

В. Г. Журавлев

**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ
РАЗБИЕНИЙ ТОРА И МНОГОМЕРНЫЕ
ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ**

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Перекладывающиеся развертки тора. Разверткой T тора $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D/L$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ – полная решетка в \mathbb{R}^D , называется подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$, получающееся подъемом тора \mathbb{T}_L^D в пространство \mathbb{R}^D через биекцию

$$T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_L^D : x \mapsto x \bmod L. \quad (0.1)$$

Развертка T будет перекладывающейся, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (0.2)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (0.3)$$

на векторы v_0, \dots, v_D , связанные с базисом решетки L равенствами $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \dots, D$. Здесь $\text{col}(x) = k$ обозначает цвет точек x , принадлежащих подмножеству T_k .

В силу существования биекции (0.1) множество T можно отождествить с тором \mathbb{T}_L^D . Тогда перекладывание (0.3) будет эквивалентно сдвигу $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \quad (0.4)$$

тора T на вектор $\alpha' \equiv v_0 \bmod L$.

Ключевые слова: перекладывания тора, индуцированные разбиения, наилучшие многомерные приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант 14-11-00433.

0.2. Вкладывающиеся в тор развертки. Пусть дан еще тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D = \mathbb{R}^D / \mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$ и на нем определен

$$\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \xrightarrow{S} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D : x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathcal{L}} \quad (0.5)$$

сдвиг $S = S_\alpha$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Скажем, что перекладывающаяся развертка T из (0.2) вкладывается

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (0.6)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются условия:

1) развертка $T \subset \mathbb{R}^D$ допускает вложение $T \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в качестве его подмножества, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \pmod{\mathcal{L}}$, следует их равенство $x = y$;

2) перекладывание (0.3) или сдвиг тора (0.4) являются индуцированными отображениями (отображениями первого возвращения, отображением Пуанкаре)

$$S' = S|_T$$

для сдвига тора S .

0.3. Индуцированные разбиения тора и ядро. Вкладывающаяся в тор (0.6) развертка T порождает индуцированное разбиение

$$T = \mathcal{T}|_T = \mathcal{T}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D \quad (0.7)$$

тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, где \mathcal{T}_k – орбиты множество $\mathcal{T}_k \subset T$ относительно сдвига тора S . Множество T по отношению ко всему разбиению (0.7) является ядром

$$T = \text{K}\Gamma = \text{K}\Gamma(\mathcal{T}) \quad (0.8)$$

разбиения тора \mathcal{T} . Ядро $\text{K}\Gamma \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ характеризуется тем свойством, что отображение первого возвращения $S' = S|_{\text{K}\Gamma}$, индуцированное сдвигом тора S из (0.5), эквивалентно перекладыванию $D + 1$ областей из $\text{K}\Gamma = \text{K}\Gamma_0 \sqcup \dots \sqcup \text{K}\Gamma_D$.

0.4. Дифференцирование индуцированных разбиений. Основная цель настоящей работы – определить для произвольной размерности D операции дифференцирования

$$\sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^\sigma \quad (0.9)$$

индуцированного разбиения (0.7) таким образом, чтобы в результате получались снова индуцированные разбиения (см. теорему 3.1)

$$\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\text{K}\Gamma^\sigma}$$

того же тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, порождаемые некоторым новым ядром $\text{Kг}^\sigma = T^\sigma$.

На языке ядер Kг дифференцирование

$$\sigma : \text{Kг} \longrightarrow \text{Kг}^\sigma$$

сводится к комбинации следующих геометрических преобразований пространства \mathbb{R}^D . Все области Kг_k из ядра Kг разбиваются на три класса. Области первого класса сохраняются, второго класса – подвергаются преобразованию косоуго сдвига, а третьего – с дополнительным сжатием вдоль прямой.

0.5. Приближения алгебраических чисел. Пусть вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ принадлежат алгебраическому полю $\mathbb{Q}(\theta)$, где θ является корнем рационального многочлена степени $D + 1$, неприводимого над полем рациональных \mathbb{Q} . Для иррационального вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$, когда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$ линейно независимы над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , рассматривается бесконечная орбита точек

$$x_j \equiv j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^D} \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots \quad (0.10)$$

на торе $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. В предлагаемой работе строится бесконечная последовательность выпуклых центрально-симметричных параллелоэдров $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ с определенными для них порядками

$$m^{(0)} < m^{(1)} < \dots < m^{(i)} < \dots,$$

где $m^{(i)}$ – натуральные числа.

В теореме 11.1 (см. формулы (11.35)–(11.38)) доказано, что последовательность параллелоэдров $T^{(i)}$ обладает следующими свойствами.

1. Ни одна из точек x_j орбиты (0.10) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (0.11)$$

в параллелоэдр $T^{(i)}$. Первой попавшей в область $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для } j = m^{(i)}. \quad (0.12)$$

2. Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, выполняется следующее неравенство

$$\varrho(T^{(i)}) \leq \| \mathbf{A} \| ^a \varrho(T^{(b)}). \quad (0.13)$$

Здесь p – некоторый период, определяемый вектором α , и $\| \mathbf{A} \|$ обозначает спектральную норму калибровочной матрицы \mathbf{A} , также определяемой α .

3. Площадь $s(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (0.14)$$

где $\det \mathbf{A}$ – определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенству $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$.

Свойства (0.11) и (0.12) означают, что ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^D выделяют из орбиты (0.10) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^D$.

Следующие два свойства (0.13) и (0.14) описывают метрические характеристики аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$. В частности, из них вытекают экспоненциальные сокращения размеров и площадей параллелоэдров

$$\varrho(T^{(i)}) \rightarrow 0, \quad s(T^{(i)}) \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \quad (0.15)$$

причем выполнение первого свойства из (0.15) требует условия $\|\mathbf{A}\| < 1$ на спектральную норму калибровочной матрицы \mathbf{A} . В противном случае возможен рост радиусов аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$ с одновременным сжатием их площадей.

В теореме 9.2 доказано, что существование периода $p > 0$ возможно только для векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ с координатами из некоторого алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ степени $D + 1$. Такое утверждение является многомерным обобщением первой части теоремы Лагранжа о периодичности разложений квадратичных иррациональностей в цепную дробь (см., например, [1]). Ранее в [2, 3] были рассмотрены приближения кубических иррациональностей.

История и связи. Метод настоящей работы основан на дифференцировании звезд, вкладывающихся в тор [3, 4], и имеет своим источником разбиения Розы [5, 6]. Индуцированные разбиения тора впервые появились в работе Ж. Розы [5] – это были двумерные самоподобные разбиения с фрактальными границами. Общие же индуцированные разбиения были построены в [7]. Понятие ядра разбиения (0.8) и его роль были выявлены в [6]. В этой же работе было доказано, что составляющие разбиения Розы области являются множествами ограниченного остатка.

Для размерности $D = 1$ операции дифференцирования разбиений (0.9) эквивалентны возвратному отображению для цепных дробей

(backward continued fraction map) [8, 9], а для $D = 2$ такие операции были определены в [10, 11].

Интерес к индуцированным разбиениям (0.7) вызывается их связями с множествами ограниченного остатка [6, 12–18], многомерными приближениями [3], сбалансированными словами [19, 20], ростом квазикристаллов [21–23] и теорией сложности (complexity) [23].

Материал статьи излагается в следующей последовательности.

- §1. Согласованные множества векторов и их производные.
- §2. Индуцированные разбиения тора.
- §3. Производные разбиения тора.
- §4. Структура точечных орбит.
- §5. Индуцированное разбиение пространства и полиэдральная гиперповерхность.
- §6. Доказательство теоремы 3.2.
- §7. Возвратные отображения.
- §8. Дробно-линейные и проективные преобразования.
- §9. Периодические точки.
- §10. Преобразования и нормирования звезды.
- §11. Приближения на торе.

§1. СОГЛАСОВАННЫЕ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

1.1. Согласованные множества векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \dots, D\}$. Пусть v_0, v_1, \dots, v_D – произвольные векторы из \mathbb{R}^D и $\sigma' = \{k'_1, \dots, k'_{D-1}\} = \{0, 1, \dots, D\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетание. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \quad (1.1)$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$.

Определение 1.1. Пусть любые $D - 1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ линейно независимы. Обозначим через

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \dots + \lambda_{k'_{D-1}} v_{k'_{D-1}}; \lambda_{k'_1}, \dots, \lambda_{k'_{D-1}} \in \mathbb{R}\} \quad (1.2)$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ' . Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ назовем согласованным, если для всех дополнительных (1.1) к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ не принадлежат гиперплоскости (1.2) и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H_{\sigma'}^+$ и $H_{\sigma'}^-$.

Непосредственно из определения согласованности следует, что любые D векторов из $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ будут линейно независимы.

Определение 1.2. Любое согласованное множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ из \mathbb{R}^D будем для краткости называть звездой.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_D v_D; \lambda_0 + \dots + \lambda_D \leq 1, \lambda_0, \dots, \lambda_D \geq 0\}, \quad (1.3)$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_D \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(v). \quad (1.4)$$

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \quad (1.5)$$

для строгого и нестрогого разбиений множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ и $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \emptyset$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k .

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ не принадлежит плоскости $H_{\sigma'}$ из (1.2), где σ' – дополнительное сочетание (1.1) для σ . Тогда при этом условии только одно из множеств

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.6)$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \quad (1.7)$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H_{\sigma'}^\pm$, и $v(\sigma')$ – дополнительное для $v(\sigma)$ множество векторов из звезды v .

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.3. Обозначим через

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \quad (1.8)$$

то множество векторов из (1.6), которое является согласованным. Если существуют множества векторов v^σ для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$, т.е. для всех σ выполняется условие леммы 1.1, то будем говорить, что согласованное множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ невырождено или более кратко – звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ определено отображение

$$v \xrightarrow{\sigma} v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_D^\sigma\}, \quad (1.9)$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (1.7), и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \quad \text{для всех } k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (1.9) назовем σ -производной невырожденной звезды v . Если нужно выделить индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ -производной (1.9) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}. \quad (1.10)$$

По определению (1.9) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1, k_2\}} = v^{\{k_2, k_1\}}.$$

Поэтому для невырожденной звезды v существуют $C_{D+1}^2 = \frac{(D+1)D}{2}$ ее производных звезд v^σ .

1.3. Инвариантность относительно аффинных отображений. Непосредственно из определения 1.1 вытекает следующее свойство инвариантности звезд.

Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ образует звезду, то ее образы

$$Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_D\}$$

относительно произвольного невырожденного аффинного отображения $A : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$, где $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$, также будут звездами.

Данное свойство позволяет, не уменьшая общности, ограничиваться рассмотрением лишь *приведенных* звезд, когда какие-то D выбранных вектора из v_0, v_1, \dots, v_D равны единичным векторам $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_D = (0, 0, \dots, 1)$.

Если A – невырожденное аффинное отображение, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\sigma} & v^\sigma \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \xrightarrow{\sigma} & Av^\sigma \end{array}$$

Кратко диаграмму можно записать в виде формулы коммутативности

$$A(v^\sigma) = (Av)^\sigma \quad (1.11)$$

σ -производных с аффинными отображениями $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$.

§2. ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАЗБИЕНИЯ ТОРА

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D] \quad (2.1)$$

– полная решетка в пространстве \mathbb{R}^D с базисом l_1, \dots, l_D , т.е. векторы l_1, \dots, l_D линейно независимы на поле вещественных чисел \mathbb{R} ; и пусть T – некоторое подмножество из \mathbb{R}^D . Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D/L$, если отображение

$$T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_L^D : x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (2.2)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) = x + v_{\text{col}(x)} \quad (2.3)$$

на векторы v_0, v_1, \dots, v_D , связанные с базисом (2.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для } k = 1, \dots, D. \quad (2.4)$$

В формуле (2.3) использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для *цвета* точек x , принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.2), где $k = 0, 1, \dots, D$.

Заметим, что при переходе (2.4) от векторов перекладывания v_0, v_1, \dots, v_D к базису l_1, \dots, l_D решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0 . Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \quad (2.5)$$

В частности, из равенств (2.4) и (2.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \pmod{L}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$. Поэтому перекладывание (2.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : S'(x) \equiv x + \alpha' \pmod{L} \quad (2.6)$$

на вектор $\alpha' \pmod{L}$.

2.2. Перекладывающиеся параллелепидры и их деформации.

Определим для $m = 0, 1, \dots, D$ замкнутые D -мерные параллелепиды

$$\bar{T}_m = \{ \lambda_{k_1} v_{k_1} + \dots + \lambda_{k_D} v_{k_D}; \quad 0 \leq \lambda_{k_i} \leq 1 \}, \quad (2.7)$$

где k_1, \dots, k_D — дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \dots, D\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ является звездой (см. определение 1.2), то объединение

$$\bar{T} = \bar{T}_0 \cup \bar{T}_1 \cup \dots \cup \bar{T}_D \quad (2.8)$$

параллелепидов (2.7) образует *параллелоэдр* [17, 18] — многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L} \bar{T}[l] \quad (2.9)$$

с помощью параллельных переносов $\bar{T}[l] = \bar{T} + l$ на векторы l решетки L . Причем различные многогранники $\bar{T}[l]$ из (2.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.5).

Для $D = 2$ параллелоэдр \bar{T} из (2.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $D = 3$

– ромбододекаэдром Федорова [24], а для $D = 4$ – параллелоэдром Вороного [25].

По *i-алгоритму* из [17] вершины, ребра и грани параллелепипедов \overline{T}_m можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$, имеющее внутреннюю часть $T^{\text{int}} = (\overline{T})^{\text{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigsqcup_{l \in L} T[l] \quad (2.10)$$

в строгом смысле (1.5), т.е. в (2.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \emptyset$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}_L^D = \mathbb{R}^D / L$.

Исходя из *i-алгоритма* [17], можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2, \quad \dots, \quad v_0 + v_1 + \dots + v_{D-1} \in T_D. \quad (2.11)$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ ставится в соответствие параллелоэдр

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D, \quad (2.12)$$

являющийся перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}_L^D с векторами перекладывания v_0, v_1, \dots, v_D в (2.3).

Приведенная конструкция развертки T не является жесткой. Параллельные $(D - 1)$ -мерные грани параллелепипедов T_0, T_1, \dots, T_D из (2.12) допускают малые деформации, при которых измененное множество остается перекладывающейся разверткой тора \mathbb{T}_L^D с прежними векторами перекладывания.

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора \mathbb{T}_L^D , нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D = \mathbb{R}^D / \mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$. Зададим сдвиг $S = S_{\alpha}$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$, полагая

$$\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \xrightarrow{S} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathcal{L}}. \quad (2.13)$$

Далее торы $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов \mathbb{T}_L^D с изменяющимися решетками L .

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. \triangleright *Перекадывающаяся развертка T из (2.2) вкладывается*

$$T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (2.14)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига $S = S_{\alpha}$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$ является \mathcal{L} -различимым, т.е. для любых элементов x, y из T , связанных сравнением $x \equiv y \pmod{\mathcal{L}}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение*

$$T \xrightarrow{\sim} T \pmod{\mathcal{L}} : x \mapsto x \pmod{\mathcal{L}} \quad (2.15)$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.15) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (2.16)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$.

2. *Векторы перекадывания (2.3) имеют вид*

$$v_k \equiv m_k \alpha \pmod{\mathcal{L}} \quad (2.17)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, D$ с некоторыми коэффициентами

$$m_k = 1, 2, 3, \dots$$

3. *Пусть*

$$\text{Orb}^+(T_k) = \{S^j(T_k); j = 1, \dots, m_k - 1\} \quad (2.18)$$

обозначает орбиту подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (2.16) будем полагать $\text{Orb}_k^+ \subseteq \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$. Тогда по определению считается, что орбиты (2.18) удовлетворяют условию

$$\text{Orb}^+(T_k) \cap T = \emptyset \quad (2.19)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. \triangleleft

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.18) определить еще *полные орбиты*

$$\text{Orb}(T_k) = \{S^j(T_k); j = 0, 1, \dots, m_k - 1\}. \quad (2.20)$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ из (2.13) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\text{числа } 1, \alpha_1, \dots, \alpha_D \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки \mathcal{L} .

Теорема 2.1. Пусть развертка T вкладывается (2.14) в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α для сдвига $S = S_\alpha$ из (2.13) будет иррациональным (2.21). Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Множества из полных орбит $\text{Orb}(T_k)$ не пересекаются, т.е.

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset \quad (2.22)$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. Имеет место разбиение тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D, \quad (2.23)$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\text{Orb}(T_k)$ из (2.20).

Доказательство приведено в [7]. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \rightarrow T$ из (2.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \rightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ из (2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \quad (2.24)$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D \quad (2.25)$$

соответственно развертку T из (2.2), (2.12) и *индуцированное разбиение* (2.23) тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ разверткой T .

Множество T по отношению ко всему разбиению тора \mathcal{T} называется (ср. [6, 21]) *ядром (кагуон)* разбиения \mathcal{T} . Чтобы указывать на такую связь между T и \mathcal{T} будем использовать обозначения

$$T = \text{Kг} = \text{Kг}(\mathcal{T}). \quad (2.26)$$

Ядро (2.26) характеризуется следующим свойством:

ядро – это такое подмножество $K\Gamma \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{K\Gamma}, \quad (2.27)$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D + 1$ подмножеств из разбиения

$$K\Gamma = K\Gamma_0 \sqcup K\Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup K\Gamma_D. \quad (2.28)$$

В определении ядра $K\Gamma$ важно, что количество областей в разбиении (2.28) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$. Отсюда, в частности, следует, что $K\Gamma$ является разверткой некоторого тора \mathbb{T}_L^D , а индуцированное отображение (2.27) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.2. *Определенная в (2.12) развертка тора $T = T(v)$ вкладывается (2.14) в тор $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

- 1) *множество $\mathcal{T} = T(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D$ из (2.25) является разбиением тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$;*
- 2) *внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты*

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{m} - 1\} \quad (2.29)$$

порядка

$$\mathbf{m} = m_0 + m_1 + \dots + m_D. \quad (2.30)$$

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из теоремы 2.1.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что из вложения $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ следует $T \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset$. Все точки орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ являются вершинами параллелепипедов из орбитного разбиения

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k-1}(T_k),$$

составленного из параллелепипедов, входящих в орбиту $\text{Orb}^+(T_k)$. Отсюда и существования (2.25) разбиения тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_D$ выводим $T \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset$.

Методом от противного докажем обратное утверждение. Пусть какой-то параллелепипед $T_k^j = S^j(T_k)$ с индексом $0 < j < n_k$ из

разбиения \mathcal{T}_k пересекается $T_k^j \cap T \neq \emptyset$ с разверткой T . Предположим, что пересечение $T_k^j \cap T$ содержит внутреннюю точку развертки T . Тогда одна из вершин параллелепипеда T_k^j также попадает в T^{int} . Но в этом случае мы приходим к противоречию, поскольку при условии $0 < j < m_k$ указанная вершина будет содержаться в орбите $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Наконец, осталось рассмотреть случай

$$\overline{T}_k^j \cap \overline{T} \subset \partial \overline{T}.$$

Здесь через \overline{T}_k^j и \overline{T} мы обозначили замыкания T_k^j и T , а $\partial \overline{T}$ – объединение всех $(D-1)$ -мерных граней многогранника T .

Однако, не трудно видеть, что согласно определению (2.25) развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ при прикладывании к ней параллелепипедов $T_k^j = S^j(T_k)$ последние не пересекаются с выпуклым многогранником T . Следовательно, включение $\overline{T}_k^j \cap \overline{T} \subset \partial \overline{T}$ не может иметь место. \square

§3. ПРОИЗВОДНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ТОРА

3.1. Производные вкладывающихся множеств векторов. Основная теорема.

Определение 3.1. Пусть $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.25) тора \mathbb{T}_L^D с векторами перекладывания v_0, v_1, \dots, v_D . Если данная развертка T вкладывается $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v вкладывается

$$v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (3.1)$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S .

Теорема 3.1. Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ вкладывается (3.1) в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным (2.21) вектором α . Тогда любая ее σ -производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_D^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается

$$v^\sigma \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (3.2)$$

в тот же тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S .

Доказательство вытекает из теоремы 3.2 частного вида, которая будет приведена ниже. \square

Чтобы сформулировать указанную теорему, нам потребуются несколько дополнительных разъяснений.

3.2. Инвариантность вложений звезд. Операция вложения (3.1) звезд v инвариантна

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\text{em}} & \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \xrightarrow{\text{em}} & \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^D \end{array} \quad (3.3)$$

относительно невырожденных аффинных преобразований $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$. В диаграмме (3.3) нижнее вложение звезды $Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_D\}$ рассматривается относительно сдвига

$$S_{A\alpha} : \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^D \longrightarrow \mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^D$$

тора $\mathbb{T}_{A\mathcal{L}}^D = \mathbb{R}^D/A\mathcal{L}$, т.е. вектор сдвига α и решетка тора \mathcal{L} преобразуются тем же преобразованием A .

3.3. Приведенные звезды. Согласно диаграмме (3.3) для любой невырожденной звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ и любого аффинного отображения $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$ звезда $Av = \{Av_0, Av_1, \dots, Av_D\}$ снова будет невырожденной и, следовательно, для нее существует $\{0, D\}$ -производная (см. обозначение (1.10))

$$\{Av_0, Av_1, \dots, Av_D\}^{\{0, D\}} = \{(Av_0)', (Av_1)', \dots, (Av_D)'\}. \quad (3.4)$$

Дополнительно предположим, что производная звезда (3.4) имеет векторы

$$(Av_k)' = Av_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D-1 \quad (3.5)$$

и

$$(Av_D)' = Av_0 + Av_D.$$

По определению звезды векторы $v_1, \dots, v_D \in v$ линейно независимы. Поэтому можно выбрать аффинное отображение $A \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$ с условием

$$Av_1 = e_1, \quad \dots, \quad Av_D = e_D.$$

Чтобы не усложнять обозначения (3.5), можем с самого начала считать исходную звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$, содержащую единичные векторы

$$v_1 = e_1, \quad \dots, \quad v_D = e_D. \quad (3.6)$$

Пусть теперь $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ – невырожденная звезда, удовлетворяющая условию (3.6), и такая, что ее $\{0, D\}$ -производная

$$\{v_0, v_1, \dots, v_D\}^{\{0, D\}} = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_D\} \quad (3.7)$$

имеет векторы

$$v'_k = v_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D-1 \quad (3.8)$$

и

$$v'_D = v_0 + v_D.$$

Здесь в (3.7) главное ограничение на последний вектор $v'_D = v_0 + v_D$. Переставляя местами векторы v_1, \dots, v_D в исходном множестве векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$, т.е. снова действуя на нее аффинным преобразованием $P \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$, переставляющим местами указанные векторы, всегда можно добиться выполнения условия (3.8). Более того, с помощью перестановочных матриц $P \in \text{GL}_D(\mathbb{R})$ любую σ -производную звезду v^σ , где $\sigma \in \Sigma$, можно свести к рассмотрению $\{0, D\}$ -производных (3.7).

Учитывая, что звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ невырождена, условие (3.8) будет означать, что вектор $v_0 \in \mathbb{R}^D$ имеет в единичном базисе e_1, \dots, e_D координаты

$$v_0 = (x_1, \dots, x_D), \quad (3.9)$$

удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$-\infty < x_1 < 0, \quad \dots, \quad -\infty < x_{D-1} < 0, \quad -1 < x_D < 0.$$

Если переставить местами x_1, \dots, x_{D-1} и воспользоваться условием иррациональности (2.21), то ограничения (3.9) можно несколько сузить

$$v_0 = (x_1, \dots, x_D), \quad \text{где } -\infty < x_{D-1} < \dots < x_1 < 0, \quad -1 < x_D < 0. \quad (3.10)$$

Определение 3.2. Звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$, удовлетворяющую условиям (3.6) и (3.9), назовем приведенной.

Обратно, если $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ – приведенная звезда (3.6) и (3.9), то она обладает свойствами:

- 1) множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ является согласованным (см. определение 1.1);
- 2) для звезды v существует ее $\{0, D\}$ -производная $v^{\{0, D\}}$, имеющая вид (3.8).

Итак, из аффинной инвариантности (3.3) свойства вложимости $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ следует, что для доказательства приведенной ранее теоремы 3.1 достаточно рассмотреть лишь следующий ее частный случай.

Теорема 3.2. Пусть приведенная (3.6), (3.9) звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ вкладывается $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D = \mathbb{R}^D / \mathcal{L}$ для некоторой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$ относительно сдвига $S = S_{\alpha}$ с иррациональным (2.21) вектором α . Тогда ее $\{0, D\}$ -производная существует, имеет вид

$$\{v_0, v_1, \dots, v_D\}^{\{0, D\}} = \{v'_0, v'_1, \dots, v'_D\} = \{v_0, v_1, \dots, v_{D-1}, v_0 + v_D\} \quad (3.11)$$

и также вкладывается

$$v' = v^{\{0, D\}} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (3.12)$$

в тот же тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S .

Доказательство будет проводится по следующему плану. В п.п. 4, 5 содержится полное описание распределения точечных орбит $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ относительно разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$. Для такого описания в п. 5 используется метод полиэдральных гиперповерхностей, вложенных в разбиение \mathcal{T} . Техническая часть доказательства теоремы 3.2 содержится в п. 6. \square

§4. СТРУКТУРА ТОЧЕЧНЫХ ОРБИТ

4.1. Структура производной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$. Рассмотрим перекладывание $S' : T \rightarrow T$ развертки тора T , являющееся индуцированным отображением $S' = S|_T$ для сдвига тора $S : \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \rightarrow \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ из (2.13). Подействуем $(D + 1)$ -кратным перекладыванием S' на точку $x_0 = 0$ из T^{int} . Получим следующую внутреннюю точку

$$S'^{D+1}(0) = x_{\mathbf{m}} \quad (4.1)$$

из T , где порядок \mathbf{m} был определен в (2.30). Она является первой точкой из орбиты

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') &= \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') \setminus \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \\ &= \{x_j = S^j(0); \mathbf{m} \leq j \leq \mathbf{m}' - 1\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

при этом

$$\mathbf{m}' = m'_0 + m'_1 + \dots + m'_D, \quad (4.3)$$

где

$$m'_k = m_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D - 1$$

и

$$m'_D = m_0 + m_D.$$

Из (4.3) следует формула связи

$$\mathbf{m}' = 2m_0 + m_1 + \dots + m_D = \mathbf{m} + m_0 \quad (4.4)$$

между производным \mathbf{m}' и исходным \mathbf{m} порядками.

Для орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ с номером \mathbf{m}' из (4.4), определенной в (2.29), имеет место следующее разбиение

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}'). \quad (4.5)$$

По критерию 2) из теоремы 2.2 для доказательства теоремы 3.2 нужно проверить, что выполняется равенство

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset \quad (4.6)$$

для производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ для производной звезды $v' = v^{\{0, D\}}$ была определена в (2.25). В силу разбиения (4.5), чтобы проверить (4.6), нужно доказать выполнимость двух условий:

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset, \quad T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset. \quad (4.7)$$

Это будет сделано в п. 6 в леммах 6.1–6.3.

4.2. Структура начальной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$. В следующем предложении устанавливается важная связь между точками орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ и вершинами многогранников, входящих в разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$.

Предложение 4.1. *Обозначим через $V_{\mathcal{T}}$ множество всех вершин параллелепипедов $T_k^j = S^j(T_k)$ для $k = 0, 1, \dots, D$, из которых состоит разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$, определенное в (2.25). Тогда для начальной орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ выполняется равенство*

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = V_{\mathcal{T}} \setminus \{x_0\}, \quad (4.8)$$

где $x_0 = 0$ – нулевая вершина в разбиении $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$.

Доказательство. Из определения (2.25) разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ следует включение

$$V_{\mathcal{T}} \subset \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\}. \quad (4.9)$$

Вспомогая соглашение (2.11), проследим движение нулевой вершины $x_0 \in V_0$ под действием сдвига S . Имеем

$$\begin{array}{lll}
 V_0 \ni x_0 & \xrightarrow{S} & x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0-1} \in V_0^j \\
 V_1 \ni x_{m_0} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0+m_1-1} \in V_1^j \\
 V_2 \ni x_{m_0+m_1} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+m_1+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{m_0+m_1+m_2-1} \in V_2^j \\
 & \dots & \\
 V_D \ni x_{m_0+m_1+\dots+m_{D-1}} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+m_1+\dots+m_{D-1}+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_{\mathbf{m}-1} \in V_D^j,
 \end{array} \tag{4.10}$$

где для вершин параллелограммов T_k использовали обозначения $V_k = V_{T_k}$ и $V_k^j = S^j(V_k)$. Из диаграммы (4.10) следует включение

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\} \subset V_T,$$

из которого и (4.9) выводим равенство (4.8). \square

4.3. Структура новой части орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$. Запишем координаты x_k вектора $v_0 = (x_1, \dots, x_D)$ из (3.9) в виде

$$x_1 = -a_1 - \alpha_1, \quad \dots, \quad x_{D-1} = -a_{D-1} - \alpha_{D-1}, \quad x_D = -\alpha_D, \tag{4.11}$$

где $a_1, \dots, a_{D-1} = 0, 1, 2, \dots$ и $0 < \alpha_k < 1$ для $k = 1, \dots, D$. Тогда орбиту $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (4.2) можно разложить на следующие последовательности:

$$\begin{array}{lll}
 T_{k_0} \ni x_{\mathbf{m}} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1} \in T_{k_0}^j \\
 & \downarrow S' & \\
 T_{k_1} \ni x_{\mathbf{m}+m_{k_0}} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+m_{k_1}-1} \in T_{k_1}^j \\
 & \downarrow S' & \\
 & \dots & \dots \\
 & \downarrow S' & \\
 T_{k_b} \ni x_{\mathbf{m}+b_m} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+b_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+b_m+m_{k_b}-1} \in T_{k_b}^j \\
 & \downarrow S' & \\
 & \dots & \dots \\
 & \downarrow S' & \\
 T_0 \ni x_{\mathbf{m}+a_m} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1} \in T_0^j
 \end{array} \tag{4.12}$$

где использованы сокращения

$$b_m = b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}, \quad a_m = a_1 m_1 + \dots + a_{D-1} m_{D-1}. \tag{4.13}$$

В диаграмме (4.12) строки имеют номера $b = 0, 1, \dots, a$, где $a = a_1 + \dots + a_{D-1}$. Элементы x_* строки с номером $b = b_1 + \dots + b_{D-1} = 0, 1, \dots, a_1 + \dots + a_{D-1}$ принадлежат

$$x_{\mathbf{m}+b_{\mathbf{m}}+j} \in T_{k_b}^j$$

соответствующему образу

$$T_{k_b}^j = S^j(T_{k_b}) \quad (4.14)$$

параллелепипеда T_{k_b} под действием отображения $S^j = \underbrace{S \circ \dots \circ S}_j$, где S – сдвиг из (2.13) и степень $j = 0, 1, \dots, m_{k_b} - 1$. Здесь индексы k_b у параллелепипедов T_{k_b} принимают значения

$$\begin{aligned} k_b &= 1, \dots, D-1 & \text{для } b &= 0, 1, \dots, a-1, \\ k_b &= 0 & \text{для } b &= a, \end{aligned} \quad (4.15)$$

причем k_b принимает значение $1, \dots, D-1$ и 0 соответственно a_1, \dots, a_{D-1} и 1 раз.

Элементы x_* в строках диаграммы (4.12) преобразуются по правилу $x_* \mapsto S(x_*)$, а при переходе со строки на строку – правилу $x_* \mapsto S'(x_*)$, где S' – производный сдвиг (2.6) или, что то же самое, – индуцированное отображение (2.24).

Индекс i' из нижней строки диаграммы (4.12) равен наименьшему числу $i' = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющему в силу (4.11) условию

$$\mathbf{m} + a_{\mathbf{m}} + i' \leq \mathbf{m}',$$

т.е. согласно (4.4) и (4.13) – неравенству

$$a_1 m_1 + \dots + a_{D-1} m_{D-1} + i' \leq m_0. \quad (4.16)$$

В свою очередь для орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (4.2) определим еще дополнительное разбиение

$$\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') \sqcup \text{Orb}_{T^-}^+(0, \mathbf{m}'). \quad (4.17)$$

Здесь обозначили

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') \cap T \subset T \quad (4.18)$$

и

$$\text{Orb}_{T^-}^+(0, \mathbf{m}') = \text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}') \setminus \text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}'). \quad (4.19)$$

Предложение 4.2. 1. Под действием сдвига S точки орбиты

$$\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$$

движутся согласно диаграмме (4.12).

2. Множество (4.18) состоит

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') = \{x_{\mathbf{m}}, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m}\} \quad (4.20)$$

из всех точек, расположенных в левой части диаграммы (4.12), где a_m определено в (4.13).

3. Множество (4.19) совпадает

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{T-}^+(0, \mathbf{m}') &= \\ &= \{x_{\mathbf{m}+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \dots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1}\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

с множеством всех точек из правой части диаграммы (4.12).

Доказательство. Развертка тора $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D$ замкнута относительно производного сдвига S' . Поскольку $x_{\mathbf{m}} \in T$, то точки из правой части равенства (4.20) принадлежат развертке T и, значит, содержатся в множестве $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ по определению (4.18).

В силу (2.11) и (3.6) имеем

$$x_{\mathbf{m}} = v_0 + v_1 + \dots + v_D = (x_1 + 1, \dots, x_D + 1),$$

где $x_D + 1 > 0$ в силу условия (3.9). Точки же (x, y, \dots, z) из параллелепипеда T_D имеют координату $z \leq 0$, поэтому $x_{\mathbf{m}} \notin T_D$.

Если $x_{\mathbf{m}}$ принадлежит одному из множеств T_1, \dots, T_{D-1} , то, до первого попадания в область T_0 , начальная точка $x_{\mathbf{m}}$ будет сдвигаться под действием производного сдвига S' на векторы $v_1 = e_1, \dots, v_{D-1} = e_{D-1}$. Следовательно, все ее образы $S'^j(x_{\mathbf{m}})$ снова принадлежат параллелепипедам T_1, \dots, T_{D-1} , что доказывает равенство (4.20).

Равенство (4.21) вытекает из существования разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$, определенного в (2.23) для вкладывающейся в тор (2.12) развертки T . \square

§5. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА И ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ

5.1. Индуцированное разбиение пространства. Далее, чтобы избежать возникающих при малых размерностях D вырождений, будем предполагать выполненным условие

$$D \geq 3. \quad (5.1)$$

Случай $D = 1$ рассматривается аналогично [9], а $D = 2$ полностью исследован в [4].

Напомним, что развертка тора $T = T(v)$ является параллеледромом (2.8), составленным из $D + 1$ параллелепипеда T_0, T_1, \dots, T_D . Она естественным образом вложена

$$T = T(v) \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{R}^D \quad (5.2)$$

в пространство \mathbb{R}^D и является ядром $T = \text{K}\Gamma(T)$ разбиения

$$T = T(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\dots,D} \bigsqcup_{0 \leq j < m_k} S^j(T_k) \quad (5.3)$$

тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$, где $S^j(T_k)$ – трансляционные копии параллелепипедов T_k под действием сдвига тора S из (2.13).

Тем самым разбиение (5.3) задает для всех многогранников $S^j(T_k) \triangleleft T$ их *локальные окружения*, т.е. – соседние многогранники $S^{j'}(T_{k'}) \triangleleft T$, имеющие $(D - 1)$ -мерную общую грань с $S^j(T_k)$. Здесь и далее значок \triangleleft будет означать вхождение фигуры в некоторое разбиение в качестве одного из его образующих элементов.

Используя так определенные локальные окружения и вложение (5.2), мы можем многогранники T_k из ядра $T = \text{K}\Gamma(T) \subset \mathbb{R}^D$ окружать слоями соседними с ними многогранниками $T_{k'}$. Поскольку по условию $T = T(v)$ – разбиение тора, то в результате указанного процесса роста получится периодическое разбиение

$$\widehat{T} = \widehat{T}(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\dots,D} \bigsqcup_{l \in \mathcal{L}_k} T_k[l] \quad (5.4)$$

пространства \mathbb{R}^D . Здесь \mathcal{L}_k – объединение решетки \mathcal{L} и конечного набора ее трансляционных копий $\mathcal{L} + w$, где векторы w определяются локальными окружениями из (5.3). Разбиение (5.4) назовем *индуцированным разбиением* пространства \mathbb{R}^D .

5.2. Полиэдральная поверхность. Выделим из развертки тора $T = T(v)$ параллелепипеды T_0, T_1, \dots, T_{D-1} . Обозначим их совокупность через $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$. Пусть $T_{kk'}$ обозначает общую $(D - 1)$ -грань между соседними параллелепипедами T_k и $T_{k'}$. Тогда параллелепипеды из множества $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$ имеют $C_D^2 = \frac{D(D-1)}{2}$ общих граней.

Аналогично построению разбиения (5.4), будем послойно окружать многогранники из $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$ их соседними многогранниками, используя локальные окружения (5.3) только с гранями типа $T_{kk'}$. В результате получим подмножество

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(D)} = \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \triangleleft \widehat{T} \quad (5.5)$$

из разбиения $\widehat{T} = \widehat{T}(v)$, содержащего только многогранники типа тех D многогранников, которые входят в множество $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$, т.е. их трансляционные копии.

Зададим проекцию

$$\text{pr}_{\|e_D} : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^{D-1}$$

параллельно вектору e_D и подействуем ей

$$\text{pr}_{\|e_D} : T_{(D)}(v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{(D)}(v) \quad (5.6)$$

на множество $T_{(D)}(v)$. По условию $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ – приведенная звезда (3.6) и (3.9), поэтому образ $\mathcal{S}_{(D)}(v)$ в (5.6) состоит

$$\mathcal{S}_{(D)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{D-1}$$

из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \text{pr}_{\|e_D} T_k$ без общих внутренних точек, причем P_0 – единичный $(D-1)$ -мерный куб. Это означает, что отображение (5.6) можно продолжить

$$\text{pr}_{\|e_D} : \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{(D)}(v) \quad (5.7)$$

в пространство \mathbb{R}^D на все множество (5.5), где $\mathcal{S}_{(D)}(v) = \text{pr}_{\|e_D} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$.

Лемма 5.1. 1. Множество $\mathcal{S}_{(D)}(v)$ из (5.7) состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов типа P_k для $k = 0, 1, \dots, D-1$ и образует разбиение пространства \mathbb{R}^{D-1} . Отображение (5.7) устанавливает взаимно однозначное соответствие между D -мерными параллелепипедами из $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ и $(D-1)$ -мерными параллелепипедами из $\mathcal{S}_{(D)}(v)$.

2. Множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ из (5.5) разделяет

$$\mathbb{R}^D = \mathbb{R}_-^D \cup \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \cup \mathbb{R}_+^D \quad (5.8)$$

пространство \mathbb{R}^D на два несвязанные друг с другом полупространства \mathbb{R}_\pm^D , где $\mathbb{R}_-^D \cup \mathbb{R}_+^D = \mathbb{R}^D \setminus \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ и $\mathbb{R}_-^D \cap \mathbb{R}_+^D = \emptyset$, т.е. любые две точки из замыканий множеств $\overline{\mathbb{R}_-^D}$ и $\overline{\mathbb{R}_+^D}$ нельзя соединить непрерывной кривой, непересекающей множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}^{\text{int}}(v)$.

Доказательство вытекает из существования разбиения пространства (5.4) и биекций (5.6), (5.7). \square

Из леммы 5.1 следует, что подмножество (5.5) вложено

$$\text{em} : \widehat{S}_{(D)}(v) \triangleleft \widehat{T}(v) \quad (5.9)$$

в разбиение пространства (5.4), состоит из многогранников T_k , входящих в разбиение $\widehat{T}(v)$, и обладает свойствами поверхности без дыр. По этой причине будем называть $\widehat{S}_{(D)}(v)$ *полиэдральной гиперповерхностью*.

5.3. Покрытие области T'_- . Напомним, что согласно (5.6) образ $S_{(D)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_{D-1}$ состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \text{pr}_{\parallel e_D} T_k$ без общих внутренних точек, где P_0 — единичный $(D-1)$ -мерный куб.

Разложим производную развертку тора $T' = T(v') = T'_0 \sqcup T'_1 \sqcup \dots \sqcup T'_D$ на части

$$T' = T'_{\text{new}} \sqcup T'_{\text{old}}. \quad (5.10)$$

Здесь $T'_{\text{old}} = T' \cap T$ — старая область из развертки T , а новая область $T'_{\text{new}} = T'_-$ имеет разбиение

$$T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{D-1,-}, \quad (5.11)$$

где $T'_{1,-}, \dots, T'_{D-1,-}$ — дальние от начала координат половины параллелепипедов T'_1, \dots, T'_{D-1} .

Для развертки $T'(v)$ рассмотрим ее проекцию

$$\text{pr}_{\parallel e_D} : T'(v) \longrightarrow S'_{(D)}(v) \quad (5.12)$$

в пространство \mathbb{R}^{D-1} . Образ $S'_{(D)}(v)$ можно представить в виде разбиения

$$S'_{(D)}(v) = S_{(D)}(v) \cup P'_-, \quad (5.13)$$

где

$$P'_- = P'_{1,-} \cup \dots \cup P'_{D-1,-}$$

— область из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P'_{k,-} = \text{pr}_{\parallel e_D} T'_{k,-}$, при этом $P'_{k,-}$ прилегает к параллелепипеду P_k .

Пусть

$$\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supseteq P'_- \quad (5.14)$$

— *покрытие* области P'_- , образованное всеми параллелепипедами \tilde{P}_k из разбиения $\mathcal{S}_{(D)}(v)$ пространства \mathbb{R}^{D-1} , пересекающимися во внутренних точках с областью P'_- . Если какой-то параллелепипед \tilde{P}_k с

номером $k = 1, \dots, D - 1$ содержится в покрытии $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$, то он порождает $(D - 1)$ -полиэдральный диск

$$\mathcal{P} = \bigcup_{l'_1} P_1[l'_1] \cup \dots \cup \bigcup_{l'_{D-1}} P_{D-1}[l'_{D-1}] \quad (5.15)$$

параллелепипедов из $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ типа P_1, \dots, P_{D-1} , прилегающих к \tilde{P}_k и друг к другу по общим $(D - 2)$ -граням $P_{k'k''}$ параллелепипедов $P_{k'}$ и $P_{k''}$ с номерами $k', k'' = 1, \dots, D - 1$.

Для покрытия $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ из (5.14) имеет место следующее разбиение

$$\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}, \quad (5.16)$$

где множество

$$\mathcal{C} = \bigcup_{l'_0} P_0[l'_0]$$

состоит из $(D - 1)$ -кубов типа P_0 . Здесь в (5.15) и (5.16) векторы l'_j являются $\text{pr}_{\|e_D}$ -проекциями векторов вида

$$l_j = v_0 - l_{j1}v_1 - \dots - l_{j(D-1)}v_{D-1} \quad (5.17)$$

с коэффициентами $l_{jk} = 0, 1, 2, \dots$, при этом $l_{01} + \dots + l_{0(D-1)} \geq 1$.

Для доказательства (5.17) зададим еще проекцию

$$\text{pr}_{\|e_D, \dots, e_2} : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

параллельно векторам e_D, \dots, e_2 . Образ $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} P'_- = \text{pr}_{\|e_D, \dots, e_2} T'_-$ области (5.11) полностью лежит левее точки

$$\text{pr}_{\|e_D, \dots, e_2} v_0 + \text{pr}_{\|e_D, \dots, e_2} v_1 = x_1 + 1$$

где x_1 — первая координата вектора v_0 согласно (3.9). Отсюда следует, что $l_{11} \leq 0$, а тогда по симметрии и остальные коэффициенты в (5.17) также неположительны. Куб $P_0[v'_0]$ не принадлежит области P'_- , поэтому случай $l_{01} = \dots = l_{0(D-1)} = 0$ исключается в (5.17).

Из леммы 5.1 следует, что $(D-1)$ -полиэдральное покрытие $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ можно однозначно поднять в D -полиэдральную поверхность $\hat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ до множества

$$\hat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \hat{\mathcal{P}} \cup \hat{\mathcal{C}} \triangleleft \hat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \quad (5.18)$$

через проекцию

$$\text{pr}_{\|e_D} : \hat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \longrightarrow \mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}. \quad (5.19)$$

Лемма 5.2. Множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ из (5.18) является покрытием

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supset T'_- \quad (5.20)$$

объединения многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{D-1,-}$, определенных в (5.11).

Доказательство. Аналогично (5.6), рассмотрим две двумерные проекции

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} : T(v) &\longrightarrow S_{(1)}(v), \\ \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} : T'(v) &\longrightarrow S'_{(1)}(v). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из условий (3.6) и (3.9) приведенности звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ следует, что образ $S_{(1)}(v)$ является шестиугольником, разбитым

$$S_{(1)}(v) = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_D$$

на прилегающие друг к другу единичный квадрат Q_0 и параллелограммы Q_1, Q_D , где $Q_k = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} T_k$. Этот же образ можно представить в виде

$$S_{(1)}(v) = Q_k$$

шестиугольной проекции параллеледров T_k для $k \neq 0, 1, D$. К образу же $S'_{(1)}(v)$ из (5.21) добавляется

$$S'_{(1)}(v) = S_{(1)}(v) \cup Q'_- \quad (5.22)$$

с наложением пятиугольник

$$Q'_- = Q'_{1,-} \cup Q'_{k,-},$$

где $Q'_{1,-} = \text{pr}_{\|e_2} T'_{1,-}$, $Q'_{k,-} = \text{pr}_{\|e_2} T'_{k,-}$ для $k \neq 0, 1, D$.

Возвращаемся к определенному в (5.18) множеству $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{C}}$ из полиэдральной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$. Рассмотрим его проекцию $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$. Из разложения (5.16), построения (5.19) множества $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ и вида (5.22) пятиугольника Q'_- следует включение

$$\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supseteq Q'_-, \quad (5.23)$$

так как в силу (3.6) и (3.9) проекции векторов l_j равны

$$\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} l_j = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} v_0 - l_{j1} \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} v_1 = (x_1, x_D) - l_{j1}(1, 0), \quad (5.24)$$

где $x_1 < 0$, $-1 < x_D < 0$ и коэффициенты $l_{j1} = 0, 1, 2, \dots$ ввиду равенств (5.17). Покрытия множества Q'_- квадратом Q_0 и параллелограммом Q_1 очевидны, для остальных случаев снова рассматриваем проекции (5.21), отбрасывая векторы e_D и e_k для $k = 2, \dots, D-1$.

Из включений (5.14) и (5.23) вытекает, что множество $\widehat{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ покрывает (5.20) объединение многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{D-1,-}$. \square

§6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2

6.1. Точки орбиты $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Лемма 6.1. Пусть $T' = T(v')$ – развертка тора (2.25) для производной $v' = v^{\{0,D\}}$ приведенной звезды v и $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ – орбита (2.29) начальной точки $x_0 = 0$ относительно сдвига тора $S = S_\alpha$ из (2.13). Тогда имеет место равенство

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \emptyset. \quad (6.1)$$

Доказательство. В (5.10) производная развертка T' была разложена $T' = T'_{\text{new}} \sqcup T'_{\text{old}}$ на старую часть $T'_{\text{old}} = T' \cap T$ и новую $T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{D-1,-}$, состоящую из дальних от начала координат половин $T'_{1,-}, \dots, T'_{D-1,-}$ параллелепипедов T'_1, \dots, T'_{D-1} .

Поскольку выполняется включение $T'_{\text{old}} \subset T$ и $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T^{\text{int}} = \emptyset$, то можем записать

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'_{\text{old}}{}^{\text{int}} = \emptyset. \quad (6.2)$$

В силу предложения 4.1 и разбиения (5.11) для доказательства равенства

$$\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'_{\text{new}}{}^{\text{int}} = \emptyset \quad (6.3)$$

нужно проверить выполнимость равенства

$$V_{\mathcal{T}} \cap T'_-{}^{\text{int}} = \emptyset. \quad (6.4)$$

Из леммы 5.2 следует, что в область $T'_-{}^{\text{int}}$ могут попасть только те вершины из $V_{\mathcal{T}}$, которые являются вершинами многогранников типа T_0, T_1, \dots, T_{D-1} из разбиения \mathcal{T} .

Чтобы убедиться в справедливости (6.4), нужно рассмотреть двумерные проекции $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} T$ и $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} T'$. Пятиугольная проекция $Q'_- = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} T'_-$ содержит пять вершин и одну внутреннюю точку – проекции вершин многогранника T'_- . Из рассуждений леммы

5.2 и условия $-1 < x_D < 0$ следует, что вершины квадратов $Q_0[l''_{0j}]$ и параллелограммов $Q_1[l''_{1j}]$, где $l''_{kj} = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_2} l_{kj}$, могут попадать только в указанные пять граничных вершин проекции Q'_- . Рассматривая аналогичные проекции, последовательно отбрасывая векторы e_D и e_k для $k = 2, \dots, D-1$, убеждаемся, что вершины остальных параллелограммов $Q_k[l''_{kj}]$ также могут попадать только в те же самые пять вершин соответствующих пятиугольников Q'_- . Отсюда получаем равенство (6.4), а значит, и (6.3).

Утверждение леммы 6.1 вытекает из равенств (5.10), (6.2) и (6.3). \square

6.2. Точки орбиты $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$.

Лемма 6.2. Пусть $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ – часть орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (4.2), содержащаяся в исходной развертке тора $T = T(v)$, где порядок $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + t_0$ был определен в (4.4). Тогда в условиях леммы 6.1 выполняется равенство

$$\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}') \cap T'^{\text{int}} = \emptyset. \quad (6.5)$$

Доказательство. Из построения (2.25) производной развертки тора $T' = T(v')$ следует, что точки (x, y, \dots, z) из ее замыкания \overline{T}' имеют максимальную координату

$$z = z(v'_D) = x_D + 1 > 0. \quad (6.6)$$

Определенную в (4.1) точку $x_{\mathbf{m}} = (x, y, \dots, z)$ можно записать в виде

$$x_{\mathbf{m}} = (x, y, \dots, z) = v_0 + v_1 + \dots + v_D = v'_1 + \dots + v'_D = (x_1 + 1, \dots, x_D + 1). \quad (6.7)$$

Данная точка является вершиной многогранника \overline{T}' . Она характеризуется условием:

среди всех точек из \overline{T}' с D -координатой (6.6) точка $x_{\mathbf{m}}$ из (6.7) имеет наибольшее значение суммы первых $D-1$ координат

$$x + y + \dots = x_1 + x_2 + \dots + 2.$$

Движение точки $x_{\mathbf{m}}$ по орбите $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ происходит согласно диаграмме (4.12) и сводится к сдвигам на векторы $v_1 = e_1, \dots, v_{D-1} = e_{D-1}$. Следовательно, при таком движении у образов точки $x_{\mathbf{m}}$ сумма первых $D-1$ координат $x + y + \dots$ увеличивается каждый раз на 1.

Отсюда вытекает, что все образы x_* точки $x_{\mathbf{m}}$ из орбиты $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$, кроме самой начальной точки $x_{\mathbf{m}}$, не принадлежат многограннику \overline{T}' , что доказывает утверждение леммы (6.5). \square

6.3. Точки орбиты $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$.

Лемма 6.3. Пусть $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ – часть орбиты $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$ из (4.17), дополняющая орбиту $\text{Orb}_T^+(0, \mathbf{m}')$ из леммы 6.2. Тогда для этой части $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ снова справедливо равенство

$$\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}') \cap T'^{\text{int}} = \emptyset. \quad (6.8)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 6.2 следует, что точки x_* орбиты $\text{Orb}_{T_-}^+(0, \mathbf{m}')$ содержатся в D -мерных кубах $T_0^j = S^j(T_0)$ или в параллелепипедах $T_k^j = S^j(T_k)$ с номерами $k = 1, \dots, D-1$. Поэтому некоторая точка x_* может попасть в разветку T' , только если содержащий ее многогранник T_k^j пересекается с T' .

Поскольку нас в данном случае интересует лишь новая область $T'_{\text{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \dots \cup T'_{D-1,-}$ из производной развертки тора T' , состоящая из $D-1$ дальних от начала координат половин $T'_{1,-} \subset T'_1, \dots, T'_{D-1,-} \subset T'_{D-1}$ параллелепипедов T'_1, \dots, T'_{D-1} , то будем следить за попаданием точки

$$x_* \in T'_- \quad (6.9)$$

в указанную область T'_- .

Если $x_* \in T_k^j$ и выполняется условие (6.9), то по лемме 5.2 и (5.24) многогранник T_k^j будет содержаться

$$T_k^j \triangleleft \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \quad (6.10)$$

в полиэдральной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ из (5.18) в качестве одного из образующих ее многогранников.

Пусть

$$x_{\mathbf{m}+b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}} \in T_{k_b} \quad (6.11)$$

– начальная точка из диаграммы (4.12), из которой получается сдвигами точка $x_* \in T_k^j$.

Случай I: $T_{k_b} = T_k$ для $k = 1, \dots, D-1$. Перейдем от многогранников T_k^j к их $\text{pr}_{\|e_D}$ -проекциям

$$P_k^j = \text{pr}_{\|e_D} T_k^j$$

– параллелепипедам, среди которых P_0^j – единичные $(D-1)$ -мерные кубы. Из (6.10) следует, что параллелепипеды P_1, \dots, P_{D-1} и P_k^j соединены цепью \mathcal{C}_{x_*} последовательно приложенных друг к другу кубов $P_0[l'_0]$ из разбиения $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$, т.е.

$$P_0[l'_0] \cap P'_- \neq \emptyset. \quad (6.12)$$

Векторы l'_0 из (6.12) имеют вид

$$l'_0 = v'_0 - l_{j_1} v'_{j_1} - \dots - l_{j_{(D-1)}} v'_{j_{(D-1)}} \quad (6.13)$$

с коэффициентами $l_{0k} = 0, 1, 2, \dots$, при этом $l_{01} + \dots + l_{0(D-1)} \geq 1$.

Данная цепь \mathcal{C}_{x_*} однозначно задает последовательность сдвигов на векторы

$$v'_0, -v'_{k_1}, -v'_{k_2}, \dots, \quad (6.14)$$

при этом $k_j = 1, \dots, D-1$ и $v'_1 = (1, \dots, 0), \dots, v'_{D-1} = (0, \dots, 1)$ – единичные векторы размерности $D-1$. Пусть в последовательности (6.14) вектор v'_k встречается c_k раз. Тогда для $c = (c_1, \dots, c_{D-1})$ точка

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_-, \quad (6.15)$$

где $x'_* = \text{pr}_{\|c_D} x_*$, имеет порядок

$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1},$$

так как в силу (4.4) выполняется равенство

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} + b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}) + (m_0 - c_1 m_1 - \dots - c_{D-1} m_{D-1}) \\ = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1}. \end{aligned}$$

Обозначим $m(c) = c_1 m_1 + \dots + c_{D-1} m_{D-1}$. Возможны три случая:

$$\begin{aligned} m(c) &< b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}, \\ m(c) &= b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}, \\ m(c) &> b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

В первом случае точка $x'_* = x'_{j(c)}$ из (6.15) имеет номер $j(c) > \mathbf{m}'$ и поэтому x_* не входит в орбиту $\text{Orb}_{\text{new}}^+(0, \mathbf{m}')$.

Во втором случае (6.16) точка

$$x'_* = x'_{\mathbf{m}'} \in P_-^{\text{int}} \quad (6.17)$$

– внутренняя точка из области P'_- . У нее будет максимальный номер $j(c) = \mathbf{m}'$, задающий границу для точек из орбиты $\text{Orb}'_{\text{new}}(0, \mathbf{m}')$, и по определению точка x_* в нее не входит.

Чтобы рассмотреть третий случай из (6.16), выделим в пространстве \mathbb{R}^{D-1} бесконечный брус P , параллельный вектору

$$v'_0 = (x_1, \dots, x_{D-1}) = \text{pr}_{\|e_D} v_0$$

имеющий сечение

$$\bar{T}_{v'_1, \dots, v'_{D-1}} = \text{pr}_{\|v'_0} (\text{pr}_{\|e_D} T_0) = \text{pr}_{\|v'_0} T_0^{D-1}, \quad (6.18)$$

где T_0^{D-1} – единичный $(D-1)$ -мерный куб, т.е. сечение (6.18) является замкнутым $(D-2)$ -мерным параллелепипедом

$$\bar{T}_{v'_1, \dots, v'_{D-1}} = \{ \lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_{D-1} v'_{D-1}; \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1 \},$$

натянутым на проекции единичных векторов $v'_1 = \text{pr}_{\|v'_0} v_1, \dots, v'_{D-1} = \text{pr}_{\|v'_0} v_{D-1}$. Брус P включает в себя

$$S'_{(D)}(v) = S_{(D)}(v) \cup P'_- \subset P \quad (6.19)$$

все множество из (5.13).

Пусть точка

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_- \quad (6.20)$$

для $c = (c_1, \dots, c_{D-1})$, удовлетворяющему третьему условию из (6.16). Имеем

$$x'_{\mathbf{m}'} = x'_{\mathbf{m}} + v'_0 \quad (6.21)$$

и

$$\begin{aligned} x'_* = x'_{j(c)} &= x'_{\mathbf{m}} + (b_1 v'_1 + \dots + b_{D-1} v'_{D-1}) - (c_1 v'_1 + \dots + c_{D-1} v'_{D-1}) + v'_0 \\ &= x'_{\mathbf{m}'} + (b_1 v'_1 + \dots + b_{D-1} v'_{D-1}) - (c_1 v'_1 + \dots + c_{D-1} v'_{D-1}). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Для точек $x = (x_1, \dots, x_{D-1}) \in \mathbb{R}^{D-1}$ определим *уровень*

$$l(x) = m_1 x_1 + \dots + m_{D-1} x_{D-1}.$$

В силу равенства (6.22) записываем

$$\begin{aligned} l(x'_*) &= l(x'_{j(c)}) \\ &= l(x'_{\mathbf{m}'}) + l(b_1 v'_1 + \dots + b_{D-1} v'_{D-1}) - l(c_1 v'_1 + \dots + c_{D-1} v'_{D-1}) \\ &= l(x'_{\mathbf{m}'}) + (b_1 m_1 + \dots + b_{D-1} m_{D-1}) - (c_1 m_1 + \dots + c_{D-1} m_{D-1}). \end{aligned}$$

Поскольку по условию выполняется третье неравенство из (6.16), то

$$l(x'_*) = l(x'_{j(c)}) < l(x'_{\mathbf{m}'}) \quad (6.23)$$

и, значит, точка (6.20) лежит ниже гиперплоскости

$$m_1 x_1 + \dots + m_{D-1} x_{D-1} = l(x'_{\mathbf{m}'}), \quad (6.24)$$

проходящей через точку $x'_{\mathbf{m}'}$.

Используя равенство (6.22), представим точку $x'_* = x'_{j(c)}$ из (6.20) в виде разности

$$x'_{j(c)} = x'_{\mathbf{m}'} - \Delta_c \quad (6.25)$$

с вектором отклонения

$$\begin{aligned} \Delta_c &= (c_1 v'_1 + \dots + c_{D-1} v'_{D-1}) - (b_1 v'_1 + \dots + b_{D-1} v'_{D-1}) \\ &= (c_1 - b_1, \dots, c_{D-1} - b_{D-1}), \end{aligned}$$

имеющим целочисленные координаты. В силу неравенства (6.23) уровень вектора Δ_c удовлетворяет условию

$$l(\Delta_c) > 0. \quad (6.26)$$

Введем функцию $p(\Delta_c)$, равную -1 или 0 , если хотя бы две координаты вектора Δ_c имеют разные знаки или хотя бы одна координата нулевая, и равную 1 в остальных случаях. В зависимости от значения $p(\Delta_c)$ разберем три возможных случая. Не уменьшая общности, далее будем следить за первыми двумя координатами $(D-1)$ -мерного вектора Δ_c , при необходимости переставляя их местами.

Случай 1:

$$p(\Delta_c) < 0. \quad (6.27)$$

Действуя проекцией

$$\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} : \mathbb{R}^{D-1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

на множества из (6.19), перейдем к их двумерным проекциям

$$S'_{(D, \dots, 3)}(v) = S_{(D, \dots, 3)}(v) \cup P_-'^2 \subset \mathbb{P}^2, \quad (6.28)$$

где $\mathbb{P}^2 = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} \mathbb{P}$ – бесконечная полоса, проходящая через точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ параллельно вектору $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} v'_0 = (x_1, x_2)$, а $P_-'^2 = \text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} P'_-$ – шестиугольник, разбитый на два параллелограмма.

В силу (6.17) точка $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}'}$ является внутренней для полосы \mathbb{P}^2 . Пусть для начала $\Delta_c = \pm(1, -1, \dots)$. Тогда точка $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ должна выйти за пределы полосы \mathbb{P}^2 , что противоречит условию (6.20). При других векторах вида $\Delta_c = (*, *, \dots)$ с условием (6.27) точка $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ тем более выходит из полосы \mathbb{P}^2 .

Случай 2:

$$p(\Delta_c) = 0. \quad (6.29)$$

Такой вектор Δ_c не может нулевым, т.к. иначе будет выполняться равенство из (6.16). Отсюда и условия (6.29) следует, что вектор Δ_c имеет как нулевые, так и ненулевые координаты, причем вторые одного знака. Этот знак не может быть отрицательным. В противном случае нарушается неравенство (6.26) и точка $x'_{j(c)}$ поднимется выше гиперплоскости (6.24).

Поэтому вектор Δ_c имеет вид $\Delta_c = (1, 0, \dots)$. При таком Δ_c проекция $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ точки (6.25) попадает в крайнюю левую вершину $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}'-m_1}$, где $x'_{\mathbf{m}'-m_1} = \text{pr}_{\|e_D} x_{\mathbf{m}'-m_1}$, шестиугольника P_-^2 из (6.28), т.е.

$$\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)} \notin P_-^{\prime 2 \text{ int}} \quad (6.30)$$

и, значит, $x_{j(c)} \notin T^{\prime \text{ int}}$. Если же первая координата у вектора Δ_c будет > 1 , то проекция $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ выйдет из полосы P^2 и снова будет выполняться (6.30).

Случай 3:

$$p(\Delta_c) > 0. \quad (6.31)$$

Из использованных в случае 2 рассуждений следует, что вектор Δ_c с условием (6.31) должен быть вида $\Delta_c = (1, 1, \dots)$. Теперь проекция $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{j(c)}$ попадает в крайнюю левую и нижнюю вершину $\text{pr}_{\|e_{D-1}, \dots, e_3} x'_{\mathbf{m}'-m_1-m_2}$ шестиугольника P_-^2 . Поэтому при условии (6.31) также будет выполняться свойство (6.30).

Итак, для случая $T_{k_b} = T_k$, где $k = 1, \dots, D-1$, лемма 6.3 доказана.

Случай II: $T_{k_b} = T_0$. Теперь цепь \mathcal{C}_{x_*} из (6.14) для $c = (c_1, \dots, c_{D-1})$ будет порождать точку

$$x'_* = x'_{j(c)} \in P'_- \quad (6.32)$$

порядка

$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \dots + (b_k - c_k - 1)m_k + \dots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1}, \quad (6.33)$$

если квадрат P_0^j прикладывается к последнему $(D-1)$ -мерному кубу из цепи \mathcal{C}_{x_*} по $(D-2)$ -мерной грани, ортогональной вектору v'_k . Обозначим

$$m(c) = c_1 m_1 + \dots + (c_k - 1)m_k + \dots + c_{D-1} m_{D-1} \quad (6.34)$$

в соответствии с тем, какое из условий в (6.33) выполняется. Далее следует рассмотреть три случая (6.16) по схеме (6.17)–(6.31), заменяя функцию $m(c)$ на модифицированную (6.34).

Таким образом, для случая $T_{k_b} = T_0$ лемма 6.3 также доказана, что вместе с предыдущим случаем полностью доказывает лемму 6.3. \square

6.4. Окончание доказательства теоремы 3.2. В теореме 3.2 утверждается, что $\{0, D\}$ -производная звезда $v' = v^{\{0, D\}}$ вкладывается $v' \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S в предположении вложимости $v \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ исходной приведенной звезды v .

При переходе на язык переключивающихся разверток $T = T(v)$ тора $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ с векторами переключивания v_0, v_1, \dots, v_D из звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ приведенное выше утверждение означает вложимость

$$T' \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \quad (6.35)$$

производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ была определена в (2.25), при условии $T \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$.

По критерию 2) теоремы 2.2 вложимость (6.35) равносильна условию

$$T'^{\text{int}} \cap \text{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \emptyset, \quad (6.36)$$

где $\text{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ – орбита (2.29) начальной точки $x_0 = 0$ порядка $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + m_0$ из (4.4). Условие же (6.36) посредством разбиений (4.5) и (4.17) сводится к проверке равенств (6.1), (6.5) и (6.8) из лемм 6.1–6.3, что и доказывает теорему 3.2. \square

§7. ВОЗВРАТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

7.1. Базисный симплекс и его симметрии. Возвратные отображения – это нормированные дифференцирования (1.9). Основной областью для нас будет замкнутый D -мерный симплекс $\Delta = \Delta_D$ с вершинами в точках $(0, \dots, 0), (1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$ из пространства \mathbb{R}^D . Обозначим через S_{Δ} группу его аффинных симметрий. Она сопряжена с группой метрических симметрий правильного симплекса $\Delta'_D \subset \mathbb{R}^{D+1}$ с вершинами $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ из \mathbb{R}^{D+1} . Чтобы явным образом описать указанную связь, зададим вложение

$$\begin{aligned} \text{em} : \mathbb{R}^D \supset \Delta_D &\xrightarrow{\sim} \Delta'_D \subset \mathbb{R}^{D+1} : \\ x = (x_1, \dots, x_D) &\mapsto x' = (x'_1, \dots, x'_D, x'_{D+1}), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $x'_i = x_i$ для $1 \leq i \leq D$ и $x'_{D+1} = 1 - x_1 - \dots - x_D$.

Симметрии правильного симплекса

$$\sigma : \Delta'_D \xrightarrow{\sim} \Delta'_D \quad (7.2)$$

задаются перестановками координат точек

$$x' \rightarrow \sigma x' = (x'_{\sigma(1)}, x'_{\sigma(2)}, \dots, x'_{\sigma(D+1)}), \quad (7.3)$$

где σ принадлежат группе перестановок S_{D+1} из $D + 1$ элемента $1, \dots, D + 1$. Симметрии (7.2) будут изометриями правильного симплекса Δ'_D .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Delta_D \ni x & \xrightarrow{\text{em}} & x' \in \Delta'_D \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \Delta_D \ni \sigma x & \xleftarrow{\text{pr}} & \sigma x' \in \Delta'_D \end{array} \quad (7.4)$$

Здесь pr обозначает *проекцию*

$$\text{pr} : \mathbb{R}^{D+1} \ni x' \rightarrow (x'_1, \dots, x'_D) \in \mathbb{R}^D, \quad (7.5)$$

а левая вертикальная стрелка в диаграмме (7.4) означает отображение, определяемое из условия коммутативности диаграммы равенством

$$\sigma x = \text{pr}(\sigma x'), \quad (7.6)$$

где $\sigma \in S_{D+1}$ и $x' = \text{em}(x)$. Используя диаграмму (7.4), можем отождествить

$$S_\Delta \xrightarrow{\sim} S_{D+1} : s = s_\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma \quad (7.7)$$

группу аффинных симметрий S_Δ симплекса Δ_D с группой перестановок S_{D+1} .

Отсюда вытекает, что группа симметрий S_Δ имеет порядок

$$\#S_\Delta = (D + 1)! \quad (7.8)$$

и все симметрии $s = s_\sigma$ из S_Δ распадаются на два класса собственных и несобственных симметрий

$$\text{sign}(s) = \pm 1 \quad (7.9)$$

в зависимости от знака $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{D+1} .

Согласно (7.6) и (7.1) в координатах $(x_1, \dots, x_D) \in \Delta_D$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_D = (0, \dots, 1)$ симметрии $s = s_\sigma$ из S_Δ записываются следующим явным образом:

$$s_\sigma(x_1, \dots, x_D) = (\sigma x_1, \dots, \sigma x_D), \quad (7.10)$$

где

$$\sigma x_i = \begin{cases} x_{\sigma(i)}, & \text{если } \sigma(i) \leq D, \\ 1 - x_1 - \dots - x_D, & \text{если } \sigma(i) = D + 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

7.2. Разбиения базисного симплекса. Выделим в симплексе $\Delta = \Delta_D$ открытые области

$$\Delta_k^{kl}, \Delta_l^{kl} \subset \Delta \quad (7.12)$$

с целыми индексами $0 \leq k < l \leq D$. Замыкания областей $\overline{\Delta}_k^{kl}, \overline{\Delta}_l^{kl}$ разбивают симплекс

$$\Delta = \overline{\Delta}_k^{kl} \cup \overline{\Delta}_l^{kl} \quad (7.13)$$

и пересекаются $\overline{\Delta}_k^{kl} \cap \overline{\Delta}_l^{kl} = \mu^{kl}$ по *медианной гиперплоскости* μ^{kl} , проходящей через концы векторов $e_{kl} = \frac{1}{2}(e_k + e_l)$ и e_m для всех $0 \leq m \leq D$, $m \neq k, l$, где $e_0 = (0, \dots, 0)$. Нижние индексы в Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\Delta}_k^{kl}$ и $\overline{\Delta}_l^{kl}$.

Таким образом, области (7.12) представляют собою открытые полусимплексы, замыкание объединения которых

$$\Delta^{kl} = \Delta_k^{kl} \sqcup \Delta_l^{kl} \quad (7.14)$$

совпадает со всем симплексом Δ и при этом $\Delta_k^{kl} \cap \Delta_l^{kl} = \emptyset$.

7.3. Нормированные дифференцирования звезд. Согласно условию (1.4) из критерия 1.1, каждая точка $x \in \Delta^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, \dots, w_D\}$ с лучами

$$w_m = e_m - x, \quad (7.15)$$

выходящими из центра x в вершины симплекса Δ с соответствующими номерами $0, 1, \dots, D$.

При таком выборе центра существует производная звезда

$$w' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_D\}. \quad (7.16)$$

Если $x \in \Delta_k^{kl}$, то лучи в (7.16) имеют вид

$$w'_k = w_k, \quad w'_l = w_k + w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l; \quad (7.17)$$

если же $x \in \Delta_l^{kl}$, то — вид

$$w'_k = w_k + w_l, \quad w'_l = w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l. \quad (7.18)$$

Из условия $x \in \Delta^{kl}$ вытекает, что векторы

$$e'_1 = w'_1 - w'_0, \dots, e'_D = v'_D - v'_0 \quad (7.19)$$

образуют базис пространства \mathbb{R}^D . Пусть A^{kl} – матрица перехода

$$e' = eA^{kl} \quad (7.20)$$

от базиса $\{e_1, \dots, e_D\}$ к базису $\{e'_1, \dots, e'_D\}$ из (7.19). В равенстве (7.20) слева указана строка $e' = (e'_1 \dots e'_D)$, а справа – произведение строки $e = (e_1 \dots e_D)$ на $D \times D$ -матрицу A^{kl} . Данная матрица имеет две специализации

$$A^{kl} = A_k^{kl} \quad \text{или} \quad A_l^{kl} \quad (7.21)$$

в зависимости от принадлежности x области Δ_k^{kl} или Δ_l^{kl} :

для $1 \leq k < l \leq D$ –

$$A_k^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1_{kk} & 1 - x_k & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0_{lk} & 1 - x_l & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & -x_D & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

$$A_l^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 - x_k & 0_{kl} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 - x_l & 1_{ll} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & -x_D & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.23)$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq D$ –

$$A_0^{0l} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 - x_l & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & -x_D & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$A_l^{0l} = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 & & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & & x_2 \\ & & \ddots & \\ -1+x_l & -1+x_l & & x_l & -1+x_l \\ & & & & \ddots & \\ x_D & & & x_D & & 1+x_D \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

В координатах формула перехода (7.20) примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_D \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через \mathcal{A}^{kl} . С помощью обратных матриц \mathcal{A}^{kl} можно для производной звезды w' из (7.16) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_D\} \quad (7.27)$$

с центром $x' = (x'_1, \dots, x'_D)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_D \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ \vdots \\ -w'_{0D} \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

где в правом столбце использованы координаты вектора

$$w'_0 = (w'_{01}, \dots, w'_{0D})$$

из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, \dots, w'_D\}$, определенной в (7.16). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным $w'_0 = w_0$, то в формуле (7.26) выбирается центр $x = (x_1, \dots, x_D) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w . Нормированная звезда \mathbf{w}' , как и w , имеет лучи

$$\mathbf{w}'_m = e_m - x' \quad (7.29)$$

для $0 \leq m \leq D$, выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины симплекса Δ . Определение (7.27) звезды \mathbf{w}' корректно, поскольку по определению (1.4) точка x' принадлежит внутренней области Δ^{int} треугольника Δ .

В явном виде координаты $(x'_1, \dots, x'_D) = \delta^{kl}(x_1, \dots, x_D)$ центра x' нормированной звезды \mathbf{w}' из (7.27) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

для $1 \leq k < l \leq D$ –

$$\begin{aligned}\delta_k^{kl}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{1-x_l}, \dots, \frac{x_k-x_l}{1-x_l}, \dots, \frac{x_D}{1-x_l} \right), \\ \delta_l^{kl}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{1-x_k}, \dots, \frac{x_l-x_k}{1-x_k}, \dots, \frac{x_D}{1-x_k} \right),\end{aligned}\quad (7.30)$$

где элементы $\frac{x_k-x_l}{1-x_l}$ и $\frac{x_l-x_k}{1-x_k}$ стоят соответственно на k и l местах;
для $k = 0$ и $1 \leq l \leq D$ –

$$\begin{aligned}\delta_0^{0l}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{1-x_l}, \dots, \frac{x_D}{1-x_l} \right), \\ \delta_l^{0l}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{x_1+\dots+x_D}, \dots, \frac{x_1+\dots+2x_l+\dots+x_D-1}{x_1+\dots+x_D}, \dots, \frac{x_D}{x_1+\dots+x_D} \right),\end{aligned}\quad (7.31)$$

где в последнем случае средний элемент стоит на l месте.

Преобразования (7.30), (7.31) представляют собою многомерный аналог одномерных [8], [9] и двумерных возвратных отображений [11].

7.4. Возвратные отображения. Дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) задают

$$\Delta \xrightarrow{\delta^{kl}} \Delta : x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \quad (7.32)$$

$\frac{(D+1)D}{2}$ отображений δ^{kl} , нумеруемых индексами $0 \leq k < l \leq D$:

$$\delta^{kl}(x) = \begin{cases} \delta_k^{kl}(x), & \text{если } x \in \Delta_k^{kl}, \\ \delta_l^{kl}(x), & \text{если } x \in \Delta_l^{kl}, \end{cases} \quad (7.33)$$

где Δ_k^{kl} и Δ_l^{kl} – открытые области из базисного симплекса Δ , определенные в (7.12). Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\Delta^{kl} \subset \Delta$ из (7.14) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в симплексе Δ , исключая его границы и медианную гиперплоскость μ^{kl} , определенную в (7.13).

§8. ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

8.1. Матрицы возвратных отображений. На языке $(D+1, D+1)$ -матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,D+1} \\ & \dots & \\ a_{D+1,1} & \dots & a_{D+1,D+1} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) удобно переписать в свернутом виде

$$M \langle x \rangle = \left(\frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda_{D+1}(M, x)}, \dots, \frac{\lambda_D(M, x)}{\lambda_{D+1}(M, x)} \right), \quad (8.1)$$

где

$$\lambda_i(M, x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{iD}x_D + a_{i,D+1} \quad (8.2)$$

– линейные формы. В данном случае – неоднородные формы, поскольку мы здесь неявно используем специализацию $x_{D+1} = 1$, которая будет объяснена далее в п. 4.5. Последнюю форму $\lambda(M, x) = \lambda_{D+1}(M, x)$ из (8.2) назовем *фактором-автоморфности* отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$.

В матричной форме (8.1) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1\langle M_2\langle x \rangle \rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x \rangle, \quad (8.3)$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначается произведение матриц M_1 и M_2 .

Поскольку $E_{D+1}\langle x \rangle = x$ для единичной матрицы E_{D+1} порядка $D+1$, то из свойства (8.3) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x \rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x' \rangle. \quad (8.4)$$

Согласно определению (8.1), дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) имеют следующие матрицы:

для $0 < k < l \leq D -$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_k^{kl} &= \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & -1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_l^{kl} &= \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (8.5)$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq D -$

$$\widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2_{ll} & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

где $\mathbf{1} = (1 \dots 1)$ обозначают единичные строки соответствующих длин. Все матрицы (8.5), (8.6) имеют целые коэффициенты и единичный определитель и, следовательно, они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

8.2. Обратные возвратные отображения. Отображения δ^{kl} являются дважды накрывающими симплекс Δ , а их специализации δ_*^{kl} задают уже биекции

$$\delta_k^{kl} : \Delta_k^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\mathrm{int}}, \quad \delta_l^{kl} : \Delta_l^{kl} \xrightarrow{\sim} \Delta^{\mathrm{int}}. \quad (8.7)$$

Поэтому для них существуют *обратные возвратные отображения*

$$\partial_k^{kl} : \Delta^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_k^{kl}, \quad \partial_l^{kl} : \Delta^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \Delta_l^{kl}. \quad (8.8)$$

Матрицами для отображений (8.8) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (8.5), (8.6):

для $0 < k < l \leq D -$

$$\widehat{\partial}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

$$\widehat{\partial}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

для $k = 0$ и $1 \leq l \leq D -$

$$\widehat{\partial}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0_{ll} & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ -\mathbf{1} & -1 & -\mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ_*^{kl} имеют унимодулярные матрицы (8.5), (8.6). Поэтому матрицы (8.9), (8.10) обратных отображений ∂_*^{kl} снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения ∂_*^{kl} запишутся в следующем виде:

для $1 \leq k < l \leq D -$

$$\begin{aligned} \partial_k^{kl}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{x_{l+1}}, \dots, \frac{x_k+x_l}{x_{l+1}}, \dots, \frac{x_D}{x_{l+1}} \right), \\ \partial_l^{kl}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{x_{k+1}}, \dots, \frac{x_k+x_l}{x_{k+1}}, \dots, \frac{x_D}{x_{k+1}} \right), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где элементы $\frac{x_k+x_l}{x_{l+1}}$ и $\frac{x_k+x_l}{x_{k+1}}$ стоят соответственно на k и l местах; для $k = 0$ и $1 \leq l \leq D -$

$$\begin{aligned} \partial_0^{0l}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{x_{l+1}}, \dots, \frac{x_D}{x_{l+1}} \right), \\ \partial_l^{0l}(x_1, \dots, x_D) &= \left(\frac{x_1}{s+2}, \dots, \frac{s-x_l+1}{s+2}, \dots, \frac{x_D}{s+2} \right), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где в последнем случае средний элемент $\frac{s-x_l+1}{s+2}$ стоит на l месте и $s = x_1 + \dots + x_D$.

8.3. Матрицы симметрий базисного симплекса. Симметрии $s = s_\sigma$ из группы S_Δ базисного симплекса $\Delta = \Delta_D$, определяемые формулой (7.10), также можно представить в матричной форме (8.1). Для них $(D+1, D+1)$ -матрицами будут

$$\widehat{s} = \widehat{s}_\sigma = \begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & 1_{i,\sigma(i)} & \dots & 0 & 0_{i,D+1} & \\ -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & 1_{j,D+1} & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1_{D+1,D+1} & \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Здесь i -строка состоит из 0, кроме элемента $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $\sigma(i)$ месте в случае $\sigma(i) \leq D$. Если $\sigma(j) = D+1$, то строка с номером $j \leq D$ принимает иной вид $(-1, \dots, -1, 1)$. Последняя $(D+1)$ -строка для всех $\sigma \in S_{D+1}$ имеет вид $(0, \dots, 0, 1)$.

Матрицы (8.13) симметрий симплекса Δ_D отличаются от матриц возвратных отображений (8.5), (8.6) нижней строкой $(0, \dots, 0, 1)$. Их определители вычисляются по формуле

$$\det(\widehat{s}_\sigma) = \text{sign}(\sigma), \quad (8.14)$$

где справа указан знак $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{D+1} . Поэтому все матрицы симметрий (8.13) принадлежат группе унимодулярных матриц $\text{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

Кроме самих матриц (8.13) нам потребуются еще их *однородные части* – верхние левые $(D \times D)$ -блоки:

$$\check{s} = \check{s}_\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 1_{i,\sigma(i)} & \cdots & 0_{i,D} & \\ \cdots & & \cdots & & & \\ -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1_{j,D} & \\ \cdots & & \cdots & & & \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Матрицы (8.15) порождают группу $S_{\check{\Delta}}$ аффинных (однородных) симметрий центрированного симплекса $\check{\Delta} = \check{\Delta}_D$, получающегося сдвигом базисного симплекса $\Delta = \Delta_D$ на вектор $(-\frac{1}{D+1}, \dots, -\frac{1}{D+1})$. Следовательно, симплекс $\check{\Delta}$ имеет центр в начале координат $(0, \dots, 0)$ – неподвижной точке всех симметрий (8.15).

8.4. Полу группа \mathcal{D} . Определим *полугруппу* \mathcal{D}_δ преобразований базисного симплекса Δ , порожденную всеми возвратными отображениями δ^{kl} , где $0 \leq k < l \leq D$, а также определим *расширенную полугруппу* \mathcal{D} , добавляя к \mathcal{D}_δ все симметрии симплекса $s \in S_\Delta$. Каждое преобразование $\delta \in \mathcal{D}$ имеет свою *область определения* $\Delta(\delta) \subset \Delta$.

Пусть δ имеет разложение $\delta = \dots \delta^{kl} \dots s \dots$ и x – любая точка из области определения $\Delta(\delta)$. Тогда выбранная точка x однозначно задает *специализацию*

$$\delta_* = \delta_*(x) = \dots \delta_*^{kl} \dots s \dots \quad (8.16)$$

преобразования δ , где для каждого сомножителя δ^{kl} , входящего в разложение (8.16), указан нижний индекс $*$ = k или l . Поскольку индекс может принимать любое из двух указанных значений, то фиксированное преобразование δ может породить 2^p различных *специализаций* δ_* , где p – количество сомножителей вида δ^{kl} из разложения (8.16). Любая из таких реализаций δ_* будет, в общем случае, иметь уже другую меньшую *область определения* $\Delta(\delta_*) \subsetneq \Delta(\delta)$ по сравнению с областью определения $\Delta(\delta)$ исходного преобразования δ .

Пусть, например, специализация (8.16) имеет вид $\delta_* = \delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}$. Тогда принадлежность точки x области определения данной реализации $\Delta(\delta_*)$ означает, что определены следующие точки:

$$x_1 = \delta_{k_1}^{k_1 l_1}(x), \quad x_2 = \delta_{l_2}^{k_2 l_2}(x_1),$$

т.е. $x \in \Delta(\delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \Delta_{k_1}^{k_1 l_1}$ и $x_1 \in \Delta(\delta_{l_2}^{k_2 l_2}) = \Delta_{l_2}^{k_2 l_2}$, где области Δ_* были определены в (7.12). С помощью матриц (8.9), (8.10) обратных отображений ∂_k^{kl} из (8.8) и дробно-линейных преобразований (8.1) область определения специализации δ_* можно записать в явном виде

$$\Delta(\delta_*) = \Delta(\delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \widehat{\partial}_{k_1}^{k_1 l_1} \langle \widehat{\partial}_{l_2}^{k_2 l_2} \langle \Delta^{\text{int}} \rangle \rangle. \quad (8.17)$$

По аналогии с (8.17), в общем случае специализации (8.16) область определения $\Delta(\delta_*)$ может быть представлена в виде

$$\Delta(\delta_*) = \dots \langle \widehat{s}^{-1} \langle \dots \widehat{\partial}_*^{kl} \langle \dots \langle \Delta^{\text{int}} \rangle \rangle \rangle \rangle, \quad (8.18)$$

где \widehat{s} – матрицы (8.13) симметрий s треугольника Δ .

8.5. Связь между дробно-линейными и проективными преобразованиями. Пусть

$$\mathbb{P}^D = \{\mu \cdot \widehat{x}; \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^{D+1} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbb{R}^\times\}$$

– двумерное проективное пространство над полем вещественных чисел \mathbb{R} . По определению оно состоит из классов коллинеарных векторов

$$\widetilde{x} = \{\mu \cdot \widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}^\times\}. \quad (8.19)$$

Здесь через $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ обозначена коммутативная группа ненулевых вещественных чисел.

Любая матрица M из линейной группы $\text{GL}_{D+1}(\mathbb{R})$ задает проективное преобразование

$$M : \widetilde{x} \mapsto \widetilde{x}_M \quad (8.20)$$

пространства \mathbb{P}^D , где

$$\widetilde{x}_M = M\widetilde{x} = \{\mu \cdot M\widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0\}$$

и $M\widehat{x}$ обозначает произведение $(D+1, D+1)$ -матрицы M на матрицу-

столбец $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{D+1} \end{pmatrix}$. Проективная группа преобразований получается из группы $\text{GL}_{D+1}(\mathbb{R})$ ее факторизацией

$$\text{PGL}_{D+1}(\mathbb{R}) = \text{GL}_{D+1}(\mathbb{R}) / \mathbb{R}^\times.$$

Дробно-линейные преобразования (8.1) и проективные преобразования (8.20) пространства \mathbb{P}^D связаны между собою следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^D \ni x & \xrightarrow{M\langle \cdot \rangle} & x_M \in \mathbb{R}^D \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{P}^D \ni \tilde{x} & \xrightarrow{M} & \tilde{x}_M \in \mathbb{P}^D, \end{array} \quad (8.21)$$

где обозначили $x_M = M\langle x \rangle$, а вертикальные стрелки обозначают отображение

$$\sim: x \mapsto \tilde{x},$$

которое переводит точку $x = (x_1, \dots, x_D)$ в класс \tilde{x} из (8.19), содержащий элемент \hat{x} , представленный в виде столбца

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

8.6. Иррациональные точки. Аналогично определению (2.21) для векторов, точку $x = (x_1, \dots, x_D)$ из \mathbb{R}^D назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, \dots, x_D \text{ линейно независимы над кольцом } \mathbb{Z}. \quad (8.23)$$

Лемма 8.1. *Если точка $x = (x_1, \dots, x_D)$ иррациональна (8.23) и матрица M принадлежит целочисленной унимодулярной группе $\text{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$, то*

- 1) для точки x определен ее образ $M\langle x \rangle$ относительно дробно-линейного отображения (8.1); и
- 2) соответствующая точка $x' = M\langle x \rangle$ снова будет иррациональной.

Доказательство. 1. Используя для $x' = (x'_1, \dots, x'_D) = M\langle x \rangle$ запись (8.1), имеем

$$x'_1 = \frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda(M, x)}, \dots, x'_D = \frac{\lambda_D(M, x)}{\lambda(M, x)} \quad (8.24)$$

со знаменателем

$$\lambda(M, x) = \lambda_{D+1}(M, x) = a_{D+1,1}x_1 + \dots + a_{D+1,D}x_D + a_{D+1,D+1}, \quad (8.25)$$

равному фактору-автоморфности (8.2) отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$. Поскольку $x = (x_1, \dots, x_D)$ – иррациональная точка и матрица M имеет целочисленные коэффициенты a_{ij} , то $\lambda(M, x) \neq 0$ по определению (8.23), т.к. коэффициенты в (8.25) не могут все быть равными нулю. Таким образом, точка $x' = M\langle x \rangle$ существует.

2. Так как фактор-автоморфности $\lambda(M, x) \neq 0$, то условие линейно независимости $x'_1, \dots, x'_D, 1$ над \mathbb{Z} расширения чисел из (8.24) равносильно линейной независимости другой совокупности чисел

$$\lambda_1(M, x), \dots, \lambda_D(M, x), \lambda(M, x),$$

а это вытекает из равенств (8.2) и линейной независимости строк у матрицы $M \in \text{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$. \square

§9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

9.1. Неподвижные точки и собственные значения.

Теорема 9.1. 1. Пусть x является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы \mathcal{D} с областью определения $\Delta(\delta)$, т.е. выполняются условия

$$x \in \Delta(\delta) \tag{9.1}$$

и

$$\delta x = x. \tag{9.2}$$

Тогда имеет место матричное равенство

$$M\hat{x} = \lambda\hat{x} \tag{9.3}$$

для $\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ с вещественным собственным значением $\lambda \neq 0$. Здесь

$$M = M_{\delta_*} = M_s \cdots M_2 M_1 \tag{9.4}$$

– матрица специализации $\delta_* = \delta_*(x)$ отображения δ , определяемой точкой x .

Доказательство. Из (9.1) и определений (7.32), (7.33), (8.1) следует равенство

$$M\langle x \rangle = x, \tag{9.5}$$

из которого вытекает матричное равенство (9.3) с собственным числом $\lambda = \lambda(M, x)$, равным фактору-автоморфности (8.25) отображения $x \mapsto M\langle x \rangle$. В силу условия (9.1) имеем $\lambda(M, x) \neq 0$, что вместе с равенством (8.25) доказывает теорему. \square

Пусть $x = (x_1, \dots, x_D)$ – произвольная точка с координатами из \mathbb{R} . Обозначим через

$$F_x = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_D) \quad (9.6)$$

расширение поля рациональных чисел \mathbb{Q} добавлением к нему чисел x_1, \dots, x_D . Данное расширение состоит из всех чисел вида $\frac{f(x_1, \dots, x_D)}{g(x_1, \dots, x_D)}$, где f и g являются многочленами от D переменных с коэффициентами из поля \mathbb{Q} . Множество (9.6) также будет полем. Определим *степень* (над \mathbb{Q}) точки x равенством

$$\deg(x) = \deg F_x, \quad (9.7)$$

где справа в (9.7) указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x , рассматриваемого как векторное пространство на поле \mathbb{Q} . Если $\deg(x) = 1$, то, очевидно, точка x имеет координаты из \mathbb{Q} .

Теорема 9.2. *Пусть точка x будет иррациональной (8.23). Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из подгруппы \mathcal{D} , то ее степень*

$$\deg(x) = D + 1. \quad (9.8)$$

Доказательство. По теореме 9.1 имеет место равенство

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

где M – матрица из унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$, x_1, \dots, x_D – координаты точки $x = (x_1, \dots, x_D)$ и $\lambda \neq 0$.

Из определения (8.23) иррациональной точки следует $x \neq (0, \dots, 0)$, поэтому λ из (9.9) является корнем *характеристического уравнения*

$$\mathrm{Char}_M(\lambda) = \det(\lambda E_{D+1} - M) = 0 \quad (9.10)$$

степени $D+1$ с целыми коэффициентами, а из равенства (9.10) следует, что x_1, \dots, x_D принадлежат полю $\mathbb{Q}(\lambda)$ степени

$$\deg \mathbb{Q}(\lambda) \leq D + 1. \quad (9.11)$$

С другой стороны, из равенства (9.9) для поля F_x из (9.6) вытекает включение

$$F_x \subseteq \mathbb{Q}(\lambda). \quad (9.12)$$

Далее, поскольку точка x иррациональная (8.23), то в силу определения (9.7) будет выполняться неравенство

$$\deg F_x \geq D + 1. \quad (9.13)$$

Теперь, сопоставляя (9.11) и (9.12), (9.13), выводим нужное равенство (9.8). \square

§10. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НОРМИРОВАНИЯ ЗВЕЗДЫ

10.1. Общий случай. Пусть дано некоторое отображение δ из полу группы \mathcal{D} и точка x из области определения $\Delta(\delta)$ отображения δ .

Далее будем предполагать, что специализация δ_* , задаваемая точкой x , имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \quad (10.1)$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ — произвольные возвратные отображения (7.30), (7.31). В отличие от рассмотренного ранее случая (9.4) из теоремы 9.1, отображение (10.1) уже не содержит симметрий $\delta_i = s_i$ из группы S_Δ .

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \dots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \dots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} \end{array} \quad (10.2)$$

Здесь использовали обозначения:

$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ — начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)}$;

$\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ — звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., ...;

$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ — звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$.

Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (10.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\dots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \quad (10.3)$$

из p возвратных отображений δ_* . Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$ будут, согласно определению (7.27), нормированными звездами.

Нижняя строка диаграммы (10.2) содержит обычные (см. определение 1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \dots, p$, где

$$v = v^{(0)} = \mathbf{w};$$

$v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ – производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., ...;

$v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ – производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$.

Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \dots)^{\sigma_p} = v^\sigma \quad (10.4)$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p,$$

ассоциированную с отображением δ_* из (10.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (10.2). Первая стрелка обозначает тождественное отображение id , т.е.

$$v = \text{id } \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Далее

$A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ – матрица (7.22)-(7.25), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;

$A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ – матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., ...;

последняя матрица

$$A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \dots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)}) \quad (10.5)$$

определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(p-1)}$.

Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)} : \mathbf{w}^{(i)} \xrightarrow{\sim} v^{(i)} \quad (10.6)$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (10.2) для всех $i = 1, \dots, p$.

Лемма 10.1. *Диаграмма (10.2) является коммутативной.*

Доказательство. Коммутативность первого левого блока диаграммы (10.2) следует из определения матриц (7.22)-(7.25).

Чтобы доказать коммутативность первых двух левых блоков диаграммы (10.2), рассмотрим следующую коммутативную локальную

диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & w^{(2)} & \xleftarrow{A_2} & \mathbf{w}^{(2)} \\
 \downarrow A_1 & & \downarrow A_1 & \swarrow A_1 A_2 & \\
 v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & v^{(2)} & &
 \end{array} \quad (10.7)$$

где $w^{(2)} = \mathbf{w}^{(1)\sigma_2}$ – ненормированная звезда и A_i для $i = 1, 2$ – аффинные отображения с матрицами $A_*^{k_i l_i}(x^{(i-1)})$.

Коммутативность левого блока диаграммы (10.7) следует из аффинности отображения A_1 и того факта, что σ_2 -дифференцирование звезд $\mathbf{w}^{(1)}$ и $v^{(1)}$ сводится к сложению A_1 -эквивалентных пар векторов $\mathbf{w}_{k_2}^{(1)}, \mathbf{w}_{l_2}^{(1)} \in \mathbf{w}^{(1)}$ и $v_{k_2}^{(1)}, v_{l_2}^{(1)} \in v^{(1)}$.

Коммутативность же правого блока диаграммы (10.7) вытекает из аффинности отображения A_2 , которая снова следует из определения матриц (7.22)-(7.25), и определения наклонной стрелки как композиции отображений A_2 и A_1 в указанном порядке.

Теперь коммутативность второго блока диаграммы (10.2) выводим из коммутативности диаграммы (10.7).

Следующие блоки диаграммы (10.2) рассматриваются по той же самой схеме. \square

10.2. Периодический случай. Предположим, что найдется такое $p > 0$, для которого нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (10.2) будет симметричной

$$\mathbf{w}^{(p)} = \check{s}\mathbf{w} \quad (10.8)$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно некоторого преобразования \check{s} из группы $S_{\hat{\Delta}}$ аффинных однородных симметрий (8.15) базисного симплекса $\hat{\Delta}$. В этом случае будем говорить, что звезда \mathbf{w} *периодична* относительно отображения δ из (10.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (10.4). Если $p > 0$ – минимальное число с условием (10.8), то p будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$.

Заметим, что однородные преобразования \check{s} из (8.15) действуют на векторы звезды \mathbf{w} , а преобразования s из группы S_{Δ} аффинных неоднородных симметрий (8.13) действуют на точки симплекса Δ . В формуле (10.8) звезда \mathbf{w} , рассматривается как совокупность $D + 1$ векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_D$.

Поскольку

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} \quad (10.9)$$

по формуле (10.6), то с помощью равенства (10.8) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)} \mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)} \check{s} \mathbf{w}. \quad (10.10)$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A} v, \quad (10.11)$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)} \check{s}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $A_s^{(p)} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (10.11) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (10.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v . По этой причине назовем \mathbf{A} *калибровочной матрицей* периодической звезды v .

Далее мы хотим воспользоваться равенством (10.11) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\} \quad (10.12)$$

с периодом p , где

$$\xi_1 = \sigma_1, \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \dots, \quad \xi_p = \sigma_p \check{s}, \quad \xi_{p+1} = \sigma_1, \quad \dots \quad (10.13)$$

С помощью последовательности (10.12) определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для } i \geq 1, \quad (10.14)$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \dots$. Чтобы не вводить нового термина, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v .

Теорема 10.1. Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из (10.4) с периодом p , и пусть \mathbf{A} — ее калибровочная матрица, определенная в (10.11). Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ справедлива формула

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \quad (10.15)$$

если $i = at + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$.

Доказательство. Формула (10.15) выполняется для $i = 0, 1, \dots, p - 1$ по определению (10.14), а для $i = p$ — по формуле (10.11).

Далее рассуждаем по индукции. Пусть формула (10.15) выполняется для $j < i + 1$. По определению (10.14) и по формуле (10.15) имеем

$$v^{(i+1)} = (v^{(i)})^{\sigma_{i+1}} = (\mathbf{A}^a v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \quad (10.16)$$

Используя, доказанную в [4], формулу коммутирования

$$(Aw)^\zeta = A(w^\zeta) \quad (10.17)$$

аффинных отображений A и дифференцирований ζ , из (10.16) получим

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a (v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \quad (10.18)$$

Сначала предположим, что $b \leq p - 2$. Тогда $i + 1 = at + (b + 1)$, где $b + 1 \leq p - 1$. Поэтому $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(b+1)}$, и из равенства (10.18) следует

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a v^{(b+1)} \quad (10.19)$$

– формула (10.15) для $i + 1$.

Пусть теперь $b = p - 1$ и, значит, $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(p)}$. Поэтому в силу формулы (10.11) можем записать $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = \mathbf{A}v$. Отсюда и равенства (10.18) выводим

$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^{a+1}v. \quad (10.20)$$

В рассматриваемом случае будет выполняться равенство $i + 1 = (a + 1)p$ и, значит, согласно (10.20) формула (10.15) будет справедлива и для порядка $i + 1$, когда $i = ap + (p - 1)$. \square

§11. ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ТОРЕ

11.1. Генерации вкладывающихся разверток. По определению (3.1) и теореме 3.1 производные звезды $v^{(i)}$ из (10.14) вкладываются

$$v^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D \quad (11.1)$$

в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. По соглашению (2.25) это означает, что порождаемые ими развертки тора или иначе – параллелоэдры –

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}) \quad (11.2)$$

вкладываются в тор

$$T^{(i)} \xrightarrow{\text{em}} \mathbb{T}^D. \quad (11.3)$$

Из построения (10.14) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_D^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D} \quad (11.4)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \dots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha \in \mathbb{R}^D$ –

вектор сдвига $S = S_\alpha$ тора \mathbb{T}^2 из (2.9) и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.9). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + \dots + m_D^{(i)} \quad (11.5)$$

назовем *порядком* производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\text{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}; \quad j=1, 2, \dots, m^{(i)}-1\}. \quad (11.6)$$

11.2. Радиусы аффинно преобразованных множеств. Рассмотрим следующие общие задачи: оценить сверху радиусы множеств AT и A_1A_2T в терминах невырожденных $D \times D$ -матриц A и A_1, A_2 . Как обычно, радиус $\varrho(T)$ множества $T \subset \mathbb{R}^D$ равен минимальному из радиусов окружностей, содержащих в себе указанное множество.

Начнем с равенства

$$\max_{x \neq 0} \frac{|Ax|^2}{|x|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{A^*[x]}{|x|^2}. \quad (11.7)$$

Здесь $|x| = (x_1^2 + \dots + x_D^2)^{1/2}$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_D)$ и $A^*[x] = x^t A^* x$ — положительно определенная квадратичная форма с симметричной матрицей $A^* = A^t \cdot A$, где A^t обозначает транспонированную матрицу для A .

Проводя подходящую замену $x = Oy$ с матрицей O из ортогональной группы $O_D(\mathbb{R})$, приведем квадратичную форму $A^*[x]$ к главным осям или сумме квадратов

$$A^*[x] = A^*[Oy] = B[y] = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_D y_D^2. \quad (11.8)$$

Матрица A^* подобна диагональной матрице

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_D \end{pmatrix},$$

поэтому коэффициенты $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_D > 0$ будут собственными значениями матрицы A^* . Арифметические значения квадратных корней $\lambda_1^{1/2} > 0, \dots, \lambda_D^{1/2} > 0$ называются *сингулярными числами* матрицы A , а наибольший из них

$$\|A\| = \max\{\lambda_1^{1/2}, \dots, \lambda_D^{1/2}\} \quad (11.9)$$

определяет *спектральную норму* $\|A\|$ матрицы A .

С ее помощью, подставляя (11.8) в (11.7), получаем формулу

$$\max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \|A\|,$$

из которой получаем нужную оценку для радиуса

$$\varrho(AT) \leq \|A\| \varrho(T). \quad (11.10)$$

Далее поступаем аналогично:

$$\max_{x \neq 0} \frac{|A_1 A_2 x|}{|x|} = \max_{x \neq 0} \frac{|A_1 A_2 x|}{|A_2 x|} \frac{|A_2 x|}{|x|} \leq \max_{y \neq 0} \frac{|A_1 y|}{|y|} \max_{x \neq 0} \frac{|A_2 x|}{|x|},$$

где произвели замену $y = A_2 x$. Отсюда выводим оценку

$$\max_{x \neq 0} \frac{|A_1 A_2 x|}{|x|} \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|,$$

и поэтому выполняется неравенство

$$\varrho(A_1 A_2 T) \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\| \varrho(T). \quad (11.11)$$

11.3. Радиусы и площади производных параллелоэдров. Применим доказанную формулу (11.11) к оценке метрических характеристик производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (11.2).

Сначала найдем радиус исходного параллелоэдра $T(v)$.

Лемма 11.1. *Если параллелоэдр $T(v)$ порождается звездой*

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\},$$

то его радиус $\varrho(T(v))$ вычисляется по формуле

$$\varrho(T(v)) = \frac{1}{2} \max_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D} |\varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_D v_D|. \quad (11.12)$$

Здесь вертикальные скобки обозначают длину вектора и максимум в (11.12) вычисляется по всем наборам $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_D\}$, таким что $\varepsilon_i = \pm 1$, при этом количество отрицательных ε_i меняется в интервале $[1, \dots, \frac{D+1}{2}]$.

Доказательство. Из определения (2.8) следует, что параллелоэдр $T(v)$ имеет вершины

$$v_{k_1} + \dots + v_{k_i}, \quad (11.13)$$

где $0 \leq k_1 < \dots < k_i \leq D$ и $1 \leq i \leq D$. Поэтому его центром будет

$$c(T(v)) = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_D). \quad (11.14)$$

Радиус же параллелоэдра $\varrho(T(v))$ равен максимальной длине векторов вида $w - c(T(v))$, где w пробегает все вершины (11.13). Отсюда выводим формулу (11.12). \square

Многогранник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}_{L^{(i)}}^D = \mathbb{R}^D / L^{(i)}$ для решетки

$$L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, \dots, l_D^{(i)}] \quad (11.15)$$

с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, \dots, D$, где $v_k^{(i)}$ — лучи звезды $v^{(i)}$ из (11.1). Поэтому объем $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ равна

$$s(T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & \cdots & l_{1D}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{D1}^{(i)} & \cdots & l_{DD}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \quad (11.16)$$

площади фундаментальной области решетки (11.15), где $l_{kl}^{(i)}$ — координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, \dots, D$.

Лемма 11.2. 1. Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ выполняется следующая оценка

$$\varrho(T^{(i)}) \leq \|\mathbf{A}\|^a \varrho(T^{(b)}), \quad (11.17)$$

если $i = ar + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, r - 1$. Здесь $\|\mathbf{A}\|$ — спектральная норма (11.9) калибровочной матрицы \mathbf{A} звезды v из (10.11) и радиусы $\varrho(T^{(b)})$ вычисляются по формуле (11.12).

2. Объем $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (11.18)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам

$$0 < |\det \mathbf{A}| < 1, \quad (11.19)$$

и площади $s(T^{(b)})$ находятся по формуле (11.16).

Доказательство. По теореме 10.1 звезды $v^{(i)}$ и $v^{(b)}$ связаны равенством $v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}$ и, значит, порождаемые ими многогранники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ и $T^{(b)} = T(v^{(b)})$ аффинно подобны

$$T(v^{(i)}) = \mathbf{A}^a T(v^{(b)}). \quad (11.20)$$

Отсюда и (11.11) следует неравенство (11.17). Формула (11.18) вытекает из подобия (11.20) и равенства (11.16).

Для доказательства же неравенств (11.19) достаточно заметить, что по построению (10.5), (10.11) калибровочной матрицы \mathbf{A} она состоит из сомножителей A_*^{kl} , имеющих соответственно определители

$$\det A_k^{kl} = 1 - x_l, \quad \det A_l^{kl} = 1 - x_k, \quad \det A_0^{kl} = 1 - x_l, \quad (11.21)$$

и

$$\det A_l^{0l} = x_1 + \dots + x_D. \quad (11.22)$$

Формулы (11.21) непосредственно вытекают из явного вида (7.22)–(7.24) матриц A_k^{kl} , A_l^{kl} и A_0^{kl} . Чтобы получить формулу (11.22), нужно воспользоваться равенством (7.25) и в матрице A_l^{0l} все ее строки прибавить к l -ой строке. Из (11.21) и (11.22) следует, что в любом случае имеют место неравенства

$$0 < |\det A_*^{kl}| < 1, \quad (11.23)$$

поскольку точка $x = (x_1, \dots, x_D)$ принадлежит внутренней области базисного симплекса $\Delta = \Delta_D$, что равносильно условиям

$$x_1 > 0, \dots, x_D > 0, \quad x_1 + \dots + x_D < 1. \quad (11.24)$$

Теперь неравенства (11.19) следуют из (11.23). \square

11.4. Порядковые матрицы. Составим из порядков лучей (11.4) звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_D \end{pmatrix} \quad (11.25)$$

и выясним, как она меняется под действием симметрий базисного симплекса $\Delta = \Delta_D$ и дифференцирований v^σ на звезду v .

Для этого поставим в соответствие любой перестановке σ элементов $0, 1, \dots, D$ ее *перестановочную матрицу*

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \dots & 1_{0,\sigma(0)} & \dots \\ \dots & 1_{1,\sigma(1)} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & 1_{D,\sigma(D)} & \dots \end{pmatrix}, \quad (11.26)$$

с единицами $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $(i, \sigma(i))$ -местах. Если заменить 0 на $D + 1$, то получим перестановку (7.2), определяющую симметрию базисного симплекса $s = s_\sigma$ из группы S_Δ .

Дифференцированиям же δ_k^{kl} и δ_l^{kl} из (7.33) с произвольными индексами $0 \leq k < l \leq D$ поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \quad (11.27)$$

где $E = E_{D+1}$ – единичная матрица порядка $D + 1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i, j) -месте.

Матрицы M из (11.26) и (11.27) имеют целые коэффициенты и определители $\det M = \pm 1$, поэтому они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей $m_0^\sigma, m_1^\sigma, \dots, m_D^\sigma$ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_D^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \quad (11.28)$$

Здесь, согласно определению производной (1.9), имеем

$$M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2}, \quad (11.29)$$

если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ – дифференцирование, где в качестве специализации $*$ выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.9) выполняется; и

$$M^\sigma(v) = M^\sigma = S_\sigma \quad (11.30)$$

в случае преобразования симметрии $\sigma = s = s_\sigma$ звезды v , где S_σ – соответствующая матрица из (11.26).

Лемма 11.3. Пусть v – периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(t)}\check{s}$ из (10.11), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (10.14). Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, то

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \quad (11.31)$$

Здесь

$$\mathbf{M} = SM^{(t)} \quad (11.32)$$

с матрицей S из (11.26), соответствующей обратной симметрии для \check{s} , и

$$M^{(t)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \dots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}), \quad (11.33)$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (11.29) специализации $*$ определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.

Доказательство вытекает из теоремы 10.1 и определения (10.11) калибровочной матрицей \mathbf{A} , если учесть, что при переходе с верхней на нижнюю строку в диаграмме (10.2) меняется порядок преобразований. \square

Назовем \mathbf{M} *порядковой матрицей* периодической звезды v , отвечающей калибровочной матрице \mathbf{A} .

11.5. Основная теорема. Важность последовательности определенных ранее в (11.2) производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\text{Orb}_\alpha(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D; \quad j = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (11.34)$$

порождаемой сдвигом $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ из (2.13).

Ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе \mathbb{T}^D выделяют из орбиты (11.34) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^D$.

Теорема 11.1. Пусть v – периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей \mathbf{A} из (10.11), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (10.14). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ орбиты (11.34) не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \quad (11.35)$$

в параллелоэдр $T^{(i)}$ из (11.2), где $m^{(i)}$ – порядок (11.5) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (11.31). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для} \quad j = m^{(i)}. \quad (11.36)$$

2. Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p - 1$, выполняется следующее неравенство

$$\varrho(T^{(i)}) \leq \|\mathbf{A}\|^a \varrho(T^{(b)}), \quad (11.37)$$

а для начальных номеров b радиусы $\varrho(T^{(b)})$ в (11.37) вычисляются по формуле (11.12). Здесь $\|\mathbf{A}\|$ обозначает спектральную норму (11.9) калибровочной матрицей \mathbf{A} .

3. Объем $s(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ находится по формуле

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \quad (11.38)$$

где $\det \mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы \mathbf{A} , удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det \mathbf{A}| < 1$, и объемы $s(T^{(b)})$ для начальных номеров $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (11.16).

Доказательство. Утверждение 1 следует из теорем 2.2 и 3.1, а утверждения 2 и 3 доказаны в лемме 11.2. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, *Целые дроби*. 4-ое изд. М., 1978.
2. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface*. — *Exper. Math.* **23** (2014), No. 4, 390–410.
3. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **440** (2015), 81–98.
4. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **440** (2015), 99–122.
5. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*. — *Bull. Soc. Math. France*, **110** (1982), 147–178.
6. В. Г. Журавлев, *Разбиения Розы и множества ограниченного остатка*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **322** (2005), 83–106.
7. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, (2016) (в наст. сб.)
8. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps*. — *Proc. Amer. Math. Soc.* **123**, No. 1 (1995), 3533–3542.
9. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivatives of circle rotations and similarity of orbits*. — *Max-Planck Inst. Math., Preprint Series* **62** (2004), 1–11.
10. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений многомерных торов*. — *Алгебра и анализ* (2015), 1–28 (в печати).
11. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения кубических иррациональностей*. — (2015) (в печати).
12. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins*. — *Math. Sem. Hamburg Univ.*, **1** (1921), 54–76.
13. S. Ferenczi, *Bounded Remainder Sets*. — *Acta Arithm.* **61**, No. 4 (1992), 319–326.
14. S. Grepstad, N. Lev, *Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation*. — *Geom. Funct. Analysis*, **25**, No.1 (2014), 87–133.
15. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés*. — *Sémin. théor. nombres Bordeaux* (1984), exp. 24.
16. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка*. — *Математика и информатика*, 1, *Совр. пробл. матем.*, **16**, *Мат. ин-т РАН, М.*, 2012, 82–102.
17. В. Г. Журавлев, *Переключающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **392** (2011), 95–145.

18. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей*. — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 95–130.
19. M. Morse, C. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics II: Sturmian trajectories*. — Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
20. В. Г. Журавлев, *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова*. — Алгебра и анализ **24**, No. 4 (2012), 97–136.
21. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Розси*. — Кристаллография **52**, No. 2 (2007), 204–210.
22. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry*. — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
23. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling*. — Anal. Probab. Methods Number Theory, TEV, Vilnius (2007), 240–254.
24. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах*. М., 1953.
25. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*. Том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Differentiation of induced toric tilings and multi-dimensional approximations of algebraic numbers.

We consider the induced tilings $\mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\text{Kr}}$ of the D -dimensional torus \mathbb{T}^D generated by embedded karyons Kr. The differentiations $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^\sigma$ are defined under which we obtain again the induced tilings $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\text{Kr}^\sigma}$ with a derivative karyon Kr^σ . They are used for approximation of $0 \in \mathbb{T}^D$ by an infinite sequence of points $x_j \equiv j\alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}$ for $j = 0, 1, 2, \dots$, where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ is vector whose coordinates $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ belong to an algebraic field $\mathbb{Q}(\theta)$ of degree $D + 1$ over the rational field \mathbb{Q} . For this purpose, we construct an infinite sequence of convex parallelehedra $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ for $i = 0, 1, 2, \dots$ and define for them some natural orders $m^{(0)} < m^{(1)} < \dots < m^{(i)} < \dots$. Then the above parallelehedra contain a subsequence of points $\{x_{j'}\}_{j'=1}^\infty$ that give the best approximation of $0 \in \mathbb{T}^D$.

Владимирский государственный университет,
600024, Владимир, пр. Строителей, 11,
Россия

Поступило 16 января 2016 г.

E-mail: vzhuravlev@mail.ru