точек с орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, S_{\widehat{v}})$ на ее проекцию

$$x_i = \text{pr}(\widehat{x}_i) \quad \text{для } i = 0, 1, 2, \dots$$

естественным способом $\text{col}(x_i) = \text{col}(\widehat{x}_i)$.

Сейчас нам нужно несколько изменить определение (6.2), (6.3) отображения S_v . Пусть \mathbb{R}_c – прямая \mathbb{R} , каждая точка которой имеет определенный цвет $\text{col}(x) = k$, где $k = 0, 1$. Аналогично (6.2) и (6.3) определим на прямой \mathbb{R}_c отображение

$$\mathbb{R}_c \xrightarrow{S_{v,c}} \mathbb{R}_c : S_{v,c}(x) = x + v_{(\text{col}(x))}, \quad (10.28)$$

где $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ и $\alpha \neq 0$ – некоторое число из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$. Также, как и S_v , отображение $S_{v,c}$ является *трансляционным*. С помощью этого отображения проекцию орбиты $\text{Orb}(\hat{x}_0, \hat{S})$ можно записать в виде

$$\text{Orb}(x_0, S_{v,c}) = \{x_i = S_{v,c}^i(x_0); i = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (10.29)$$

при этом имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Orb}(\hat{x}_0, \hat{S}) & \xrightarrow{\hat{S}} & \text{Orb}(\hat{x}_0, \hat{S}) \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \text{Orb}(x_0, S_{v,c}) & \xrightarrow{S_{v,c}} & \text{Orb}(x_0, S_{v,c}) \end{array} \quad (10.30)$$

где вертикальные стрелки обозначают проекцию (10.26). Здесь коммутативность диаграммы (10.30), кроме обычного смысла, означает еще и согласованность цвета точек орбит

$$\begin{aligned} \text{col}(\hat{x}) &= \text{col}(\text{pr}(\hat{x})), \\ \text{col}(\text{pr} \circ \hat{S}(\hat{x})) &= \text{col}(\hat{S} \circ \text{pr}(\hat{x})). \end{aligned} \quad (10.31)$$

10.5. Торические орбиты. Рассмотрим *орбиты*

$$\text{Orb}(\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{S}) = \{\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{S}^i(\hat{\mathbf{x}}_0); i = 0, 1, 2, \dots\}$$

произвольных начальных точек $\hat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 относительно отображения \hat{S} тора, определенного в (10.5). Определим *проекцию* тора \mathbb{T}^2 на прямую

$$\text{pr} : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (10.32)$$

исходя из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{T}} & \xrightarrow{\hat{t}} & \mathbb{T}^2 \\ \text{pr} \searrow & & \swarrow \text{pr} \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad (10.33)$$

Здесь $\hat{\mathcal{T}} = \hat{T}$ – развертка тора \mathbb{T}^2 из предложения 9.1 или $\hat{\mathcal{T}} = \hat{T}^{\text{ext}}$ – развертка из леммы 10.1, т.е. $\hat{\mathcal{T}}$ всегда будет обозначать *развертку тора*. Горизонтальная стрелка в (10.33) означает биекцию \hat{t} из

предложений 10.1 или 10.2 соответственно, а левая стрелка – проекция (10.26).

Предложение 10.3. *Для любой начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 существует такая раскраска прямой $\mathbb{R}_c = \mathbb{R}_{c, \widehat{\mathbf{x}}_0}$, зависящая от точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$, что имеет место следующая коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{\mathbb{S}}) & \xrightarrow{\widehat{\mathbb{S}}} & \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{\mathbb{S}}) \\
 \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\
 \mathbb{R}_c & \xrightarrow{S_{v,c}} & \mathbb{R}_c
 \end{array} \quad (10.34)$$

Здесь вертикальные стрелки обозначают проекцию (10.32) и в диаграмме (10.34) выполняется согласованность цвета точек

$$\widehat{\mathbf{x}} \in \text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{\mathbb{S}}) \text{ и } \widehat{x} = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}_c :$$

$$\begin{aligned}
 \text{col}(\widehat{\mathbf{x}}) &= \text{col}(\widehat{x}), \\
 \text{col}(\text{pr} \circ \widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{x}})) &= \text{col}(\widehat{\mathbb{S}} \circ \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}})),
 \end{aligned} \quad (10.35)$$

где раскраска $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}})$ точек $\widehat{\mathbf{x}}$ тора \mathbb{T}^2 была определена в (10.10) и (10.16).

Доказательство. С помощью проекции pr из (10.33) перенесем цвет точек $\widehat{\mathbf{x}}_i$ орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{\mathbb{S}})$ на их образы $x_i = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_i)$ на прямой \mathbb{R} . Для остальных точек на прямой \mathbb{R} цвет задается произвольным образом. После этого мы получаем некоторую неоднозначно определенную раскраску прямой \mathbb{R}_c , которой уже достаточно для задания отображения $S_{v,c}$ из (10.28) и, тем самым, – всей диаграммы (10.34). Теперь предложение 10.3 вытекает из диаграммы (10.30) и согласованности цвета (10.31). \square

§11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ПРЯМОЙ

11.1. Функции распределения на прямой. Пусть

$$\mathbb{R}_c = \mathbb{R}_{c,0} \sqcup \mathbb{R}_{c,1} \quad (11.1)$$

– произвольная раскраска прямой \mathbb{R} с разбиением на два множества $\mathbb{R}_{c,k}$, где $k = 0, 1$, задающих цвет $\text{col}(x) = k$ точек $x \in \mathbb{R}_{c,k}$. Выберем некоторую начальную точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим ее орбиту

$\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$. Согласно определению (10.28) отображения $S_{v,c}$, любую точку x_i орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ можем записать в виде

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + \sum_{0 \leq j < i} v_{(\text{col}(x_j))}, \quad (11.2)$$

где $x_j = S_{v,c}^j(x_0)$ – текущая точка орбиты и сдвиги v_k заданы равенствами $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ для некоторого $\alpha \neq 0$ из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$.

Для $k = 0, 1$ определим *функции распределения*

$$r_k(i, x_0) = \#\{j; S_{v,c}^j(x_0) \in \mathbb{R}_{c,k}; 0 \leq j < i\}, \quad (11.3)$$

т.е. $r_k(i, x_0)$ равно количеству точек $x_j = S_{v,c}^j(x_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$, имеющих цвет $\text{col}(x_j) = k$. Используя такие функции, можем переписать равенство (11.2) в свернутом виде

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + r_0(i, x_0)v_0 + r_1(i, x_0)v_1. \quad (11.4)$$

В силу определения (11.3) и условия (11.1) между функциями распределения $r_0(i, x_0)$ и $r_1(i, x_0)$ существует очевидная связь

$$r_0(i, x_0) + r_1(i, x_0) = i \quad (11.5)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

11.2. Функции отклонения на прямой. Выражая из (11.5) функцию $r_1(i, x_0)$ через $r_0(i, x_0)$ и подставляя ее значение в равенство (11.4), получаем

$$x_i = S_{v,c}^i(x_0) = x_0 + r_0(i, x_0) + iv_1, \quad (11.6)$$

так как по условию $v_0 - v_1 = 1$. Введем дополнительные функции

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - ia_k \quad (11.7)$$

для $k = 0, 1$ с коэффициентами $a_0 = -v_1$ и $a_1 = v_0$, которые, вспоминая условие из (11.2), удобно выразить через один параметр

$$a_0 = 1 - \alpha, \quad a_1 = \alpha. \quad (11.8)$$

Из (11.5), (11.8) и определения (11.7) вытекает, что между функциями отклонений $\delta_0(i, x_0)$ и $\delta_1(i, x_0)$ имеет место соотношение

$$\delta_0(i, x_0) + \delta_1(i, x_0) = 0 \quad (11.9)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Далее мы увидим, что функция $\delta_k(i, x_0)$ равна *отклонению* числа $r_k(i, x_0)$ точек $x_j = S_{v,c}^j(x_0)$ из орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$, имеющих цвет $\text{col}(x_j) = k$, от ожидаемого среднего значения ia_k , где коэффициент a_k равен частоте точек цвета k .

Теперь переходим к случаю общей раскраски прямой (11.1).

Предложение 11.1. *Для функций отклонений $\delta_k(i, x_0)$, $k=0,1$, определенных в (11.7), выполняются следующие формулы:*

$$\delta_0(i, x_0) = x_i - x_0, \quad \delta_1(i, x_0) = x_0 - x_i, \quad (11.10)$$

где $x_i = S_{v,c}^i(x_0)$ – текущая точка из орбиты $\text{Orb}(x_0, S_{v,c})$ с номером $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Подставим значение (11.7) функции отклонения $\delta_0(i, x_0)$ в равенство (11.6) и получим первое равенство из (11.10). Второе же равенство вытекает из соотношения (11.9). \square

§12. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ТОРЕ

12.1. Функции распределения и отклонения на торе.

В (10.10) и (10.16) была определена раскраска точек $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}})$ на торе \mathbb{T}^2 . Используя ее разобъем тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2 \quad (12.1)$$

на множества \mathbb{T}_k^2 из точек одного цвета $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}}) = k$. Аналогично (11.3) для отображения $\widehat{\mathbb{S}}$ тора \mathbb{T}^2 , определенного в (10.5), определим *функции распределения*

$$\mathbf{r}_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \#\{j; \widehat{\mathbb{S}}^j(\widehat{\mathbf{x}}_0) \in \mathbb{T}_k^2; \quad 0 \leq j < i\}, \quad (12.2)$$

равные количеству точек $\widehat{\mathbf{x}}_j = \widehat{\mathbb{S}}^j(\widehat{\mathbf{x}}_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{\mathbb{S}})$, имеющих один и тот же цвет $\text{col}(\widehat{\mathbf{x}}) = k$, где $k = 0, 1$. Тогда соответствующие им *функции отклонения* на торе \mathbb{T}^2 примут вид (ср. с отклонениями (11.7))

$$\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) - ia_k \quad (12.3)$$

с коэффициентами $a_0 = 1 - \alpha$ и $a_1 = \alpha$.

12.2. Основной результат.

Теорема 12.1. *Пусть $\widehat{T} = \widehat{T}$ – развертка тора \mathbb{T}^2 из предложения 9.1 или $\widehat{T} = \widehat{T}^{\text{ext}}$ – развертка из леммы 10.1, $\widehat{\mathbf{x}}_0$ – произвольная начальная точка на торе \mathbb{T}^2 и $\widehat{\mathbb{S}}$ – отображение тора (10.5). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Для функций отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, определенных в (12.3), выполняются следующие формулы:

$$\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = x_i - x_0, \quad \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = x_0 - x_i, \quad (12.4)$$

где

$$x_i = \mathbf{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_i) \quad \text{для} \quad \widehat{\mathbf{x}}_i = \widehat{S}^i(\widehat{\mathbf{x}}_0) \quad (12.5)$$

– текущей точки из орбиты $\text{Orb}(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widehat{S})$ с номером $i = 0, 1, 2, \dots$

2. Отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} m(\widehat{T}) - x_0 &\leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq M(\widehat{T}) - x_0, \\ x_0 - M(\widehat{T}) &\leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 - m(\widehat{T}) \end{aligned} \quad (12.6)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь обозначили через $m(\widehat{T})$ и $M(\widehat{T})$ граничные значения

$$m(\widehat{T}) = \inf_{\widehat{x} \in \widehat{T}} \mathbf{pr}(\widehat{x}), \quad M(\widehat{T}) = \sup_{\widehat{x} \in \widehat{T}} \mathbf{pr}(\widehat{x}), \quad (12.7)$$

где \mathbf{pr} – проекция (10.26).

Доказательство. 1. В силу предложений 10.1 и 10.2 можем записать

$$\mathbf{r}_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = r_k(i, x_0). \quad (12.8)$$

Тогда из (12.8) и определений (11.7), (12.3) следует равенство функций отклонений

$$\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \delta_k(i, x_0). \quad (12.9)$$

Из (12.9) и предложения 11.1 получаем формулы (12.4).

2. Рассмотрим орбиту $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$, определенную в (10.27), для начальной точки \widehat{x}_0 из развертки тора \widehat{T} , отвечающую $\widehat{i}(\widehat{x}_0) = \widehat{\mathbf{x}}_0$ точке $\widehat{\mathbf{x}}_0$, где \widehat{i} – биекция из диаграмм (10.11) и (10.24). Из замкнутости (7.8), (10.23) развертки тора \widehat{T} относительно отображения \widehat{S} следует включение $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S}) \subset \widehat{T}$. Поэтому, согласно формуле (12.4) и предложению 9.1, для функций отклонений $\delta_k(i, \widehat{x}_0) = r_k(i, \widehat{x}_0) - ia_k$ распределения точек $\widehat{x}_j = \widehat{S}^j(\widehat{x}_0)$ орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$ по областям \widehat{T}_k из разбиения $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ (см. (7.3) и (10.19)) будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} m(\widehat{T}) - x_0 &\leq \delta_0(i, \widehat{x}_0) \leq M(\widehat{T}) - x_0, \\ x_0 - M(\widehat{T}) &\leq \delta_1(i, \widehat{x}_0) \leq x_0 - m(\widehat{T}), \end{aligned}$$

из которых вытекают требуемые неравенства (12.6). \square

В качестве склейки выберем прямоугольник $\widehat{W} = W \times T'$ с основанием $W = [w_0, w_1)$, где

$$w_0 = \omega + d_0, \quad w_1 = \omega + d_1. \quad (12.10)$$

Величины $d_0 \leq 0$ и $d_1 \geq 0$ называются *возмущениями*. В случае $d_0 = 0$, $d_1 = 0$ полоса $\widehat{\mathbb{R}}$ имеет прямое разбиение $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1$ на две половины: точки $\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0$ с ординатами $x < \omega$ имеют цвет $\text{col}(\widehat{x}) = 0$, а точки $\widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1$ с $x \geq \omega$ имеют цвет $\text{col}(\widehat{x}) = 1$. Если же $d_0 - d_1 > 0$, то указанное разбиение возмущается (6.10) произвольной раскраской склейки \widehat{W} , имеющей ширину

$$|\widehat{W}| = |W| = d_1 - d_0. \quad (12.11)$$

В терминах возмущений d_0 и d_1 можно в явном виде выписать оценки (12.6) из теоремы 12.1.

Предложение 12.1. Пусть $\widehat{\mathbf{x}}_0$ – некоторая произвольная фиксированная начальная точка на торе \mathbb{T}^2 , \widehat{S} – отображение тора, отвечающее с помощью диаграммы (10.4) отображению \widehat{S} , и пусть возмущения $d_0 \leq 0$ и $d_1 \geq 0$ из (12.10) удовлетворяют условию

$$d_1 - d_0 < \min\{|v_0|, |v_1|\}. \quad (12.12)$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Множество \widehat{T} замкнуто относительно отображения \widehat{S} и является разверткой $\widehat{T} = T^2$ тора \mathbb{T}^2 относительно квадратной решетки \mathbb{Z}^2 .

2. Функции отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, определенные в (12.3), удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} d_0 - x_0 &\leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 1 + d_1 - x_0, \\ x_0 - 1 - d_1 &\leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 - d_0 \end{aligned} \quad (12.13)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $x_0 = \text{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_0)$ – проекция (10.32) точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на прямую \mathbb{R} .

3. Для произвольной начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 выполняются общие неравенства

$$\begin{aligned} |\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| &\leq 1 + |\widehat{W}|, \\ |\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| &\leq 1 + |\widehat{W}| \end{aligned} \quad (12.14)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где $|\widehat{W}| = d_1 - d_0$ – ширина склейки \widehat{W} .

Доказательство. 1. Поскольку неравенство (12.12) равносильно неравенству (7.7), то первое утверждение вытекает из предложений 9.1 и 10.2.

2. Из построений (7.2) и (10.19) развертки тора \widehat{T} для граничных значений $m(\widehat{T})$ и $M(\widehat{T})$ из (12.7) следуют неравенства

$$w_0 + v_1 \leq m(\widehat{T}), \quad M(\widehat{T}) \leq w_1 + v_0. \quad (12.15)$$

Подставляя в (12.15) значения для v_0 , v_1 и w_0 , w_1 из (6.3) и (12.10), получаем

$$d_0 \leq m(\widehat{T}), \quad M(\widehat{T}) \leq 1 + d_1. \quad (12.16)$$

Неравенства (12.13) вытекают из теоремы 12.1 и неравенств (12.16).

3. Воспользовавшись биекцией $\widehat{\iota}$ из диаграммы (10.4), получаем точку $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0) = \widehat{\iota}^{-1}(\widehat{\mathbf{x}}_0)$. Поскольку она принадлежит развертке тора \widehat{T} , то в силу (12.16) абсцисса x_0 точки \widehat{x}_0 должна удовлетворять неравенствам $d_0 \leq x_0 \leq 1 + d_1$. Отсюда и (12.13) выводим неравенства (12.14). \square

Замечание 12.1. 1. Названия возмущений для величин d_0 и d_1 , данные им в (12.10), объясняются неравенствами (12.13) и (12.14): с увеличением этих величин растут и границы изменений для функций отклонений $\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ и $\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$.

2. Раскраску области неопределенного цвета $\mathbb{T}_{\text{uncol}}^2 = \mathbb{T}^2 \setminus \widehat{\iota}(\widehat{T}^{\text{rec}})$ из (10.18) можно задавать произвольно и отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ останутся в старых границах (12.13) и (12.14).

§13. ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим несколько примеров множеств ограниченного остатка относительно следующих типичных отображений косоугольного произведения на торе: двойные сдвиги тора (биективные и стягивающие) и непрерывный косоугольный сдвиг тора.

13.1. Биективный двойной поворот тора. Пусть S_v – трансляционное отображение прямой \mathbb{R} , заданное параметрами

$$\omega = 1 - \alpha, \quad v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - 1. \quad (13.1)$$

В качестве склейки выберем прямоугольник $\widehat{W} = W \times T'$ с основанием $W = [w_0, w_1)$, где

$$w_0 = \omega + d_0, \quad w_1 = \omega + d_1 \quad (13.2)$$

и возмущения $d_0 \leq 0$ и $d_1 \geq 0$ удовлетворяют условию $d_1 - d_0 < \min\{|v_0|, |v_1|\}$, которое в силу (13.1) и (13.2) принимает вид

$$d_1 - d_0 < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}. \quad (13.3)$$

Склейка \widehat{W} имеет ширину $|\widehat{W}| = |W| = d_1 - d_0$. Из неравенства (13.3) следует

$$|\widehat{W}| < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}. \quad (13.4)$$

Раскраску склейки $\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1$ зададим следующим образом:

$$\widehat{W}_0 = W \times T'_0, \quad \widehat{W}_1 = W \times T'_1, \quad (13.5)$$

где $T'_0 = [0, \omega')$, $T'_1 = [\omega', 1)$ и сечение ω' – любое число $0 \leq \omega' < 1$.

Отождествляя полуинтервал $T' = [0, 1)$ с единичной окружностью, зададим семейство отображений \mathcal{S}' из (6.5) в виде сравнений

$$T' \xrightarrow{S_{v'_x}} T' : \quad S_{v'_x}(x') \equiv x' + v'_x(x') \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (13.6)$$

Здесь вектор сдвига $v'_x(x')$ зависит от параметра $x \in \mathbb{R}$ и определяется условием

$$v'_x(x') = \begin{cases} \alpha'_0, & \text{если } \{x\} \notin W, \\ \alpha'_1, & \text{если } \{x\} \in W, \end{cases} \quad (13.7)$$

где $\{x\}$ – дробная доля x и $0 \leq \alpha'_0 < 1$, $0 \leq \alpha'_1 < 1$ – любые числа. Из определения (13.7) следует, что семейство отображений \mathcal{S}' периодически $\pmod{1}$.

Определим на полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ отображение $\widehat{S}(\widehat{x}) = S \times_{\widehat{W}} \mathcal{S}'(\widehat{x})$ косого произведения, полагая

$$\widehat{S} : \quad (x, x') \longrightarrow (x, x') + (v_k, v'_x(x')), \quad (13.8)$$

если точка $\widehat{x} = (x, x')$ принадлежит множеству \widehat{R}_k , $k = 0, 1$, где разбиение $\widehat{R} = \widehat{R}_0 \sqcup \widehat{R}_1$ полосы \widehat{R} определено в (6.11).

Каждое отображение $S_{v'_x}$ из семейства \mathcal{S}' является биекцией на единичном полуинтервале $T' = [0, 1)$, поэтому стабилизатор \widehat{T} определяется формулой

$$\widehat{T} = \widehat{S}(\widehat{R}_0) \cap \widehat{S}(\widehat{R}_1) \quad (13.9)$$

и имеет разбиение

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$$

на две области $\widehat{T}_k = \widehat{R}_k \cap \widehat{T}$, окрашенные в 0- и 1-цвет соответственно. Согласно предложению 9.1, стабилизатор \widehat{T} является разверткой тора \mathbb{T}^2 .

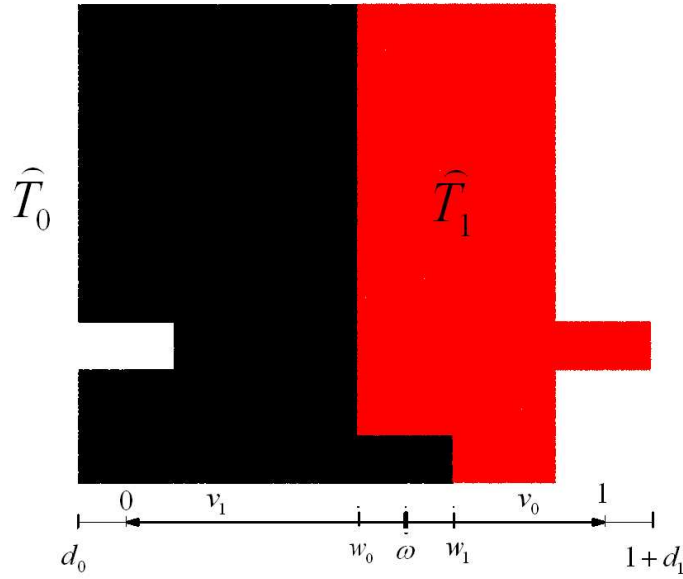


Рис. 13.1. Развертка тора $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ для отображения $\widehat{S}_{2\sim}$.

По формуле (10.8) отображению \widehat{S} соответствует отображение $\widehat{\mathbb{S}}$ тора \mathbb{T}^2 , имеющее вид

$$\widehat{\mathbb{S}}: \widehat{\mathbf{x}} \mapsto \widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\alpha}_k \bmod \mathbb{Z}^2, \quad (13.10)$$

где $\widehat{\alpha}_k = (\alpha, \alpha'_k)$, $k = 0, 1$, – вектор сдвига тора \mathbb{T}^2 , зависящий от параметра $x \in [0, 1)$ и определяемый формулой (13.7). Таким образом, отображение $\widehat{\mathbb{S}}$ есть ничто иное, как *двойной сдвиг* тора \mathbb{T}^2 , а из (13.10) легко увидеть, что $\widehat{\mathbb{S}}$ – биективное отображение тора.

На рис. 13.1 и рис. 13.2 показаны развертка тора $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ для отображения $\widehat{S}_{2\sim}$ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, определенного в (13.8), и соответствующее разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2$ для отображения $\widehat{S}_{2\sim}$, определенного в (13.10).

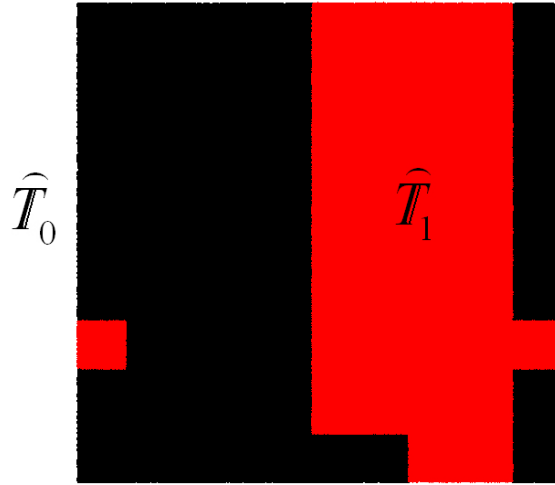


Рис. 13.2. Разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2$ для двойного сдвига $\widehat{S}_{2\sim}$.

Параметры для отображения $\widehat{S}_{2\sim}$ и для двойного сдвига тора $\widehat{S}_{2\sim}$ были выбраны следующие:

$$\begin{aligned} \alpha = \sqrt{2} - 1, \quad d_0 = -0.1, \quad d_1 = 0.1, \\ \omega' = 0.1, \quad \alpha'_0 = \sqrt{3} - 1, \quad \alpha'_1 = \sqrt{5} - 2. \end{aligned} \quad (13.11)$$

При таких параметрах функции отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) - ia_k$, $k = 0, 1$, имеют нормирующие коэффициенты $a_0 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ и $a_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$, равные площадям областей \widehat{T}_0 и \widehat{T}_1 соответственно. Согласно предложению 12.1 отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ ограничены неравенствами

$$\begin{aligned} -0.1 - x_0 \leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 1.1 - x_0, \\ x_0 - 1.1 \leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq x_0 + 0.1 \end{aligned} \quad (13.12)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь $x_0 = \mathbf{pr}(\widehat{\mathbf{x}}_0)$ — проекция фиксированной начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{T}^2$ на прямую \mathbb{R} . При любом выборе начальной точки $\widehat{\mathbf{x}}_0$ ее проекция x_0 удовлетворяет неравенствам $-0.1 \leq x_0 \leq 1.1$.

13.2. Непрерывный косо́й сдвиг тора. Снова отождествляя полуинтервал $T' = [0, 1)$ с единичной окружностью, зададим семейство отображений S' в виде сравнений

$$T' \xrightarrow{S_{v'_x}} T' : S_{v'_x}(x') \equiv x' + v'_x(x') \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (13.13)$$

Здесь вектор сдвига $v'_x(x')$ зависит от параметра $x \in \mathbb{R}$ и определяется условием

$$v'_x(x') = \lambda\{x\}, \quad (13.14)$$

где коэффициент λ – произвольное вещественное число. Из определения (13.14) следует, что семейство отображений S' периодически $\pmod{1}$. Согласно определению (13.13), все отображения из семейства S' – повороты окружности и, следовательно, являются биекциями на полуинтервале $T' = [0, 1)$. Поэтому стабилизатор \hat{T} также определяется формулой (13.9) и по предложению 9.1, стабилизатор \hat{T} будет разверткой тора \mathbb{T}^2 .

По формуле (10.8) отображению \hat{S} соответствует отображение $\hat{\mathbb{S}}$ тора \mathbb{T}^2 , имеющее вид

$$\hat{\mathbb{S}} : \hat{\mathbf{x}} \mapsto \hat{\mathbf{x}} + \hat{\alpha}_x \pmod{\mathbb{Z}^2}, \quad (13.15)$$

где $\hat{\alpha}_x = (\alpha, \lambda\{x\})$, – вектор сдвига тора \mathbb{T}^2 , зависящий от параметра $x \in [0, 1)$. В данном случае отображение $\hat{\mathbb{S}}$ есть *непрерывный косо́й сдвиг* тора \mathbb{T}^2 , являющийся биективным отображением.

На рис. 13.3 и рис. 13.4 показаны развертка тора \hat{T} для отображения полосы $\hat{S}_{\infty\sim}$, определенного в (13.13), и соответствующее разбиение тора \mathbb{T}^2 для отображения $\hat{\mathbb{S}}_{\infty\sim}$, определенного в (13.15)

Параметры для отображения $\hat{S}_{\infty\sim}$ и для косо́го сдвига $\hat{\mathbb{S}}_{\infty\sim}$ тора \mathbb{T}^2 выбраны следующие:

$$\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad d_0 = -0.2, \quad d_1 = 0.2, \quad \omega' = 0.1, \quad \lambda = 3. \quad (13.16)$$

При таких параметрах функции отклонения $\delta_k(i, \hat{\mathbf{x}}_0)$, $k = 0, 1$, имеют тот же вид, что в формулах (13.12). Следовательно, области \hat{T}_0 и \hat{T}_1 на рис. 1.3 имеют прежние площади $|\hat{T}_0| = 2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ и $|\hat{T}_1| = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$. Выберем начальную точку $\hat{\mathbf{x}}_0$ на торе \mathbb{T}^2 так, чтобы ее $x_0 = \mathbf{pr}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ попадала в середину отрезка $[d_0, 1 + d_1] = [-0.2, 1.2]$, т.е. $x_0 = \frac{1}{2}(1 + d_1 + d_0) = 0.5$. При таком ограничении неравенства (13.12)

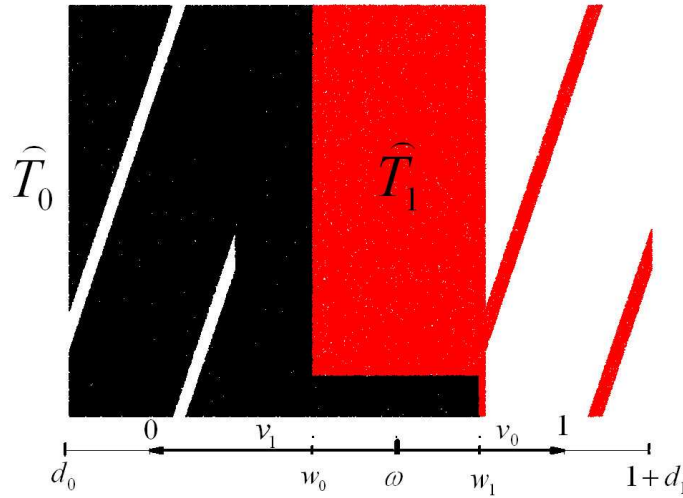


Рис. 13.3. Развертка тора $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ для отображения $\widehat{S}_{\infty \sim}$.

для отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ примут симметричный вид

$$\begin{aligned} -0.7 &\leq \delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 0.7, \\ -0.7 &\leq \delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) \leq 0.7 \end{aligned} \tag{13.17}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

13.3. Стягивающий двойной поворот. Рассмотрим семейство \mathcal{S}' , состоящее из одного отображения

$$T' \xrightarrow{S_{v'_x}} T' : S_{v'_x}(x') \equiv x' + v'_x(x') \pmod{\mathbb{Z}}, \tag{13.18}$$

когда вектор сдвига $v'_x(x') = v'(x')$ уже не зависит от параметра $x \in \mathbb{R}$ и определяется условием

$$v'(x') = \begin{cases} \alpha'_e, & \text{если } \{x'\} \in T'_e, \\ \alpha'_b, & \text{если } \{x'\} \in T'_b. \end{cases} \tag{13.19}$$

При этом предполагается, что единичный полуинтервал T' , кроме (13.5), дополнительно разбит

$$T' = T'_e \sqcup T'_b \tag{13.20}$$

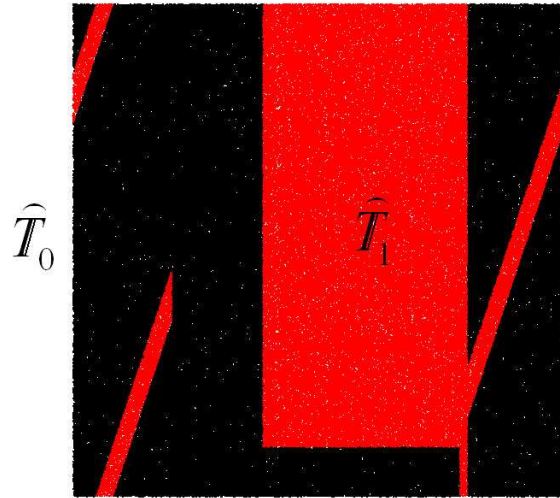


Рис. 13.4. Разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0^2 \sqcup \mathbb{T}_1^2$ для косо́го сдвига $\widehat{\mathbb{S}}_{\infty\sim}$.

на полуинтервалы $T'_e = [0, \omega'_{eb})$ и $T'_b = [\omega'_{eb}, 1)$. Здесь сечение ω'_{eb} и сдвиги α'_e, α'_b – любые числа их $[0, 1)$. Очевидно, что семейство отображений \mathcal{S}' периодически $\text{mod } 1$. Если $\alpha'_e = \alpha'_b = \alpha'$, то отображение $S_{v'_x}$ из (13.18) – простой поворот единичной окружности $C' \simeq T'$ на угол α' . Данный поворот не зависит от разбиения (13.20). При условии $\alpha'_e \neq \alpha'_b$ отображение $S_{v'_x}$ является *двойным поворотом* окружности. Двойные повороты были исследованы в [8, 22–24].

Поскольку двойные повороты не являются биекциями, то стабилизатор \widehat{T} для отображения косо́го произведения $\widehat{S}(\widehat{x}) = S \times_{\widehat{W}} \mathcal{S}'(\widehat{x})$ уже нельзя определять формулой (13.9). Нужно, согласно (10.19), стабилизатор \widehat{T} рассматривать, как часть последовательных расширений

$$\widehat{T} \subset \widehat{T}^{\text{rec}} \subset \widehat{T}^{\text{ext}},$$

которым соответствует последовательность торических расширений

$$\widehat{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}^2 \text{ rec} \subset \mathbb{T}^2 \text{ ext} = \mathbb{T}^2$$

для отображения \widehat{S} тора \mathbb{T}^2 , имеющего вид

$$\widehat{S}: \widehat{\mathbf{x}} \mapsto \widehat{\mathbf{x}} + \widehat{\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}) \bmod \mathbb{Z}^2 \quad (13.21)$$

с вектором сдвига

$$\widehat{\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{cases} (\alpha, \alpha'_e), & \text{если } \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}_e^2, \\ (\alpha, \alpha'_b), & \text{если } \widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}_b^2, \end{cases}$$

где тор \mathbb{T}^2 разбит

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_e^2 \sqcup \mathbb{T}_b^2 \quad (13.22)$$

параллелью ω'_{eb} на области \mathbb{T}_e^2 и \mathbb{T}_b^2 , состоящие из точек $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ с $0 \leq \mathbf{x}' < \omega'_{eb}$ и $\omega'_{eb} \leq \mathbf{x}' < 1$ соответственно. Итак мы видим, что , отображение \widehat{S} – *двойной сдвиг* тора \mathbb{T}^2 также, как и отображение (13.10), но теперь оно уже не будет биективным отображением тора.

На рис. 13.5 показан стабилизатор $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ для отображения косоугольного произведения $\widehat{S}_{2>} = S \times_{\widehat{W}} S'$, где S' – семейство отображений (13.18), а на рис. 13.6 изображен стабилизатор $\widehat{\mathbb{T}} = \widehat{\mathbb{T}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{T}}_1$ для стягивающего двойного сдвига $\widehat{S}_{2>}$ тора \mathbb{T}^2 . Незаполненная на торе \mathbb{T}^2 область $\mathbb{T}_{\text{uncol}}^2$ (см. рис. 13.6), содержащая точки $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ с $0 \leq \mathbf{x} < d_1$ или $1 + d_0 \leq \mathbf{x} < 1$, – это область неопределенного цвета. Как уже было сказано в (10.18), ее раскраску на два цвета

$$\mathbb{T}_{\text{uncol}}^2 = \mathbb{T}_{\text{uncol},0}^2 \sqcup \mathbb{T}_{\text{uncol},1}^2 \quad (13.23)$$

можно задать произвольным образом.

На рис. 13.5 и рис. 13.6 параметры для отображения $\widehat{S}_{2>}$ и для стягивающего двойного сдвига тора $\widehat{S}_{2>}$ выбраны следующие:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2} - 1, & d_0 &= -0.1, & d_1 &= 0.1, & \omega' &= 0.1, \\ \alpha'_e &= \sqrt{3} - 1, & \alpha'_b &= \sqrt{5} - 2, & \omega'_{eb} &= 0.2. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Функции отклонения $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) = \mathbf{r}_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0) - ia_k$, $k = 0, 1$, хотя и сохраняют неизменными нормирующие коэффициенты $a_0 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ и $a_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$, однако области \widehat{T}_0 и \widehat{T}_1 на рис. 13.5 будут иметь меньшие площади $|\widehat{T}_0| = a_0 \cdot |\widehat{T}| \approx 0.59 \cdot |\widehat{T}|$ и $|\widehat{T}_1| = a_1 \cdot |\widehat{T}| \approx 0.41 \cdot |\widehat{T}|$, поскольку общая площадь стабилизатора \widehat{T} теперь стала $|\widehat{T}| < 1$.

Для вычисления отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ применим предложение 12.1. Из неравенств (12.14) для отклонений $\delta_k(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)$ с произвольной фиксированной начальной точкой $\widehat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{T}^2$ получаем следующие оценки

$$|\delta_0(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1.2, \quad |\delta_1(i, \widehat{\mathbf{x}}_0)| \leq 1.2 \quad (13.25)$$

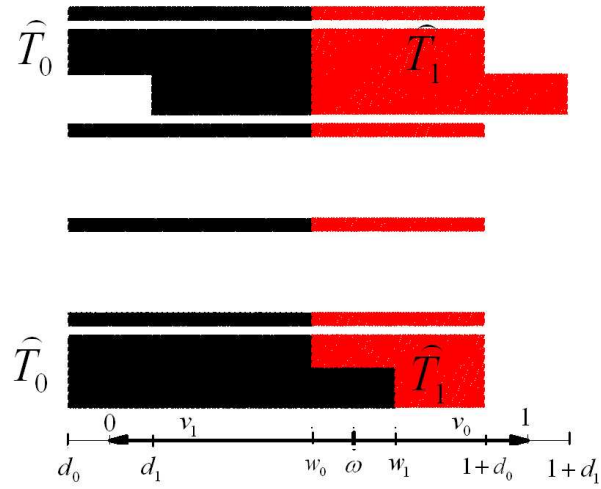


Рис. 13.5. Стабилизатор $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ трансляционного отображения $\widehat{S}_{2>}$.

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, так как склейка \widehat{W} ввиду (13.24) имеет ширину $|\widehat{W}| = d_1 - d_0 = 1.2$. Заметим, что приведенные оценки (13.25) не зависят от выбора раскраски (13.23) области неопределенного цвета $\mathbb{T}_{\text{uncol}}^2$, состоящей из двух крайних вертикальных полос с отрезками в основаниях $[0, d_1)$ и $[1 + d_0, 1)$, изображенных на рис. 13.6.

§14. ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУХЦВЕТНОЙ ПОЛОСЫ

14.1. Раскраска полосы. Переходя к последней теме данного обзора – неавтономным множествам ограниченного остатка – рассмотрим бесконечную полосу

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times I, \quad (14.1)$$

где $I = [0, 1)$ – единичный полуинтервал, и обозначим через $\widehat{x} = (x, x')$ произвольную точку из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$. Выделим в полосе (14.1) прямоугольник

$$\widehat{W} = W \times I \quad (14.2)$$

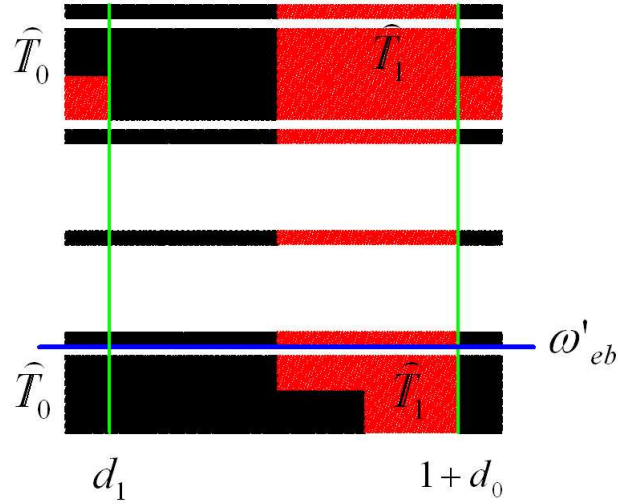


Рис. 13.6. Стабилизатор $\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1$ для стягивающего двойного сдвига $\widehat{S}_{2>}$.

с основанием $W = [\omega, \omega + d)$, где $\omega = 1 - \alpha$ для некоторого фиксированного $\alpha \in I$ и $d \geq 0$.

Пусть $g(x')$ – вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

$$g(x' + 1) = g(x'), \quad 0 \leq g(x') \leq d. \quad (14.3)$$

С помощью функции $g(x')$ разобьем прямоугольник \widehat{W} на два множества

$$\widehat{W} = \widehat{W}_0 \sqcup \widehat{W}_1, \quad (14.4)$$

где

$$\widehat{W}_0 = \{\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{W}; \quad x < \omega + g(x')\}, \quad \widehat{W}_1 = \widehat{W} \setminus \widehat{W}_0.$$

Прямоугольник $\widehat{W} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ будем называть *склейкой*, а разбиение (14.4) – *раскраской* склейки, указывающей на то, что точки \widehat{x} из \widehat{W} могут иметь два цвета $\text{col}(\widehat{x}) = 0$ или $\text{col}(\widehat{x}) = 1$ для $\widehat{x} \in \widehat{W}_0$ или $\widehat{x} \in \widehat{W}_1$ соответственно.

Склейка \widehat{W} вместе с ее разбиением (14.4) будут выступать в роли *возмущения* для рассматриваемых далее отображений полосы $\widehat{\mathbb{R}}$.

Чтобы перейти к определению указанных отображений, нам потребуется еще соответствующая (14.4) раскраска полосы

$$\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_0 \sqcup \widehat{\mathbb{R}}_1, \quad (14.5)$$

где

$$\widehat{\mathbb{R}}_0 = \{\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{\mathbb{R}}; \quad x < \omega + g(x')\}, \quad \widehat{\mathbb{R}}_1 = \widehat{\mathbb{R}} \setminus \widehat{\mathbb{R}}_0.$$

14.2. Отображения первого рода. Определим отображение

$$\widehat{S}^1 : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad (14.6)$$

полагая

$$\widehat{x} = (x, x') \mapsto \begin{cases} (x + v_0, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0, \\ (x + v_1, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1, \end{cases} \quad (14.7)$$

где $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ и α' — произвольное число из I . Здесь и далее будем отождествлять

$$I \longrightarrow C : x' \mapsto x' \bmod 1 \quad (14.8)$$

полуинтервал I с единичной окружностью $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, где \mathbb{Z} — кольцо целых чисел. Так определенное \widehat{S}^1 будем называть *отображением первого рода*.

14.3. Отображения второго рода. Введем два дополнительных параметра

$$\theta_1 \in [0, \omega), \quad \theta_2 \in [\omega + d, 1). \quad (14.9)$$

Из этих условий следует, что параметры θ_1 и θ_2 связаны неравенствами

$$0 \leq \theta_2 - \theta_1 < 1. \quad (14.10)$$

Они образуют полуинтервал $\Theta = [\theta_1, \theta_2)$. Отвечающий ему прямоугольник $\widehat{\Theta} = \Theta \times I$, аналогично (14.5), разобьем на части

$$\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}_0 \sqcup \widehat{\Theta}_1, \quad (14.11)$$

где $\widehat{\Theta}_{\text{col}} = \widehat{\Theta} \cap \widehat{\mathbb{R}}_{\text{col}}$ для $\text{col} = 0, 1$.

Определим отображение

$$\widehat{S}^2 : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad (14.12)$$

полагая

$$\widehat{x} = (x, x') \mapsto \begin{cases} (x + v_0, x'), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0 \setminus \widehat{\Theta}, \\ (x + v_1, x'), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1 \setminus \widehat{\Theta}, \\ (x + v_0, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0 \cap \widehat{\Theta}, \\ (x + v_1, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1 \cap \widehat{\Theta}, \end{cases}$$

где v_0 , v_1 и α' были определены в (14.7). Отображение \widehat{S}^1 из (14.6) представляет собою частный случай *отображения второго рода* \widehat{S}^2 , если в определении (14.12) в качестве полуинтервала Θ выбрать всю вещественную прямую \mathbb{R} .

14.4. Отображения третьего рода. Выбранный в (14.9) полуинтервал $\Theta = [\theta_1, \theta_2)$ обладал свойством $\Theta \supseteq W$, где W – полуинтервал из (14.2). Здесь мы рассмотрим другую крайнюю ситуацию, когда

$$\Theta \cap W = \emptyset. \quad (14.13)$$

Нужно различать три случая

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \omega, \\ \omega + d \leq \theta_1 < \theta_2 < 1, \\ 0 \leq \theta_2 < \omega, \quad \omega + d \leq \theta_1 < 1. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Снова будем использовать полуинтервал $\Theta = [\theta_1, \theta_2)$, но в последнем случае из (14.14) сделаем изменение $\Theta = (-\infty, \theta_1) \sqcup [\theta_2, +\infty)$. Соответственно (14.5) множество $\widehat{\Theta} = \Theta \times I$ будет иметь раскраску

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta} &= \widehat{\Theta}_0, \\ \widehat{\Theta} &= \widehat{\Theta}_1, \\ \widehat{\Theta} &= \widehat{\Theta}_0 \sqcup \widehat{\Theta}_1, \end{aligned} \quad (14.15)$$

где в третьем случае полагаем $\widehat{\Theta}_0 = (-\infty, \theta_1) \times I$, $\widehat{\Theta}_1 = [\theta_2, +\infty) \times I$.

Определим *отображение третьего рода*

$$\widehat{S}^3 : \widehat{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \quad (14.16)$$

полагая

$$\widehat{x} = (x, x') \mapsto \begin{cases} (x + v_0, x'), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0 \setminus \widehat{\Theta}, \\ (x + v_1, x'), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1 \setminus \widehat{\Theta}, \\ (x + v_0, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_0 \cap \widehat{\Theta}, \\ (x + v_1, x' + \alpha' \bmod 1), & \text{если } \widehat{x} \in \widehat{\mathbb{R}}_1 \cap \widehat{\Theta}. \end{cases}$$

Определение отображения третьего рода \widehat{S}^3 формально совпадает с определением (14.12) для \widehat{S}^2 , изменились лишь геометрическое расположение множества $\widehat{\Theta} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ и его раскраска (14.15). Заметим, что теперь непрерывным изменением множества $\widehat{\Theta}$ отображение \widehat{S}^3 уже не переведешь ни в одно из отображений \widehat{S}^1 или \widehat{S}^2 .

§15. СТАБИЛИЗАТОР

15.1. Определение. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ – отображение произвольного рода $\rho = 1, 2, 3$. Выделим в полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ следующее подмножество $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$, определяемое равенством

$$\widehat{T} = \widehat{S}(\widehat{\mathbb{R}}_0) \cap \widehat{S}(\widehat{\mathbb{R}}_1), \quad (15.1)$$

где $\widehat{\mathbb{R}}_0$ и $\widehat{\mathbb{R}}_1$ – подмножества из разбиения полосы (14.5). Перенесем разбиение полосы (14.5) на множество $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$, полагая

$$\widehat{T} = \widehat{T}_0 \sqcup \widehat{T}_1, \quad (15.2)$$

где

$$\widehat{T}_{\text{col}} = \widehat{\mathbb{R}}_{\text{col}} \cap \widehat{T} \subset \widehat{T}.$$

Заметим, что (15.2) – в точности разбиение множества $\widehat{T} \subset \widehat{\mathbb{R}}$ на две области \widehat{T}_0 и \widehat{T}_1 , окрашенные в $\text{col} = 0$ и 1 цвет соответственно.

Далее нам, кроме (15.2), потребуется еще одно дополнительное разбиение множества \widehat{T} вида

$$\widehat{T} = \widehat{T}_l \sqcup \widehat{T}_c \sqcup \widehat{T}_r, \quad (15.3)$$

на области

$$\begin{aligned} \widehat{T}_l &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_1, w_1 + v_1] \times T'), \\ \widehat{T}_c &= [w_1 + v_1, w_0 + v_0] \times T', \\ \widehat{T}_r &= \widehat{T} \cap ([w_0 + v_0, w_1 + v_0] \times T'). \end{aligned}$$

Сгруппируем разбиение (15.3) в виде

$$\widehat{T} = \widehat{T}_{\text{st}} \sqcup \widehat{T}_{\text{var}}, \quad (15.4)$$

где $\widehat{T}_{\text{st}} = \widehat{T}_c$ и $\widehat{T}_{\text{var}} = \widehat{T}_l \sqcup \widehat{T}_r$ – соответственно *стационарное* и *переменное* множества. Первое множество \widehat{T}_{st} – это центральная область

из \widehat{T} , представляющее собою прямоугольник. Его размеры и положение в полосе $\widehat{\mathbb{R}}$ не зависят от рода отображения \widehat{S} из (14.6), (14.12) или (14.16). Наоборот, множество \widehat{T}_{var} , примыкающее слева и справа к \widehat{T}_{st} , полностью формируется отображением \widehat{S} . Обратим внимание на то, что раскраска обоих множеств \widehat{T}_{st} и \widehat{T}_{var} естественно зависит от раскраски или возмущения (14.4) склейки \widehat{W} .

Предложение 15.1. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ – отображение произвольного рода $\rho = 1, 2, 3$ и подмножество $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$ из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ определено равенством (15.1) Если выполнено условие

$$d < \min\{\alpha, 1 - \alpha\}, \quad (15.5)$$

где $d = |\widehat{W}|$ – ширина полосы (14.2), то множество \widehat{T} замкнуто

$$\widehat{S} : \widehat{T} \longrightarrow \widehat{T} \quad (15.6)$$

относительно отображения \widehat{S} .

Доказательство. Из (15.3) и определения (15.1) множества \widehat{T} вытекают включения

$$\widehat{S}(\widehat{T}_c \setminus \widehat{W}) \subset \widehat{T}_c, \quad \widehat{S}(\widehat{W}) \subset (\widehat{T}_l) \cup (\widehat{T}_r),$$

следовательно,

$$\widehat{S}(\widehat{T}_c) \subset \widehat{T}. \quad (15.7)$$

Из условия (15.5) и снова из (15.3) получаем еще два включения

$$\widehat{S}(\widehat{T}_l) \subset \widehat{T}_c, \quad \widehat{S}(\widehat{T}_r) \subset \widehat{T}_c$$

из которых заключаем, что

$$\widehat{S}(\widehat{T}_l) \subset \widehat{T}, \quad \widehat{S}(\widehat{T}_r) \subset \widehat{T}, \quad (15.8)$$

так как очевидно $\widehat{T}_c \subset \widehat{T}$. Теперь замкнутость (15.6) множества \widehat{T} относительно действия отображения \widehat{S} следует из (15.7) и (15.8). \square

15.2. Связи между стабилизаторами. Из предложения 15.1 следует, что множества $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$ для всех $\rho = 1, 2, 3$ являются *стабилизаторами* (15.6) соответствующих отображений $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$. Из определения (15.1) вытекают следующие соотношения

$$\widehat{T}^1 = \widehat{T}^2 \neq \widehat{T}^3 \quad (15.9)$$

между указанными стабилизаторами

§16. СЕЧЕНИЯ СТАБИЛИЗАТОРА И РАЗБИЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

16.1. Сечения стабилизатора: общий случай. В этом пункте будут рассмотрены сечения

$$\widehat{T}_{s'} = \{\widehat{x} = (x, x') \in \widehat{T} : x' = s'\} \quad (16.1)$$

стабилизатора $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$ рода ρ из полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, определенного равенством (15.1).

Предложение 16.1. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ — отображение произвольного рода $\rho = 1, 2, 3$ с шириной полосы $d = |\widehat{W}|$, удовлетворяющей условию (15.5). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для любого $s' \in I$ сечение (16.1) представляет собою полуинтервал вида

$$\widehat{T}_{s'} = [\Omega - 1, \Omega), \quad (16.2)$$

где $1 \leq \Omega < 1 + d$.

2. Каноническое отображение

$$\widehat{T} \xrightarrow{\text{mod } \mathbb{Z}^2} \mathbb{T}^2 : \widehat{x} \mapsto \widehat{x} \text{ mod } \mathbb{Z}^2 \quad (16.3)$$

задает биекцию между стабилизаторами (15.1) и тором $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, где $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$ обозначает квадратную решетку с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ над кольцом \mathbb{Z} .

Доказательство. 1. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^1$ будет отображением первого рода (14.6) с вектором $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$, у которого вторая координата $\alpha' = 0$. Тогда непосредственно из определения (15.1) стабилизатора \widehat{T} следует, что любое его сечение $\widehat{T}_{s'}$ является полуинтервалом

$$\widehat{T}_{s'} = [\omega + g(s') + v_1, \omega + g(s') + v_0). \quad (16.4)$$

Так как по условию (14.2), (14.6) имеем $\omega = 1 - \alpha$, $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$, то из (16.4) получаем

$$\widehat{T}_{s'} = [g(s'), 1 + g(s')), \quad (16.5)$$

откуда следует первое утверждение (15.5). Далее, поскольку в равенстве (16.5) в качестве s' можно взять любое число и единичного полуинтервала I , то стабилизатор \widehat{T} будет разверткой тора \mathbb{T}^2 , т.е. — фундаментальной областью на плоскости \mathbb{R}^2 относительно решетки \mathbb{Z}^2 , что равносильно второму утверждению (16.3).

Пусть теперь вторая координата α' будет произвольной. В этом случае новый стабилизатор \widehat{T} получается из предыдущего сдвигом на вектор $(0, \alpha') \bmod 1$, и поэтому оба утверждению (16.2) и (16.3) остаются справедливыми.

2. Переходим к отображениям \widehat{S} второго \widehat{S}^2 и третьего \widehat{S}^3 рода (14.12) и (14.16). Если снова предположить $\alpha' = 0$, то возвращаемся к ранее рассмотренному случаю $\widehat{S} = \widehat{S}^1$ и, значит, стабилизатор \widehat{T} удовлетворяет требуемым утверждениям (16.2) и (16.3).

Если же вторая координата α' – произвольное число из полуинтервала I , то из ограничения (15.5) на ширину $d = |W|$ полосы \widehat{W} вытекает следующее утверждение. Для определенности предположим, что отображение $\widehat{S} = \widehat{S}^3$ удовлетворяет первому условию из определения (14.15). В этом случае стабилизатор \widehat{T} для $\alpha' \neq 0$ получается из стабилизатора \widehat{T}_* для $\alpha' = 0$, если целиком сдвинуть на вектор $(0, \alpha') \bmod 1$ полосу $[\theta_1 + v_0, \theta_2 + v_0) \times I$, содержащуюся внутри стабилизатора \widehat{T}_* . Очевидно, что при таком преобразовании сохраняются свойства (16.2) и (16.3).

В остальных случаях также сдвигается либо некоторая полоса, либо ее дополнение до стабилизатора \widehat{T}_* . Таким образом, доказываемые свойства (16.2) и (16.3) сохраняются.

Предложение 16.1 полностью доказано. \square

Замечание 16.1. Из предложения 15.1 следует, что стабилизаторы $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$ всех родов $\rho = 1, 2, 3$ являются *развертками* (16.3) тора \mathbb{T}^2 . Это позволяет поведение отображений $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ свести к отвечающим им отображениям на торе \mathbb{T}^2 .

16.2. Сечения стабилизатора первого рода. Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^1$ – отображение первого рода (14.6), \widehat{T}^1 – его стабилизатор (15.1). Выберем произвольную начальную точку \widehat{x}_0 из стабилизатора \widehat{T} и рассмотрим ее последовательные образы

$$\widehat{x}_j = (x_j, x'_j) = \widehat{S}^j(\widehat{x}_0) \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots \quad (16.6)$$

Согласно определению (14.7) вторая координата x'_j из (16.6) вычисляется по формуле

$$x'_j = x'_0 + j\alpha' \bmod 1 = \{x'_0 + j\alpha'\}.$$

Определим следующие значения

$$g_j = g_j(\hat{x}_0) = g(x'_j), \quad \omega_j = \omega + g_j, \quad (16.7)$$

где $g(x')$ – функция (14.3) и $\omega = 1 - \alpha$ начало полуинтервала $W = [\omega, \omega + d)$.

Найдем для стабилизатора \hat{T}^1 его горизонтальное сечение

$$\hat{T}_j^1 = \{ \hat{x} = (x, x') \in \hat{T}^1; \quad x' = x'_j \} \quad (16.8)$$

с номером j . Используя определение (15.1) стабилизатора \hat{T}^1 и предложение 16.1, можем представить сечение \hat{T}_j^1 в виде разбиения

$$\hat{T}_j^1 = \hat{T}_{j,0}^1 \sqcup \hat{T}_{j,1}^1 \quad (16.9)$$

на два полуинтервала разного цвета

$$\hat{T}_{j,0}^1 = [\omega_{j-1} + v_1, \omega_j), \quad \hat{T}_{j,1}^1 = [\omega_j, \omega_{j-1} + v_0). \quad (16.10)$$

Обозначим $\Omega_j = \omega_{j-1} + v_0$ правый конец второго полуинтервала из (16.10). С помощью (16.7) и (16.10) вычисляем

$$\Omega_j = \omega_{j-1} + v_0 = \omega + g_{j-1} + \alpha. \quad (16.11)$$

Подставляя вместо ω его значение $1 - \alpha$, получаем для Ω_j удобное представление

$$\Omega_j = 1 + g_{j-1} \quad (16.12)$$

через функцию $g(x')$. Чтобы вычислить начальную точку $\omega_{j-1} + v_1$ полуинтервала $\hat{T}_{j,0}^1$ из (16.10), воспользуемся соотношением $v_1 = v_0 - 1$, вытекающим из определения (14.7). Тогда из (16.11) находим

$$\omega_{j-1} + v_1 = \omega_{j-1} + v_0 - 1 = \Omega_j - 1.$$

Отсюда и (16.11) вытекает представление полуинтервалов из (16.10)

$$\hat{T}_{j,0}^1 = [\Omega_j - 1, \omega_j), \quad \hat{T}_{j,1}^1 = [\omega_j, \Omega_j) \quad (16.13)$$

через значение Ω_j , а следовательно, в силу (16.12) – только через функцию $g(x')$ и номер j сечения \hat{T}_j^1 .

Найдем длины $l_{j,0}^1 = |\hat{T}_{j,0}^1|$ и $l_{j,1}^1 = |\hat{T}_{j,1}^1|$ полуинтервалов $\hat{T}_{j,0}^1$ и $\hat{T}_{j,1}^1$ из (14.1). Прежде всего заметим, что из представления (16.10) следует соотношение

$$l_{j,0}^1 + l_{j,1}^1 = 1, \quad (16.14)$$

поэтому достаточно вычислить одну из длин. Имеем

$$l_{j,1}^1 = \Omega_j - \omega_j = (1 + g_{j-1}) - (1 - \alpha + g_j) = \alpha + g_{j-1} - g_j$$

или – иначе

$$l_{j,1}^1 = \alpha - \Delta_j, \quad (16.15)$$

где разность

$$\Delta_j = g_j - g_{j-1} \quad (16.16)$$

заклучена, согласно (14.3), в пределах

$$-d \leq \Delta_j \leq d.$$

Теперь из соотношения (16.14) и формулы (16.15) находим оставшуюся длину

$$l_{j,0}^1 = (1 - \alpha) + \Delta_j. \quad (16.17)$$

Определим *средние значения* длин $l_{j,0}^1$ и $l_{j,1}^1$ полуинтервалов $\widehat{T}_{j,0}^1$ и $\widehat{T}_{j,1}^1$, полагая

$$\langle l_{\text{col}}^1 \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j \leq N-1} l_{j,\text{col}}^1 \quad (16.18)$$

в случае, если предел (16.18) существует.

Предложение 16.2. *Средние значения (16.18) для $l_{j,0}^1$ и $l_{j,1}^1$ полуинтервалов $\widehat{T}_{j,0}^1$ и $\widehat{T}_{j,1}^1$ существуют и они соответственно равны*

$$\langle l_0^1 \rangle = 1 - \alpha, \quad \langle l_1^1 \rangle = \alpha. \quad (16.19)$$

Доказательство вытекает из формул (16.15), (16.17) и (16.16). \square

16.3. Разбиения окружности первого рода. Зададим

$$\widehat{T}^\rho \xrightarrow{\text{pr}} C : \quad \widehat{x} = (x, x') \mapsto x \bmod 1 \quad (16.20)$$

– *проекцию* стабилизатора произвольного рода $\rho = 0, 1, 2$ на единичную окружность C . Используя указанную проекцию, перенесем на окружность C разбиение (16.9). Получим

$$C_j^1(\widehat{x}_0) = C_{j,0}^1(\widehat{x}_0) \sqcup C_{j,1}^1(\widehat{x}_0), \quad (16.21)$$

при этом

$$C_{j,0}^1(\widehat{x}_0) = [g_{j-1}, \omega_j), \quad C_{j,1}^1(\widehat{x}_0) = [\omega_j, 1) \sqcup [0, g_{j-1}),$$

где $\omega_j = \omega + g_j$ в силу (16.7).

16.4. Сечения стабилизатора второго рода. Как было отмечено в замечании 3.1, стабилизаторы первого и второго рода совпадают

$\widehat{T}^1 = \widehat{T}^2$. Поэтому сечения стабилизатора \widehat{T}^2 тесно связаны с сечениями для \widehat{T}^1 . Чтобы явно записать эту связь, нам потребуется *функция распределения*

$$r(j; x_0, \Theta) = \#\{l; S^l(x_0) = x_0 + l\alpha \bmod 1 \in \Theta, l = 0, 1, \dots, j-1\} \quad (16.22)$$

и новый индекс

$$j' = r(j; x_0, \Theta), \quad (16.23)$$

следящий за попаданиями точек $x_0 + l\alpha \bmod 1$ в полуинтервал Θ .

С помощью указанного индекса определим следующие значения

$$g_{j'} = g_{j'}(\widehat{x}_0) = g(x'_{j'}), \quad \omega_{j'} = \omega + g_{j'}, \quad (16.24)$$

где $x'_{j'}$ вычисляется по формуле

$$x'_{j'} = x'_0 + j'\alpha' \bmod 1 = \{x'_0 + j'\alpha'\}. \quad (16.25)$$

Используя определение (15.1) стабилизатора \widehat{T}^2 , формулу (16.13) и индекс (16.23), можем записать сечение \widehat{T}^2_j в виде разбиения

$$\widehat{T}^2_j = \widehat{T}^2_{j,0} \sqcup \widehat{T}^2_{j,1} \quad (16.26)$$

на два полуинтервала

$$\widehat{T}^2_{j,0} = [g_{j'-1}, \omega_{j'}), \quad \widehat{T}^2_{j,1} = [\omega_{j'}, 1 + g_{j'-1}), \quad (16.27)$$

где $\omega_{j'} = \omega + g_{j'}$ в силу (16.24).

16.5. Разбиения окружности второго рода. Используя проекцию (16.20), перенесем на единичную окружность C разбиение (16.26) сечения стабилизатора \widehat{T}^2 и получим на окружности *разбиения рода 2*

$$C^2_j(\widehat{x}_0) = C^2_{j,0}(\widehat{x}_0) \sqcup C^2_{j,1}(\widehat{x}_0), \quad (16.28)$$

при этом

$$C^2_{j,0}(\widehat{x}_0) = [g_{j'-1}, \omega_{j'}), \quad C^2_{j,1}(\widehat{x}_0) = [\omega_{j'}, 1) \sqcup [0, g_{j'-1}),$$

где $\omega_{j'}$ такое же, как и в формулах (16.27). Сравнивая разбиения (16.21) и (16.28), получаем

Предложение 16.3. *Разбиения окружности C первого и второго рода связаны между собой равенством*

$$C^2_j(\widehat{x}_0) = C^1_{j'}(\widehat{x}_0), \quad (16.29)$$

где индекс j' вычисляется по формуле (16.23).

Из предложения 16.3 можно сделать вывод: разбиения второго рода $C_j^2(\hat{x}_0)$ при $j = 0, 1, 2, \dots$ пробегают все разбиения первого рода $C_j^1(\hat{x}_0)$, но с задержкой $j' \leq j$, т.е. разбиения второго рода состоят из повторяющихся разбиения первого рода.

16.6. Сечения стабилизатора третьего рода. Переходя к стабилизатору третьего рода \hat{T}^3 , будем, как и раньше в п. 2.3, предполагать выполненным ограничение

$$\Theta \cap [\omega, \omega + d) = \emptyset. \quad (16.30)$$

В данном случае согласно (15.9) стабилизатор \hat{T}^3 отличается от предыдущих $\hat{T}^1 = \hat{T}^2$ и далее мы увидим это на сечениях. Для их описания нам снова потребуется функция распределения $r(j; x_0, \Theta)$ из (16.22) и определяемая через нее перенормировка $j' = r(j; x_0, \Theta)$ индекса j .

Учитывая определение (15.1) стабилизатора \hat{T}^3 и формулу (16.26), можем записать сечение \hat{T}_j^3 в виде разбиения

$$\hat{T}_j^3 = \hat{T}_{j,0}^3 \sqcup \hat{T}_{j,1}^3 \quad (16.31)$$

на два полуинтервала

$$\hat{T}_{j,0}^3 = [g_{j'}, \omega_{j'}), \quad \hat{T}_{j,1}^3 = [\omega_{j'}, 1 + g_{j'}),$$

где точка деления $\omega_{j'} = \omega + g_{j'}$ полуинтервалов из (16.31) та же самая, что в формуле (16.26) для сечений второго рода \hat{T}_j^2 .

16.7. Разбиения окружности третьего рода. С помощью проекции (16.20) перенесем разбиение (16.31) на единичную окружность C и получим на ней *разбиения рода 3*

$$C_j^3(\hat{x}_0) = C_{j,0}^3(\hat{x}_0) \sqcup C_{j,1}^3(\hat{x}_0), \quad (16.32)$$

при этом

$$C_{j,0}^3(\hat{x}_0) = [g_{j'}, \omega_{j'}), \quad C_{j,1}^3(\hat{x}_0) = [\omega_{j'}, 1) \sqcup [0, g_{j'}).$$

Обозначим $I_\omega = [0, \omega)$ полуинтервал длины $|I_\omega| = 1 - \alpha$, $I'_\omega = [\omega, 1)$ дополнительный ему полуинтервал длины $|I'_\omega| = \alpha$, и составим из них разбиение

$$\mathbf{I}_\omega = I_\omega \sqcup I'_\omega \quad (16.33)$$

единичного полуинтервала $I = [0, 1)$. Из (16.32) следует представление полуинтервалов $C_{j,0}^3$ и $C_{j,1}^3$ в виде

$$C_{j,0}^3(\hat{x}_0) = I_\omega + g_{j'} \pmod{1}, \quad C_{j,1}^3(\hat{x}_0) = I'_\omega + g_{j'} \pmod{1}.$$

Таким образом, разбиения сечений третьего рода $C_j^3(\hat{x}_0)$ получаются

$$C_j^3(\hat{x}_0) = \mathbf{I}_\omega + g_{j'} \pmod{1} \quad (16.34)$$

из стационарного разбиения (16.33) поворотом его на угол $g_{j'} \pmod{1}$.

16.8. Отображения полосы и окружности. Для произвольного рода ρ ограничения отображений \hat{S}^ρ полосы $\widehat{\mathbb{R}}$ на стабилизатор \widehat{T}^ρ можно связать с поворотами S_α единичной окружности C , имеющую переменную окраску. Оказывается при таком переходе – и это важно при изучении неавтономных множеств ограниченного остатка – сохраняется цвет точек орбиты.

Предложение 16.4. 1. *Между разбиениями окружности (16.21), (16.28), (16.32) и разбиениями сечений стабилизатора (16.9), (16.26), (16.31) произвольного рода $\rho = 0, 1, 2$ имеют место соотношения*

$$C_j^\rho(\hat{x}_0) \equiv \widehat{T}_j^\rho \pmod{1} \quad (16.35)$$

для всех $j = 0, 1, 2, \dots$

2. Пусть

$$C \xrightarrow{S} C : x \mapsto x + \alpha \pmod{1} \quad (16.36)$$

– вращение окружности $S = S_\alpha$ на угол α , равный первой координате вектора $\hat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$, $\text{pr} : \widehat{T}^\rho \rightarrow C$ – проекция стабилизатора (16.20) на окружность C , и пусть $\hat{S}^\rho : \widehat{T}^\rho \rightarrow \widehat{T}^\rho$ – ограничение отображения рода ρ на его стабилизатор. Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}^\rho & \xrightarrow{\hat{S}^\rho} & \widehat{T}^\rho \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ C & \xrightarrow{S} & C \end{array} \quad (16.37)$$

3. В частности, выполняются сравнения

$$x_j \equiv S_\alpha^j(x_0) \pmod{1}, \quad (16.38)$$

где $x_j = \text{pr}(\hat{x}_j)$ – проекции образов соответствующих точек

$$\hat{x}_j = (x_j, x'_j) = \widehat{S}^j(\hat{x}_0) \quad (16.39)$$

относительно отображения $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ и $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ – произвольная начальная точка из стабилизатора \widehat{T}^ρ . Кроме того, при проектировании на окружность (16.37) выполняется согласование цветов точек

$$\text{col}(x_j) = \text{col}(\widehat{x}_j) \quad (16.40)$$

для всех $j = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство непосредственно вытекает из определений (14.6), (14.12), (14.16) отображений \widehat{S}^ρ и построений (16.21), (16.28), (16.32) разбиений окружности $C_j^\rho(\widehat{x}_0)$. \square

§17. ГРАНИЦЫ ОТКЛОНЕНИЙ НА СТАБИЛИЗАТОРЕ

17.1. Орбиты на стабилизаторе \widehat{T} . Пусть $\widehat{S} = \widehat{S}^\rho$ – отображение произвольного рода и $\widehat{T} = \widehat{T}^\rho$ – отвечающий ему стабилизатор в полосе \mathbb{R} . Рассмотрим орбиту

$$\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S}) = \{\widehat{x}_i = \widehat{S}^i(\widehat{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (17.1)$$

начальной точки $\widehat{x}_0 \in \widehat{T}$ относительно отображения \widehat{S} . Обозначим

$$x(\widehat{x}_i) = x_i \quad (17.2)$$

для точки $\widehat{x}_i = (x_i, x'_i)$. Согласно определению (14.6), (14.12), (14.16) отображения \widehat{S} , координату x_i любой точки \widehat{x}_i орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$ можем записать в виде

$$x_i = x(\widehat{S}^i(\widehat{x}_0)) = x_0 + \sum_{0 \leq j < i} v_{\text{col}(\widehat{x}_j)}, \quad (17.3)$$

где сдвиги v_k заданы (14.7) равенствами $v_0 = \alpha$, $v_1 = \alpha - 1$ для некоторого $\alpha \neq 0$ из единичного полуинтервала $I = [0, 1)$.

Для $\text{col} = 0, 1$ определим функции распределения

$$\widehat{r}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0) = \#\{j; \quad \widehat{S}^j(\widehat{x}_0) \in \widehat{T}_{\text{col}}, \quad 0 \leq j < i\}, \quad (17.4)$$

т.е. $\widehat{r}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0)$ равно количеству точек $\widehat{x}_j = \widehat{S}^j(\widehat{x}_0)$ для $0 \leq j < i$ из орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$, имеющих цвет $\text{col}(\widehat{x}_j) = \text{col}$. Используя такие функции, можем переписать равенство (17.3) в свернутом виде

$$x_i = x(\widehat{S}^i(\widehat{x}_0)) = x_0 + \widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0)v_0 + \widehat{r}_1(i, \widehat{x}_0)v_1. \quad (17.5)$$

В силу определения (17.4) и условия (15.6) между функциями распределения $\widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0)$ и $\widehat{r}_1(i, \widehat{x}_0)$ существует очевидная связь

$$\widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0) + \widehat{r}_1(i, \widehat{x}_0) = i \quad (17.6)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

17.2. Функции отклонения на стабилизаторе \widehat{T} . Выражая из (17.6) функцию $\widehat{r}_1(i, \widehat{x}_0)$ через $\widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0)$ и подставляя ее значение в равенство (17.5), получаем

$$x_i = x(\widehat{S}^i(\widehat{x}_0)) = x_0 + \widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0) + iv_1, \quad (17.7)$$

так как по условию $v_0 - v_1 = 1$. Введем дополнительные функции

$$\widehat{\delta}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0) = \widehat{r}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0) - ia_{\text{col}} \quad (17.8)$$

для $\text{col} = 0, 1$ с коэффициентами $a_0 = -v_1$ и $a_1 = v_0$, которые, вспоминая условие из (14.7), удобно выразить через один параметр

$$a_0 = 1 - \alpha, \quad a_1 = \alpha. \quad (17.9)$$

Из (17.6), (17.9) и определения (17.8) вытекает, что между функциями $\widehat{\delta}_0(i, \widehat{x}_0)$ и $\widehat{\delta}_1(i, \widehat{x}_0)$ имеет место соотношение

$$\widehat{\delta}_0(i, \widehat{x}_0) + \widehat{\delta}_1(i, \widehat{x}_0) = 0 \quad (17.10)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Соотношение (17.10) является аналогом соотношения (17.6) для функций распределения $\widehat{r}_0(i, \widehat{x}_0)$ и $\widehat{r}_1(i, \widehat{x}_0)$. Далее мы увидим, что значение функции $\widehat{\delta}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0)$ равно *отклонению* числа $\widehat{r}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0)$ точек $\widehat{x}_j = \widehat{S}^j(\widehat{x}_0)$, $0 \leq j < i$, из орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$, имеющих цвет $\text{col}(\widehat{x}_j) = \text{col}$, от ожидаемого среднего значения ia_{col} , где коэффициент a_{col} равен частоте точек $\widehat{x}_j \in \text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$ цвета $\text{col}(\widehat{x}_j) = \text{col}$.

Лемма 17.1. *Для функций отклонений $\widehat{\delta}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0)$, $\text{col} = 0, 1$, определенных в (17.8), выполняются следующие формулы:*

$$\widehat{\delta}_0(i, \widehat{x}_0) = x_i - x_0, \quad \widehat{\delta}_1(i, \widehat{x}_0) = x_0 - x_i, \quad (17.11)$$

где $x_i = x(\widehat{x}_i)$ — первая координата текущей точки $\widehat{x}_i = \widehat{S}^i(\widehat{x}_0) = (x_i, x'_i)$ из орбиты $\text{Orb}(\widehat{x}_0, \widehat{S})$ с номером $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Подставим значение (17.8) функции отклонения $\widehat{\delta}_0(i, \widehat{x}_0)$ в равенство (17.7) и получим первое равенство из (17.11). Второе же равенство вытекает из соотношения (17.10). \square

Из леммы 17.1 вытекает

Теорема 17.1. Пусть \widehat{T} – стабилизатор отображения \widehat{S} из предложения 16.4, $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ – произвольная начальная точка из \widehat{T} .

Тогда отклонения $\widehat{\delta}_{\text{col}}(i, \widehat{x}_0)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} m(\widehat{T}) - x_0 &\leq \widehat{\delta}_0(i, \widehat{x}_0) \leq M(\widehat{T}) - x_0, \\ x_0 - M(\widehat{T}) &\leq \widehat{\delta}_1(i, \widehat{x}_0) \leq x_0 - m(\widehat{T}) \end{aligned} \quad (17.12)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Здесь через $m(\widehat{T})$ и $M(\widehat{T})$ обозначили граничные значения

$$m(\widehat{T}) = \inf_{\widehat{x} \in \widehat{T}} x(\widehat{x}), \quad M(\widehat{T}) = \sup_{\widehat{x} \in \widehat{T}} x(\widehat{x}), \quad (17.13)$$

где $x(\widehat{x}) = x$ для точки $\widehat{x} = (x, x')$ из стабилизатора \widehat{T} . \square

§18. ФУНКЦИИ ОТКЛОНЕНИЯ НА ОКРУЖНОСТИ И НЕАВТОНОМНЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

18.1. Функции отклонения на окружности. Используя разбиение (16.21), (16.28), (16.32) окружности C рода ρ

$$C_j^\rho(\widehat{x}_0) = C_{j,0}^\rho(\widehat{x}_0) \sqcup C_{j,1}^\rho(\widehat{x}_0) \quad (18.1)$$

определим функцию распределения

$$r_{\text{col}}^\rho(i; \widehat{x}_0) = \#\{j; \{x_j\} \in C_{j,\text{col}}^\rho(\widehat{x}_0), j = 0, 1, \dots, i-1\} \quad (18.2)$$

для последовательности точек x_i из орбиты

$$\text{Orb}(x_0, S) = \{x_i = S^i(x_0) \equiv x_0 + i\alpha \pmod{1}; i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (18.3)$$

начальной точки $x_0 \in C$ относительно вращения $S = S_\alpha$ окружности C на угол α (см. (16.36)). Обозначим

$$\delta_{\text{col}}^\rho(i; \widehat{x}_0) = r_{\text{col}}^\rho(i; \widehat{x}_0) - a_{\text{col}}i \quad (18.4)$$

функцию отклонения с коэффициентами a_{col} , определенными в (17.9).

Теорема 18.1. Если ширина d полосы \widehat{W} удовлетворяет условию (15.5), то для любой начальной точки $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ из стабилизатора \widehat{T}^ρ рода $\rho = 1, 2, 3$ функции отклонений $\delta_{\text{col}}^\rho(i; \widehat{x}_0)$ из (18.4) меняются в интервалах

$$\begin{aligned} -x_0 &\leq \delta_0^\rho(i; \widehat{x}_0) \leq 1 + d - x_0 \\ -1 - d + x_0 &\leq \delta_1^\rho(i; \widehat{x}_0) \leq x_0 \end{aligned} \quad (18.5)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Согласно формуле (16.40) из предложения 16.4 между функциями распределения (18.2) и (17.4) имеется связь

$$r_{\text{col}}^{\rho}(i; \hat{x}_0) = \hat{r}_{\text{col}}(i, \hat{x}_0). \quad (18.6)$$

Тогда из равенства (18.6) и определений функций отклонений (18.4) и (17.8) также будет выполняться равенство

$$\delta_{\text{col}}^{\rho}(i; \hat{x}_0) = \hat{\delta}_{\text{col}}(i, \hat{x}_0). \quad (18.7)$$

В силу теоремы 17.1 отклонения $\hat{\delta}_{\text{col}}(i, \hat{x}_0)$ удовлетворяют неравенствам (17.12), из которых и (18.7) будут следовать требуемые неравенства (18.5). Для этого достаточно заметить, что граничные значения $m(\hat{T})$ и $M(\hat{T})$ для разверток \hat{T} произвольного рода удовлетворяют неравенствам

$$m(\hat{T}) \geq 0, \quad M(\hat{T}) \leq 1 + d. \quad (18.8)$$

□

18.2. Уточнение границ для функций отклонения. Неравенства (18.8) можно уточнить, если воспользоваться функцией $g(x')$. При доказательстве неравенства (18.8) мы использовали лишь границы (14.3) изменения функции $g(x')$, и поэтому указанная функция не фигурирует явно в формулировке теоремы 18.1. Однако, заметим, что граничные значения $m(\hat{T})$ и $M(\hat{T})$ для разверток \hat{T} представимы в виде равенств

$$m(\hat{T}) = m_g, \quad M(\hat{T}) = M_g, \quad (18.9)$$

где

$$m_g = \inf_{x' \in I} g(x'), \quad M_g = \sup_{x' \in I} g(x'). \quad (18.10)$$

Если теперь неравенства (18.8) в доказательстве теоремы 18.1 заметить на (18.9), то получим усиление оценок (18.5):

$$\begin{aligned} -x_0 + m_g &\leq \delta_0^{\rho}(i; \hat{x}_0) \leq 1 + M_g - x_0 \\ -1 - M_g + x_0 &\leq \delta_1^{\rho}(i; \hat{x}_0) \leq x_0 - m_g \end{aligned} \quad (18.11)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

18.3. Неавтономные множества ограниченного остатка. Далее нас будут интересовать не отдельные j -разбиения $C_j^{\rho}(\hat{x}_0)$, а вся их последовательная совокупность

$$C^{\rho}(\hat{x}_0) = \{C_j^{\rho}(\hat{x}_0); \quad j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (18.12)$$

с разделением ее на последовательности множеств двух различных цветов

$$\begin{aligned} C_0^\rho(\hat{x}_0) &= \{C_{j,0}^\rho(\hat{x}_0); \quad j = 0, 1, 2, \dots\}, \\ C_1^\rho(\hat{x}_0) &= \{C_{j,1}^\rho(\hat{x}_0); \quad j = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Функция $r_{\text{col}}^\rho(j; \hat{x}_0)$, определенная в (18.2), характеризует распределение точек x_l из орбиты $\text{Orb}(x_0, S)$ по множествам точек

$$C_{0,\text{col}}^\rho(\hat{x}_0), \quad C_{1,\text{col}}^\rho(\hat{x}_0), \quad C_{2,\text{col}}^\rho(\hat{x}_0), \dots \in C_{\text{col}}^\rho(\hat{x}_0) \quad (18.13)$$

из последовательности (18.12), окрашенных в какой-то фиксированный цвет $\text{col}(x_l) = 0$ или 1 . Если номер итерации $j = 0, 1, 2, \dots$ в (18.13) интерпретировать, как параметр времени, то видим, что множества $C_{j,\text{col}}^\rho(\hat{x}_0) \subseteq C$ могут изменяться со временем, т.е. зависят от времени j . Поэтому последовательности $C_{\text{col}}^\rho(\hat{x}_0)$ из (18.12) являются *неавтономными множествами*. В силу доказанной теоремы 18.1 их можно назвать *неавтономными множествами ограниченного остатка* относительно поворота $S = S_\alpha$ единичной окружности C .

18.4. Среднее значение отклонений для отображений первого рода. Используя каноническое отображение (16.3) из предложения 16.1, с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \hat{T}^\rho & \xrightarrow{\hat{S}^\rho} & \hat{T}^\rho \\ \text{mod } \mathbb{Z}^2 & \downarrow & \downarrow \text{mod } \mathbb{Z}^2 \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{S^\rho} & \mathbb{T}^2 \end{array} \quad (18.14)$$

зададим отображение S^ρ тора \mathbb{T}^2 . В случае отображений первого рода \hat{S}^1 , согласно определению (14.6), отображение $S^1 = S_{\mathbf{a}}$ из диаграммы (18.14) будет

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{S_{\mathbf{a}}} \mathbb{T}^2 : \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a} \text{ mod } \mathbb{Z}^2 \quad (18.15)$$

сдвигом тора на вектор $\mathbf{a} \equiv (\alpha, \alpha') \text{ mod } \mathbb{Z}^2$.

Определим для функции отклонения $\delta_{\text{col}}(i, \hat{x}_0) = \delta_{\text{col}}^1(i, \hat{x}_0)$, введенной в (18.4), ее *среднее значение*

$$\langle \delta_{\text{col}}(\hat{x}_0) \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{0 \leq i \leq N-1} \delta_{\text{col}}(i, \hat{x}_0) \quad (18.16)$$

в случае, если предел (18.16) существует.

Предположим, что в определении (14.6) отображения \hat{S}^1 вектор $\hat{\mathbf{a}} = (\alpha, \alpha')$ будет *иррациональным*, т.е. числа $\alpha, \alpha', 1$ линейно независимы над кольцом целых чисел \mathbb{Z} .

Кроме того, пусть определенный в (15.1) стабилизатор \widehat{T}^1 будет квадрируемой областью. Тогда по критерию Вейля [25] и лемме 17.1 можем записать

$$\langle \delta_0(\widehat{x}_0) \rangle = \int \widehat{T}^1 x dx dx' - x_0, \quad \langle \delta_1(\widehat{x}_0) \rangle = x_0 - \int \widehat{T}^1 x dx dx'. \quad (18.17)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int \widehat{T}^1 x dx dx' &= \int_0^1 \left(\int_{g(x'-\alpha')}^{1+g(x'-\alpha')} x dx \right) dx' \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + g(x'-\alpha') \right) dx' \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 g(x'-\alpha') dx'. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Так как по условию (15.1) функция $g(x')$ периодическая mod 1, то последний интеграл можем преобразовать к виду

$$\int_0^1 g(x'-\alpha') dx' = \int_0^1 g(x') dx'$$

и поэтому интеграл (18.18) равен

$$\int \widehat{T}^1 x dx dx' = \frac{1}{2} + \int_0^1 g(x') dx' = \frac{1}{2} + \langle g \rangle, \quad (18.19)$$

где

$$\langle g \rangle = \int_0^1 g(x') dx' \quad (18.20)$$

– среднее значение функции $g(x')$ на отрезке $[0, 1]$.

Из построения (15.1) стабилизатора \widehat{T}^1 следует, что область \widehat{T}^1 квадрируема тогда и только тогда, когда периодическая функция $g(x')$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$. Для этого, в частности, достаточно потребовать непрерывности функции $g(x')$.

Теорема 18.2. Пусть \widehat{S}^1 – отображение первого рода (14.6) полосы $\widehat{\mathbb{R}}$, $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$ – иррациональный вектор и периодическая функция $g(x')$ из (14.3) интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$. Тогда для любой начальной точки $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ из стабилизатора \widehat{T}^1 определенные в (18.16) средние значения $\langle \delta_k(\widehat{x}_0) \rangle$, $k = 0, 1$, существуют и вычисляются по формулам

$$\langle \delta_0(\widehat{x}_0) \rangle = \frac{1}{2} + \langle g \rangle - x_0, \quad \langle \delta_1(\widehat{x}_0) \rangle = -\frac{1}{2} - \langle g \rangle + x_0, \quad (18.21)$$

где $\langle g \rangle$ обозначает среднее значение (18.20) функции $g(x')$.

Доказательство вытекает из определения (18.16) и равенств (18.17) и (18.19). \square

18.5. Двойные сдвиги тора. Согласно предложению 16.1 и коммутативной диаграмме (18.14), ограничение отображения первого рода \widehat{S}^1 на стабилизатор \widehat{T}^1 изоморфно сдвигу $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_{\mathbf{a}}$ тора \mathbb{T}^2 на вектор $\mathbf{a} \equiv (\alpha, \alpha') \pmod{\mathbb{Z}^2}$. Для отображений второго и третьего рода $\widehat{S}^2, \widehat{S}^3$ соответствующие отображения $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3$ будут *двойными сдвигами* или по-другому – *перекладываниями* тора \mathbb{T}^2 . Относительно таких отображений известно совсем немного (см., например, [26] и [27]). В частности, нет проверяемого критерия равномерности их орбит, необходимого для распространения теоремы 18.2 на отображения $\widehat{S}^2, \widehat{S}^3$.

§19. ВЫРОЖДЕННЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

19.1. Периодические множества ограниченного остатка. В этом пункте рассмотрим отображение первого рода \widehat{S}^1 с неиррациональным вектором сдвига $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$ вектор с произвольной первой координатой α и второй $\alpha' = \frac{1}{2}$, а в качестве $g(x')$ – периодическую функцию

$$g(x') = \begin{cases} d, & \text{если } x' \pmod{1} \in [0, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{если } x' \pmod{1} \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \quad (19.1)$$

Если при этих условиях за начальную взять точку $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ с координатами $x_0 \in [0, 1)$ и $x'_0 = 0$, то используя формулу (16.10), можем представить сечения $\widehat{T}_j^1(\widehat{x}_0)$ стабилизатора \widehat{T}^1 для $j = 0, 1, 2, \dots$ в виде разбиений

$$\widehat{T}_j^1(\widehat{x}_0) = \widehat{T}_{j,0}^1(\widehat{x}_0) \sqcup \widehat{T}_{j,1}^1(\widehat{x}_0) \quad (19.2)$$

на два полуинтервала разного цвета

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{j,0}^1(\widehat{x}_0) &= [0, \omega + d), & \widehat{T}_{j,1}^1(\widehat{x}_0) &= [\omega + d, 1) & \text{для } j \equiv 0 \pmod{2}, \\ \widehat{T}_{j,0}^1(\widehat{x}_0) &= [d, \omega), & \widehat{T}_{j,1}^1(\widehat{x}_0) &= [\omega, 1 + d) & \text{для } j \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Соответствующие (19.2) разбиения окружности

$$C_j^1(\widehat{x}_0) = C_{j,0}^1(\widehat{x}_0) \sqcup C_{j,1}^1(\widehat{x}_0), \quad (19.3)$$

получающиеся из сравнений

$$C_{j,\text{col}}^1(\widehat{x}_0) \equiv \widehat{T}_{j,\text{col}}^1(\widehat{x}_0) \pmod{1},$$

где индекс $\text{col} = 0, 1$ обозначает цвет, будут состоять из следующих дуг разного цвета

$$\begin{aligned} C_{j,0}^1(\widehat{x}_0) &= [0, \omega + d), & C_{j,1}^1(\widehat{x}_0) &= [\omega + d, 1) & \text{для } j \equiv 0 \pmod{2}, \\ C_{j,0}^1(\widehat{x}_0) &= [d, \omega), & C_{j,1}^1(\widehat{x}_0) &= [\omega, 1) \sqcup [0, d) & \text{для } j \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Таким образом, мы видим, что в рассматриваемом случае последовательность разбиений окружности

$$C^1(\widehat{x}_0) = \{C_j^1(\widehat{x}_0); \quad j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (19.5)$$

состоит из двух чередующихся разбиений вида $C_j^1(\widehat{x}_0) = C_0^1(\widehat{x}_0)$ или $C_1^1(\widehat{x}_0)$ для итераций $j \equiv 0$ или $1 \pmod{2}$ соответственно.

Обозначим

$$x_l = S^l(x_0) = x_0 + l\alpha$$

и определим функции распределения

$$r_{\text{col}}^1(j; x_0) = \#\left\{ 0 \leq l \leq j-1; \{x_l\} \in \begin{cases} C_{0,\text{col}}^1(\widehat{x}_0), & \text{если } l \equiv 0 \pmod{2}, \\ C_{1,\text{col}}^1(\widehat{x}_0), & \text{если } l \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \right\}$$

для $\text{col} = 0, 1$ и отвечающие им функции отклонений

$$\delta_{\text{col}}^1(j; x_0) = r_{\text{col}}^1(j; x_0) - a_{\text{col}}j \quad (19.6)$$

с нормирующими коэффициентами $a_0 = 1 - \alpha$ и $a_1 = \alpha$.

Теорема 19.1. Пусть $x_0 \in [0, 1)$ и $\alpha \in [0, 1)$ – любые числа, и пусть ширина d полосы \widehat{W} удовлетворяет условию (15.5). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Функции отклонений (19.6) меняются в интервалах

$$\begin{aligned} -x_0 &\leq \delta_0^1(j; x_0) \leq 1 + d - x_0, \\ -1 - d + x_0 &\leq \delta_1^1(j; x_0) \leq x_0 \end{aligned} \quad (19.7)$$

для всех $j = 0, 1, 2, \dots$

2. Если при этом α будет иррациональным числом, то средние значения отклонений (18.16) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \langle \delta_0^1(j; x_0) \rangle &= 1/2 + d/2 - x_0, \\ \langle \delta_1^1(j; x_0) \rangle &= -1/2 - d/2 + x_0. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Доказательство. Первое утверждение является частным случаем теоремы 18.1. Доказательство же второго утверждения получается по аналогичной схеме из теоремы 18.2, так как снова можно применить

критерий Вейля [25], поскольку в силу иррациональности α орбита отображения первого рода \widehat{S}^1 равномерно распределена на стабилизаторе \widehat{T}^1 . Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть двукратное отображение $(\widehat{S}^1)^2$ с вектором $2\widehat{\alpha} = (\{2\alpha\}, 0)$. \square

19.2. Квазипериодические множества ограниченного остатка. Теперь рассмотрим отображение третьего рода \widehat{S}^3 , определенное в (14.16) для полуинтервала $\Theta = [\theta_1, \theta_2)$, где $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \omega$. Как и в предыдущем пункте, выберем неиррациональный вектор сдвига $\widehat{\alpha} = (\alpha, \alpha')$ с координатой $\alpha' = \frac{1}{2}$, начальную точку $\widehat{x}_0 = (x_0, x'_0)$ с координатами $x_0 \in [0, 1)$ и $x'_0 = 0$, а определение периодической функции $g(x')$ несколько изменим

$$g(x') = \begin{cases} 0, & \text{если } x' \bmod 1 \in [0, \frac{1}{2}), \\ d, & \text{если } x' \bmod 1 \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases} \quad (19.9)$$

Используя формулу (16.31), можем представить сечения $\widehat{T}_j^3(\widehat{x}_0)$ стабилизатора \widehat{T}^3 для $j = 0, 1, 2, \dots$ в виде разбиений

$$\widehat{T}_j^3(\widehat{x}_0) = \widehat{T}_{j,0}^3(\widehat{x}_0) \sqcup \widehat{T}_{j,1}^3(\widehat{x}_0) \quad (19.10)$$

на два полуинтервала разного цвета

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{j,0}^3(\widehat{x}_0) &= [0, \omega), & \widehat{T}_{j,1}^3(\widehat{x}_0) &= [\omega, 1) & \text{для } j' \equiv 0 \pmod{2}, \\ \widehat{T}_{j,0}^3(\widehat{x}_0) &= [d, \omega + d), & \widehat{T}_{j,1}^3(\widehat{x}_0) &= [\omega + d, 1 + d) & \text{для } j' \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

В отличие от (19.2), здесь в (19.10) номер итерации j' определяется по формуле $j' = r(j; x_0, \Theta)$ через функцию распределения (16.23) с полуинтервалом $\Theta = [\theta_1, \theta_2)$, где $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \omega$.

Соответствующие (19.10) разбиения окружности

$$C_j^3(\widehat{x}_0) = C_{j,0}^3(\widehat{x}_0) \sqcup C_{j,1}^3(\widehat{x}_0), \quad (19.11)$$

получающиеся из сравнений $C_{j,\text{col}}^3(\widehat{x}_0) \equiv \widehat{T}_{j,\text{col}}^3(\widehat{x}_0) \bmod 1$, где индекс $\text{col} = 0, 1$ обозначает цвет, будут состоять из следующих дуг разного цвета

$$\begin{aligned} C_{j,0}^3(\widehat{x}_0) &= [0, \omega), & C_{j,1}^3(\widehat{x}_0) &= [\omega, 1) & \text{для } j' \equiv 0 \pmod{2}, \\ C_{j,0}^3(\widehat{x}_0) &= [d, \omega + d), & C_{j,1}^3(\widehat{x}_0) &= [\omega + d, 1) \sqcup [0, d) & \text{для } j' \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned}$$

В данном случае последовательность разбиений окружности

$$C^3(\widehat{x}_0) = \{C_j^3(\widehat{x}_0); \quad j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (19.12)$$

снова состоит из двух чередующихся разбиений, но теперь смена типа разбиения определяется условием $j' \equiv 0$ или $1 \pmod{2}$ соответственно. Если α иррационально, то указанное изменение происходит квазипериодическим образом.

Чтобы явным образом выразить смену типов разбиений в зависимости от номера итерации j , введем дополнительные обозначения для основных разбиений окружности

$$C_0^3 = C_{0,0}^3 \sqcup C_{0,1}^3, \quad C_1^3 = C_{1,0}^3 \sqcup C_{1,1}^3, \quad (19.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_{0,0}^3 &= [0, \omega), & C_{0,1}^3 &= [\omega, 1), \\ C_{1,0}^3 &= [d, \omega + d), & C_{1,1}^3 &= [\omega + d, 1) \sqcup [0, d). \end{aligned}$$

Из (19.13) следует, что разбиение C_1^3 получается поворотом

$$C_1^3 \equiv C_0^3 + d \pmod{1} \quad (19.14)$$

разбиения C_0^3 на угол d .

Для $\text{col} = 0, 1$ определим функции распределения

$$r_{\text{col}}^3(j; x_0) = \# \left\{ 0 \leq l \leq j-1; \{x^l\} \in \begin{cases} C_{0,\text{col}}^3, & \text{если } l' \equiv 0 \pmod{2}, \\ C_{1,\text{col}}^3, & \text{если } l' \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \right\}$$

где $x_l = S^l(x_0) = x_0 + l\alpha$, и отвечающие им функции отклонений

$$\delta_{\text{col}}^3(j; x_0) = r_{\text{col}}^3(j; x_0) - a_{\text{col}}j \quad (19.15)$$

с теми же нормирующими коэффициентами a_0 и a_1 , что и в формуле (19.6).

Теорема 19.2. Пусть $x_0 \in [0, 1)$ и $\alpha \in [0, 1)$ – любые числа, и пусть d удовлетворяет условию (15.5). Тогда функции отклонений (19.15) меняются в интервалах

$$\begin{aligned} -x_0 &\leq \delta_0^3(j; x_0) \leq 1 + d - x_0, \\ -1 - d + x_0 &\leq \delta_1^3(j; x_0) \leq x_0 \end{aligned} \quad (19.16)$$

для $j = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Неравенства (19.16) являются частным случаем неравенств (18.5) из теоремы 18.1. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins.* — Math. Sem. Hamburg Univ. **1** (1921), 54–76.
2. R. Szüsz, *Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **5** (1954), 35–39.
3. В. Г. Журавлев, *Вложение круговых орбит и распределение дробных долей.* — Алгебра и анализ **26** (2014), No. 6, 29–68.
4. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей.* Алгебра и анализ **24** (2012), No. 1, 95–130.
5. В. Г. Журавлев, *Переключающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
6. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка на двулистной накрывающей бутылки Клейна.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **429** (2014), 82–105.
7. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН. Сер. матем. **71** (2007), No. 2, 287–321.
8. В. Г. Журавлев, *Двухцветные повороты единичной окружности.* Изв. РАН, Сер. матем., **73** (2009), No. 1, 79–120.
9. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, *Совр. пробл. матем.*, **16**, Мат. ин-т РАН, М., (2012), 82–102.
10. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка относительно переключаиваний тора.* — Алгебра и анализ **27** (2015), No. 2, 96–131.
11. В. Г. Журавлев, *Разбиения Розы и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
12. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés.* — Sémin. théor. nombres Bordeaux (1984), exp. 24.
13. А. А. Абросимова, *Средние значения отклонений для распределения точек на торе.* — Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика **124** (2012), No. 5, Вып. 26, 5–Ц11.
14. А. В. Шутов, *Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка.* — Чебышевский сб. **12** (2011), Вып. 4, 264–271.
15. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
16. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ (2016) (наст. сборник).
17. S. Ferenczi, *Bounded Remainder Sets.* — Acta Arithm. **61** (1992), No. 4, 319–326.
18. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* — М., 1953.
19. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, Т. 2. — Киев, 1952.
20. В. Г. Журавлев, *Многоцветные динамические разбиения торов на множества ограниченного остатка.* — Изв. РАН, сер. матем. **79** (2015), No. 5, 65–102.
21. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория.* — М., 1980.
22. M. Boshernitzan, I. Kornfeld, *Interval translation mappings.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), 821–831.

23. H. Suzuki, S. Ito, K. Aihara, *Double rotations*. — The University of Tokio, Bunkyo-Ku, Tokyo **113-8656** (2003), METR 2003-13, 1-23.
24. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи и индуцированные двуцветные повороты единичной окружности*. — Изв. РАН, сер. матем. **74** (2010), No. 2, 65–108.
25. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins*. — Math. Ann. **77** (1916), 313–352.
26. H. Haller, *Rectangle exchange transformations*. — Monatsh. Math. **91** (1981), No. 3, 215–232.
27. J. Athreya, M. Boshernitzan, *Ergodic properties of compositions of interval exchange maps and rotations*. — Nonlinearity **26** (2013), No. 2, 417–423.

Zhuravlev V. G. Bounded remainder sets.

We consider the category $(\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{X})$ consisting of transformations $\mathcal{S} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ of spaces \mathcal{T} with distinguished subsets $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$. Let $r_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ be the distribution function of points from the \mathcal{S} -orbit $x_0, x_1 = \mathcal{S}(x_0), \dots, x_{i-1} = \mathcal{S}^{i-1}(x_0)$ got in \mathcal{X} , and a deviation $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0)$ be defined by the equation

$$r_{\mathcal{X}}(i, x_0) = a_{\mathcal{X}}i + \delta_{\mathcal{X}}(i, x_0),$$

where $a_{\mathcal{X}}i$ is the average value. If $\delta_{\mathcal{X}}(i, x_0) = O(1)$ then such \mathcal{X} are called bounded remainder sets. In this article the bounded remainder sets \mathcal{X} are built in the following cases: 1) the space \mathcal{T} is a circle, a torus or a Klein bottle; 2) the map \mathcal{S} is a rotation of the circle, a shift or an exchange transformation of the torus; 3) the \mathcal{X} is a fixed subset $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}$ or a sequence of subsets depending on the iteration step $i = 0, 1, 2, \dots$

Владимирский государственный университет,
Владимир, Россия

Поступило 16 января 2016 г.

E-mail: vzhuravlev@mail.ru