Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 445, 2016 г.

М. В. Бабушкин, В. В. Жук

РОСТ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ СТЕКЛОВА И СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

В работе для периодических функций устанавливаются соотношения между интегралами от норм производных функций В. А. Стеклова и рядами, составленными из коэффициентов Фурье и наилучших приближений.

§1. Введение

1.1. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел. Запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. Все функции предполагаются вещественными. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Сумма $\sum\limits_{a}^{b}$ при $b < a$ считается равной нулю. Если $a \in \mathbb{R}$, то $[a]$ – целая часть числа a.

Через C обозначаем пространство непрерывных 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем пространство измеримых 2π-периодических функций f, суммируемых с p-ой степенью на периоде и нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p \right)^{1/p}.$$

Через H_n обозначаем множество тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Ключевые слова: функции Стеклова, коэффициенты Фурье, неотрицательные коэффициенты Фурье, наилучшее приближение, равносходимость интегралов и рядов.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$, тогда

$$E_n(f)_p = \inf_{T \in H_n} \|f - T\|_p$$

– наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве L_p. Если $f \in C$, то

$$E_n(f) = \inf_{T \in H_n} \|f - T\|$$

– наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n в пространстве C.

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

– коэффициенты Фурье функции f; при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f, x) = a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx, \quad A_0(f, x) = \frac{a_0(f)}{2},$$
$$\rho_k(f) = \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)}.$$

Если $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1$, то

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f, x)$$

– частная сумма ряда Фурье порядка n функции f,

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f, x)$$

– сумма Фейера порядка n функции f. При $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma_{n,m}(f, x) = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k(f, x)$$

– сумма Валле–Пуссена функции f.

Через θ обозначаем множество чётных функций $f \in C$ таких что $a_k(f) \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, через Λ – множество нечётных функций $f \in C$, у которых $b_k(f) \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right)$$

– центральная конечная разность r-го порядка функции f с шагом t.

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L_p$, $h \geqslant 0$. Тогда

$$\omega_r(f,h)_p = \sup_{|t| \leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|_p$$

– модуль непрерывности порядка r с шагом h функции f в пространстве L_p.

Будем говорить, что последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу B, если найдутся такие числа $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, что для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ и всех $k \geqslant n$

$$C_1 \leqslant a_n \leqslant C_2 a_k + C_3.$$

В частности, последовательность $\{a_k\}$ принадлежит классу B, если она ограничена или $a_k \uparrow +\infty$.

Если $f \in L_1$, $h > 0$, $r - 1 \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, то полагаем

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\, dt,$$
$$S_{h,r}(f,x) = S_{h,1}\left(S_{h,r-1}(f), x\right).$$

Функция $S_{h,r}(f)$ называется функцией Стеклова функции f порядка r с шагом h.

1.2. Остановимся кратко (не претендуя на полноту) на описании задач, рассматриваемых в статье. При установлении различного рода оценок нередко приходится прибегать на финальном этапе к оценкам, содержащим нормы производных аппроксимирующих агрегатов. В частности, на этом пути были получены оценки для наилучших приближений посредством модулей непрерывности различных порядков (см. [1, с. 167–170]), а также установлены оценки для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \rho_k(f)$ через нормы в L_2 разности порядка r с константами лучшими, чем ранее известные (см. [1, с. 253]). Для производных полиномов наилучшего приближения в [1, с. 176–179] эта задача рассматривалась как самостоятельная. В настоящей работе аналогичные вопросы рассматриваются применительно к функциям Стеклова.

Отправным моментом явился результат А. И. Плесснера. А. Н. Колмогоров и Г. А. Селиверстов, с одной стороны, и А. И. Плесснер, с другой, установили, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \rho_k^2(f) \ln k$ достаточна для того, чтобы ряд Фурье функции f сходился к ней почти всюду. Кроме того, Плесснер установил, что для $f \in L_2$ сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \rho_k^2(f) \ln k$ и интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2}{t}\, dt$$

равносильна. Последний результат Плесснера может быть переписан в следующем виде: сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \rho_k^2(f) \ln k$ равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\|S'_{t,1}(f)\right\|_2^2 t\, dt.$$

П. Л. Ульянов в работах [2–4], см. также [5, с. 342], развил упомянутый результат Плесснера в направлении, когда сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \|\delta_t^r(f)\|_2^2\, \alpha(t)\, dt$$

эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \tau(k).$$

Укажем также на работы М. К. Потапова [6, 7] и цитируемую в них и в работах Ульянова литературу.

С. Б. Стечкин установил в [8], что для $f \in L_2$ ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2(f) \ln k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k^2(f)_2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega_1^2 \left(f, \frac{1}{k}\right)_2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega_2^2 \left(f, \frac{1}{k}\right)_2$$

сходятся или расходятся одновременно.

В данной работе мы развиваем аналогичную тематику применительно к производным функции Стеклова для пространства L_2, а также для функций классов θ и Λ.

1.3. Нам понадобятся следующие известные результаты.

Лемма A (неравенство Чебышева, см., например, [9, с. 58–59]). *Пусть функции f и g заданы на отрезке $[a, b]$, причём f возрастает, а g убывает. Тогда*

$$\int_a^b fg \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \int_a^b g. \tag{1}$$

Лемма B (см., например, [9, с. 59]). *Если функции f и g заданы на отрезке $[a, b]$, причём f возрастает на $[a, (a+b)/2]$ и симметрична относительно точки $(a+b)/2$, т.е. $f(a+b-x) = f(x)$, а g дважды дифференцируема на $[a, b]$ и $g''(x) \geqslant 0$, то имеет место неравенство (1).*

Теорема A (Б. Леви, см., например, [10, с. 202]). *Пусть при $k \in \mathbb{N}$ функции $\{f_k\}$ измеримы на множестве E, $f_k(x) \geqslant 0$, $f_k(x) \leqslant f_{k+1}(x)$ для всех k. Пусть, далее, $f_k(x) \to f(x)$ при всех $x \in E$. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k = \int_E f.$$

Теорема B (Р. Пэли, см., например, [5, с. 277]). *Если функция f непрерывна и её коэффициенты Фурье неотрицательны, то её ряд Фурье сходится равномерно.*

§2. О некоторых соотношениях между рядами, составленными из коэффициентов Фурье, и интегралами от норм в L_2 производных функций Стеклова

Устанавливаемая ниже теорема 1 развивает упомянутый ранее результат Плесснера в ряде нетрадиционных направлений. При этом предшествующие доказательству основной теоремы вспомогательные результаты устанавливаются в большей общности, чем это используется, поскольку они представляют определённый самостоятельный интерес и могут быть применены в аналогичных ситуациях.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in L_1$; $\beta_k \in \mathbb{R}$, $A_k(f_\beta) = \beta_k A_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \in L_2$ *при всех* $t \in (0, 2\pi]$. *Пусть, далее, на* $(0, 2\pi]$ *функция* φ *дважды дифференцируема,* $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi''(t) \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r} \varphi(t)\, dt$$

$$\leqslant 2^{2r} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f) \beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \left(\int\limits_0^{2\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt + \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}} \int\limits_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right).$$

Если в условиях теоремы дополнительно потребовать $\varphi'(t) \leqslant 0$, *то*

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r} \varphi(t)\, dt$$

$$\geqslant 2^{2r} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f) \beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \left(\int\limits_0^{\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt + \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}} \int\limits_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right).$$

Лемма 1. *Пусть при* $t \in (0, 2\pi]$ *функция* φ *дважды дифференцируема,* $\varphi''(t) \geqslant 0$; $g \in C$, g *возрастает на* $[0, \pi]$, $g(t) = g(2\pi - t)$ *при* $t \in [0, \pi]$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt) \varphi(t)\, dt \leqslant \int\limits_0^{2\pi/k} g(kt) \varphi(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(t)\, dt \int\limits_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt.$$

Доказательство. Производя замену переменной, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi k} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму B, находим при $m = \overline{1, k-1}$

$$\int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt \cdot \int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt)\varphi(t)\,dt$$
$$\leqslant \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt \cdot \int\limits_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$
$$= \int\limits_0^{2\pi/k} g(kt)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt \cdot \frac{1}{k}\int\limits_{2\pi}^{2\pi k} \varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$
$$= \int\limits_0^{2\pi/k} g(kt)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt \cdot \int\limits_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\,dt. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть при* $t \in (0, 2\pi]$ *функция* φ *дважды дифференцируема,* $\varphi'(t) \leqslant 0$, $\varphi''(t) \geqslant 0$; $g \in C$, g *возрастает на* $[0, \pi]$, $g(t) = g(2\pi - t)$ *для* $t \in [0, \pi]$. *Тогда при* $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt)\varphi(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^{\pi/k} g(kt)\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt \int\limits_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\,dt.$$

Доказательство. Производя замену переменной, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt)\varphi(t)dt = \frac{1}{k}\int\limits_0^{2\pi k} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$

$$=\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt+\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\int\limits_{2\pi m-\pi}^{2\pi m+\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt+\frac{1}{k}\int\limits_{2\pi k-\pi}^{2\pi k} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt.$$

Применяя лемму B, получаем при $m=\overline{1,k-1}$

$$\int\limits_{2\pi m-\pi}^{2\pi m+\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt\cdot\int\limits_{2\pi m-\pi}^{2\pi m+\pi}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму A, находим

$$\int\limits_{2\pi k-\pi}^{2\pi k} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt \geqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(t)\,dt\cdot\int\limits_{2\pi k-\pi}^{2\pi k}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt\int\limits_{2\pi k-\pi}^{2\pi k}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} g(kt)\varphi(t)\,dt$$

$$\geqslant \frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi} g(t)\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt+\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt\cdot\int\limits_{2\pi m-\pi}^{2\pi m+\pi}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)dt$$

$$+\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt\int\limits_{2\pi k-\pi}^{2\pi k}\varphi\left(\frac{t}{k}\right)\,dt$$

$$=\int\limits_0^{\pi/k} g(kt)\varphi(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t)\,dt\int\limits_{\pi/k}^{2\pi}\varphi(t)\,dt. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, при $t \in (0, 2\pi]$ функция φ дважды дифференцируема, $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi''(t) \geqslant 0$; $\alpha_k \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \varphi(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\int_0^{2\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt + \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}} \int_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right).$$

Если в условиях леммы дополнительно потребовать $\varphi'(t) \leqslant 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \varphi(t)\, dt \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\int_0^{\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt + \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}} \int_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right).$$

Доказательство. Применяя теорему A, находим

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \varphi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt.$$

Принимая во внимание лемму 1 при $g(t) = \sin^{2r}(t/2)$, получаем

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \varphi(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\int_0^{2\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \varphi(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2r} \frac{t}{2}\, dt \int_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt \right).$$

Аналогично, применяя лемму 2, имеем

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2}\right) \varphi(t)\,dt$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\int_0^{\pi/k} \left(\sin \frac{kt}{2}\right)^{2r} \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2r} \frac{t}{2}\,dt \int_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\,dt \right).$$

Остаётся заметить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2r} \frac{t}{2}\,dt = \frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. Применяя равенство Парсеваля, находим

$$\left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 k^{2m} \left(\frac{2}{kt} \sin \frac{kt}{2}\right)^{2r} t^{2r}$$
$$= 2^{2r} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f)\beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \sin^{2r} \frac{kt}{2}.$$

Полагая в лемме 3

$$\alpha_k = 2^{2r} \pi \frac{\rho_k^2(f)\beta_k^2}{k^{2(r-m)}},$$

заключаем о справедливости теоремы 1. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in L_1$; $\beta_k \in \mathbb{R}$, $A_k(f_\beta) = \beta_k A_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \in L_2$ *при всех* $t \in (0, 2\pi]$. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f)\beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \ln \ln k$$

и интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 \frac{t^{2r-1}}{\ln \frac{2\pi e}{t}}\,dt$$

сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. *Пусть $p > 0$. Тогда при выполнении условий следствия 1 ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f)\beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \ln^p k$$

и интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство следствий 1 и 2. Положим

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}$$

при $p \geqslant 0$, $t \in (0, 2\pi]$. Нетрудно убедиться, что

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}\left(p + \ln\frac{2\pi}{t}\right) \ln^{p-2} \frac{2\pi e}{t},$$
$$\varphi''(t) = \frac{1}{t^3}\left(2\ln^2\frac{2\pi}{t} + (3p+1)\ln\frac{2\pi}{t} + p^2 + 1\right) \ln^{p-3} \frac{2\pi e}{t}.$$

Отсюда и из определения функции φ следует, что $\varphi(t) \geqslant 0$, $\varphi'(t) \leqslant 0$, $\varphi''(t) \geqslant 0$ при $t \in (0, 2\pi]$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. При $p = 0$ имеем

$$\int_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt = \int_{2\pi/k}^{2\pi} \frac{dt}{t \ln \frac{2\pi e}{t}} = \ln(\ln k + 1),$$
$$\int_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\, dt = \int_{\pi/k}^{2\pi} \frac{dt}{t \ln \frac{2\pi e}{t}} = \ln(\ln 2k + 1).$$

При $p > 0$

$$\int\limits_{2\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{2\pi/k}^{2\pi} \frac{1}{t}\ln^{p-1}\frac{2\pi e}{t}\,dt = \frac{1}{p}\left(\ln^p ke - 1\right),$$

$$\int\limits_{\pi/k}^{2\pi} \varphi(t)\,dt = \int\limits_{\pi/k}^{2\pi} \frac{1}{t}\ln^{p-1}\frac{2\pi e}{t}\,dt = \frac{1}{p}\left(\ln^p 2ke - 1\right).$$

Далее, при $p \geqslant 0$ получаем

$$\int\limits_0^{2\pi/k}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^{2r}\frac{1}{t}\ln^{p-1}\frac{2\pi e}{t}\,dt = \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2r} t}{t}\ln^{p-1}\frac{\pi k e}{t}\,dt,$$

$$\int\limits_0^{\pi/k}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^{2r}\frac{1}{t}\ln^{p-1}\frac{2\pi e}{t}\,dt = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2r} t}{t}\ln^{p-1}\frac{\pi k e}{t}\,dt.$$

Принимая во внимание теорему 1 и установленные соотношения, получаем требуемое. □

Следствие 3. *Полагая $p = 1$, $\beta_k = 1$ при $k \in \mathbb{N}$, $r = m = 1$ в следствии 2 и считая $f \in L_2$, мы получаем, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\rho_k^2(f)\ln k$ эквивалентна сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\|S'_{1,t}(f)\right\|_2^2 t\,dt = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\left\|\delta_t^1(f)\right\|_2^2}{t}\,dt,$$

что совпадает с упомянутым во введении результатом Плесснера.

Замечание 1. Пусть $p > 1$, f – измеримая неотрицательная 2π-периодическая функция. Тогда из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(t)}{t^p}\,dt$$

следует сходимость

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{f(t)}{t^p}\,dt.$$

Доказательство. Пусть сходится $\int\limits_0^{2\pi} f(t)/t^p\,dt$. Тогда сходится и интеграл $\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt$. Имеем

$$\int\limits_{2\pi}^{\infty} \frac{f(t)}{t^p}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{f(t)}{t^p}\,dt$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^p} \int\limits_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Так как $p > 1$, то сумма полученного ряда конечна. Следовательно, сходимость интеграла $\int\limits_0^{2\pi} f(t)/t^p\,dt$ влечёт его сходимость на промежутке $[0,+\infty)$. □

Установим аналог теоремы 1, когда интеграл берётся по промежутку $[0,+\infty)$.

Лемма 4. *Пусть $\alpha_k \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 2r$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\alpha_k$ равносильна сходимости интеграла*

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

и справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1}{2^{\alpha}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}}\,dt \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\alpha_k.$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему A, имеем

$$\int\limits_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \int\limits_0^{\infty} \left(\sin \frac{kt}{2} \right)^{2r} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{k}{2} \right)^{\alpha} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1}{2^{\alpha}} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}}\,dt \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} a_k.$$

Таким образом, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} a_k$ эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin^{2r} \frac{kt}{2} \right) \frac{1}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

Остаётся принять во внимание замечание 1. □

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in L_1$; $\beta_k \in \mathbb{R}$, $A_k(f_\beta) = \beta_k A_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \in L_2$ *при всех* $t \in (0, 2\pi]$, $0 < \alpha < 2r$. *Тогда сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 k^{\alpha - 2(r-m)}$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-\alpha-1}\, dt$$

и справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-\alpha-1}\, dt = 2^{2r-\alpha} \pi \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}}\, dt \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 k^{\alpha-2(r-m)}.$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$\left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r} = 2^{2r} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2(f) \beta_k^2}{k^{2(r-m)}} \sin^{2r} \frac{kt}{2}.$$

Полагая в лемме 4

$$\alpha_k = 2^{2r} \pi \frac{\rho_k^2(f) \beta_k^2}{k^{2(r-m)}},$$

получаем требуемое. □

§3. Ряды Фурье с неотрицательными коэффициентами

Теорема 3. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in L_1$; $\beta_k \in \mathbb{R}$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \in \theta$ *при всех* $t \in (0, 2\pi]$; *на* *промежутке* $(0,2\pi]$ *функция* φ *дважды дифференцируема,* $\varphi(t)\geqslant 0$, $\varphi''(t)\geqslant 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\|S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta)\right\|t^{2r}\varphi(t)\,dt \leqslant 2^{2r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}}\left(\int\limits_0^{2\pi/k}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^{2r}\varphi(t)\,dt+\frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}\int\limits_{2\pi/k}^{2\pi}\varphi(t)\,dt\right).$$

Если в условиях теоремы дополнительно потребовать $\varphi'(t)\leqslant 0$, *то*

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\|S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta)\right\|t^{2r}\varphi(t)\,dt \geqslant 2^{2r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}}\left(\int\limits_0^{\pi/k}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^{2r}\varphi(t)\,dt+\frac{C_{2r}^r}{2^{2r}}\int\limits_{\pi/k}^{2\pi}\varphi(t)\,dt\right).$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему B, находим

$$\left\|S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta)\right\|t^{2r}=2^{2r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}}\sin^{2r}\frac{kt}{2}.$$

Полагая в лемме 3

$$\alpha_k=2^{2r}\frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}},$$

получаем требуемые соотношения. □

Следствие 4. *Пусть* $f\in L_1$, $f_\beta\in\theta$; $\beta_k\in\mathbb{R}$, $a_k(f_\beta)=\beta_k a_k(f)$ *при* $k\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant r$. *Тогда сходимость ряда*

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}}\ln\ln k$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\|S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta)\right\|\frac{t^{2r-1}}{\ln\frac{2\pi e}{t}}\,dt.$$

Следствие 5. *Пусть* $p > 0$. *Тогда при выполнении условий следствия* 4 *сходимость ряда*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}} \ln^p k$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t} \, dt.$$

Доказательство следствий 4 и 5 основано на теореме 3, при этом оно аналогично доказательству следствий 1 и 2.

Теорема 4. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in \theta$; $\beta_k \in \mathbb{R}$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $0 < \alpha < 2r$. *Тогда сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\beta_k k^{\alpha-2(r-m)}$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-\alpha-1} \, dt$$

и справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-\alpha-1} \, dt = 2^{2r-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2r} t}{t^{\alpha+1}} \, dt \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\beta_k k^{\alpha-2(r-m)}.$$

Доказательство. В силу теоремы B

$$\left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r} = 2^{2r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}} \sin^{2r} \frac{kt}{2}.$$

Полагая

$$\alpha_k = 2^{2r} \frac{a_k(f)\beta_k}{k^{2(r-m)}}$$

в лемме 4, получаем требуемое. □

При доказательстве следующих двух теорем будут использованы числовые соотношения (леммы 5 и 6), которые получаются стандартным образом, основанным на преобразования Абеля.

Лемма 5. *Пусть последовательность* $\{a_k\}$ *ограничена снизу,* $b_k \downarrow 0$*, ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k$ *сходится. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(b_{k-1}-b_k)$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_{k-1}-b_k)=a_1b_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $a_k \geqslant M$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Положим $c_k = a_k - M$, тогда $c_k \geqslant 0$ при $k \in \mathbb{N}$. При $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)b_k=c_{n+1}b_n-c_1b_0+\sum_{k=1}^{n}c_k(b_{k-1}-b_k). \tag{3}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}c_k(b_{k-1}-b_k)=c_1b_0-c_{n+1}b_n+\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)b_k\leqslant c_1b_0+\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)b_k.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(c_{k+1}-c_k)b_k,$$

то последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k(b_{k-1}-b_k)$ ограничена сверху. Кроме того, эта последовательность возрастает, ибо $b_k \downarrow 0$ и $c_k \geqslant 0$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(b_{k-1}-b_k)$ сходится. Отсюда и из (3) вытекает, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}c_{n+1}b_n = L$. При этом $L \geqslant 0$, так как $c_{n+1}b_n \geqslant 0$.

Предположим, что $L > 0$. Тогда найдётся число m, такое что при $n \geqslant m$ будет $c_{n+1}b_n \geqslant L/2$ или $c_{n+1} \geqslant L/(2b_n)$. Следовательно, при всех $n \geqslant m$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k(b_{k-1}-b_k) &\geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{L}{2}\frac{b_{k-1}-b_k}{b_{k-1}}\\ &\geqslant \frac{L}{2b_n}\sum_{k=n+1}^{\infty}(b_{k-1}-b_k)=\frac{L}{2b_n}b_n=\frac{L}{2}.\end{aligned}$$

Полученное неравенство противоречит тому, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(b_{k-1}-b_k)$ сходится, значит, $L=0$.

Устремляя n к $+\infty$ в (3), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(b_{k-1}-b_k) = c_1 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_{k+1}-c_k)b_k.$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_{k+1}-c_k)b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(b_{k-1}-b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_{k-1}-b_k) - Mb_0. \quad \square$$

Лемма 6. *Пусть последовательность* $\{a_k\}$ *принадлежит классу* B, $b_k \downarrow 0$, *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(b_{k-1}-b_k)$ *сходится. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k$ *и справедливо равенство* (2).

Доказательство. Так как последовательность $\{a_k\}$ принадлежит классу B, то найдутся числа $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ такие, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $k \geqslant n+1$

$$C_1 \leqslant a_{n+1} \leqslant C_2 a_k + C_3.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} C_1 b_n \leqslant a_{n+1} b_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{n+1}(b_{k-1}-b_k) \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (C_2 a_k + C_3)(b_{k-1}-b_k) = C_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(b_{k-1}-b_k) + C_3 b_n. \end{aligned}$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(b_{k-1}-b_k)$ сходится и $b_n \to 0$, то $a_{n+1}b_n \to 0$. Остаётся перейти к пределу в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_{n+1}b_n - a_1 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k-1}-b_k). \qquad \square$$

Замечание 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \theta$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\| \leqslant \left(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right) E_{[(n+1)/2]}(f).$$

Доказательство. При $n = 0$ утверждение очевидно. Пусть $n = 2k-1$ или $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание теорему B, имеем

$$\|f - S_{2k}(f)\| \leqslant \|f - S_{2k-1}(f)\| \leqslant \|f - \sigma_{k,k}(f)\| \leqslant (1 + \|\sigma_{k,k}\|)\, E_k(f).$$

Остаётся заметить, что $\|\sigma_{k,k}\| = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ (см. [11, с. 120]). □

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1$, $f_\beta \in \theta$; $\beta_k \neq 0$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ при $k \in \mathbb{N}$; последовательность $\{\lambda_k/\beta_k\}$ ограничена снизу, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\lambda_{2k+1}}{\beta_{2k+1}} - \frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}} \right| + \left| \frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}} - \frac{\lambda_{2k-1}}{\beta_{2k-1}} \right| \right) E_k(f_\beta) \tag{4}$$

сходится. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(f)$ и справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k a_k(f) \right| \leqslant \left(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right) \left(\left| \frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}} \right| E_{[(n+1)/2]}(f_\beta) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=[n/2]+1}^{\infty} \left(\left| \frac{\lambda_{2k+1}}{\beta_{2k+1}} - \frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}} \right| + \left| \frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}} - \frac{\lambda_{2k-1}}{\beta_{2k-1}} \right| \right) E_k(f_\beta) \right).$$

Доказательство. Принимая во внимание замечание 2, находим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right|\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|$$
$$\leqslant\sum_{k=2[n/2]+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right|\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|$$
$$=\sum_{m=[n/2]+1}^{\infty}\left(\left|\frac{\lambda_{2m+1}}{\beta_{2m+1}}-\frac{\lambda_{2m}}{\beta_{2m}}\right|\|f_\beta-S_{2m}(f_\beta)\|\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\lambda_{2m}}{\beta_{2m}}-\frac{\lambda_{2m-1}}{\beta_{2m-1}}\right|\|f_\beta-S_{2m-1}(f_\beta)\|\right)$$
$$\leqslant\left(\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)\sum_{m=[n/2]+1}^{\infty}\left(\left|\frac{\lambda_{2m+1}}{\beta_{2m+1}}-\frac{\lambda_{2m}}{\beta_{2m}}\right|+\left|\frac{\lambda_{2m}}{\beta_{2m}}-\frac{\lambda_{2m-1}}{\beta_{2m-1}}\right|\right)E_m(f_\beta).$$

Отсюда, используя теорему B, получаем, что сходимость ряда (4) влечёт сходимость ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\sum_{m=k+1}^{\infty}\beta_m a_m(f).$$

Полагая $a_k=\lambda_{k+n}/\beta_{k+n}$ и $b_k=\sum\limits_{m=k+n+1}^{\infty}\beta_m a_m(f)$ в лемме 5, получаем, что сходимость ряда (4) влечёт сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(f)$ и при этом

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k a_k(f)\right|$$
$$=\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}}\|f_\beta-S_n(f_\beta)\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}}\right|\|f_\beta-S_n(f_\beta)\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right|\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|$$
$$\leqslant\left(\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)\left(\left|\frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}}\right|E_{[(n+1)/2]}(f_\beta)\right.$$

$$+\sum_{k=[n/2]+1}^{\infty}\left(\left|\frac{\lambda_{2k+1}}{\beta_{2k+1}}-\frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}}\right|+\left|\frac{\lambda_{2k}}{\beta_{2k}}-\frac{\lambda_{2k-1}}{\beta_{2k-1}}\right|\right)E_k(f_\beta)\Bigg). \quad \square$$

Теорема 6. *Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $f\in L_1$, $f_\beta\in\theta$; $\beta_k\neq 0$, $a_k(f_\beta)=\beta_k a_k(f)$ при $k\in\mathbb{N}$. Последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_k/\beta_k\}$ возрастает. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(f)$ следует сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)E_k(f_\beta)$$

и справедливость неравенства

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)E_k(f_\beta)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k a_k(f).$$

Доказательство. Полагая $a_k=\lambda_{k+n}/\beta_{k+n}$ и $b_k=\sum\limits_{m=k+n+1}^{\infty}\beta_m a_m(f)$ в лемме 6 и принимая во внимание теорему B, получаем, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k a_k(f)$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|$$

и при этом

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k a_k(f)=\frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}}\|f_\beta-S_n(f_\beta)\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)E_k(f_\beta)$$
$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)\|f_\beta-S_k(f_\beta)\|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k a_k(f). \quad \square$$

Следствие 6. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in \theta$; $\beta_k \neq 0$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $p > 0$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k(f)\beta_k \ln^p k < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{p-1} k}{k} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt < \infty$$

эквивалентны.

Доказательство. Полагая $\lambda_k = \beta_k \ln^p k$ при $k \in \mathbb{N}$ в теоремах 5 и 6, получаем, что ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{p-1} k}{k} E_k(f_\beta) \quad \text{и} \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k(f)\beta_k \ln^p k$$

сходятся или расходятся одновременно. По следствию 5 сходимость последнего равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt. \qquad \square$$

Следствие 7. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in \theta$; $\beta_k \neq 0$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k(f)\beta_k \ln\ln k < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| \frac{t^{2r-1}}{\ln \frac{2\pi e}{t}}\, dt < \infty$$

эквивалентны.

Доказательство. Полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_k = \beta_k \ln\ln k$ при $k \geqslant 3$ в теоремах 5 и 6, получаем, что ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} E_k(f_\beta) \quad \text{и} \quad \sum_{k=3}^{\infty} a_k(f)\beta_k \ln\ln k$$

сходятся или расходятся одновременно. Принимая во внимание следствие 4, находим, что сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| \frac{t^{2r-1}}{\ln \frac{2\pi e}{t}}\, dt. \qquad \square$$

Следствие 8. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in \theta$; $\beta_k \neq 0$, $a_k(f_\beta) = \beta_k a_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $2(r-m) < \alpha < 2r$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\beta_k k^{\alpha-2(r-m)} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2(r-m)-1} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-\alpha-1}\, dt < \infty$$

эквивалентны.

Доказательство. Полагая $\lambda_k = \beta_k k^{\alpha-2(r-m)}$ при $k \in \mathbb{N}$ в теоремах 5 и 6, получаем, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2(r-m)-1} E_k(f_\beta) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\beta_k k^{\alpha-2(r-m)}$$

сходятся или расходятся одновременно. По теореме 4 сходимость последнего ряда равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-\alpha-1}\, dt. \quad \square$$

Следствие 9. *Пусть* $f \in \Lambda$, $f_\beta \in \theta$, $s \in \mathbb{R}$, $a_k(f_\beta) = b_k(f)k^s$ *при* $k \in \mathbb{N}$, $p > 0$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k(f) k^s \ln^p k < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{p-1} k}{k} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt < \infty$$

эквивалентны.

Следствие 10. *Пусть* $f \in \Lambda$, $f_\beta \in \theta$, $s \in \mathbb{R}$, $a_k(f_\beta) = b_k(f)k^s$ *при* $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k(f)k^s \ln\ln k < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2r)}(f_\beta) \right\| \frac{t^{2r-1}}{\ln \frac{2\pi e}{t}} < \infty$$

эквивалентны.

Следствие 11. *Пусть* $f \in \Lambda$, $f_\beta \in \theta$, $s \in \mathbb{R}$, $a_k(f_\beta) = b_k(f)k^s$ *при* $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $2(r-m) < \alpha < 2r$. *Тогда соотношения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)k^{s+\alpha-2(r-m)} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2(r-m)-1} E_k(f_\beta) < \infty,$$

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{2r,t}^{(2m)}(f_\beta) \right\| t^{2r-\alpha-1}\, dt < \infty$$

эквивалентны.

Для доказательства следствий 9, 10 и 11 достаточно воспользоваться следствиями 6, 7 и 8 соответственно, полагая в них в качестве функции f функцию

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \cos kx,$$

и $\beta_k = k^s$ при $k \in \mathbb{N}$.

В связи с результатами, изложенными в данном параграфе, см. работы [12, 13].

§4. О некоторых соотношениях между рядами, составленными из наилучших приближений, и интегралами от норм в L_2 производных функций Стеклова

Лемма 7. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1$, $f_\beta \in L_2$; $\beta_k \neq 0$, $A_k(f_\beta) = \beta_k A_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда если последовательность* $\{(\lambda_k/\beta_k)^2\}$ *ограничена* *снизу, то из сходимости ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}\right)^2-\left(\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)^2\right)E_k^2(f_\beta)_2 \tag{5}$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\rho_k^2(f) \tag{6}$$

и справедливость равенства

$$\begin{aligned}\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}&\lambda_k^2\rho_k^2(f)\\ &=\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\beta_{n+1}}\right)^2E_n^2(f_\beta)_2+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}\right)^2-\left(\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)^2\right)E_k^2(f_\beta)_2.\end{aligned} \tag{7}$$

Если же последовательность $\{(\lambda_k/\beta_k)^2\}$ *принадлежит классу* B, *то из сходимости ряда* (6) *следует сходимость ряда* (5) *и равенство* (7).

Доказательство. Положим

$$a_k=\left(\frac{\lambda_{k+n}}{\beta_{k+n}}\right)^2,\quad b_k=E_{k+n}^2(f_\beta)_2.$$

Если последовательность $\{(\lambda_k/\beta_k)^2\}$ ограничена снизу, то по лемме 5 из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)b_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\beta_{k+1}}\right)^2-\left(\frac{\lambda_k}{\beta_k}\right)^2\right)E_k^2(f_\beta)_2$$

вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(b_{k-1}-b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{k+n}}{\beta_{k+n}}\right)^2\pi\beta_{k+n}^2\rho_{k+n}^2(f)=\pi\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k^2\rho_k^2(f)$$

и справедливость равенства (7).

Если же последовательность $\{(\lambda_k/\beta_k)^2\}$ принадлежит классу B, то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5) и равенство (7) в силу леммы 6. □

Теорема 7. *Пусть* $f \in L_1$, $f_\beta \in L_2$; $\beta_k \neq 0$, $A_k(f_\beta) = \beta_k A_k(f)$ *при* $k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 0$. *Тогда сходимость ряда*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{p-1} k}{k} E_k^2(f_\beta)_2$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(r)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt.$$

Если $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant r$, $2(r-m) < \alpha < 2r$, *то сходимость ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2(r-m)-1} E_k^2(f_\beta)_2$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-\alpha-1}\, dt.$$

Доказательство. Полагая $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_k^2 = \beta_k^2 \ln\ln k$ при $k \geqslant 3$ в лемме 7, получаем, что ряды

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} E_k^2(f_\beta)_2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=3}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 \ln\ln k$$

сходятся или расходятся одновременно. В силу следствия 1 сходимость последнего ряда эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(r)}(f_\beta) \right\|_2^2 \frac{t^{2r-1}}{\ln \frac{2\pi e}{t}}\, dt.$$

Если $p > 0$, то, полагая $\lambda_k^2 = \beta_k^2 \ln^p k$ при $k \in \mathbb{N}$ в лемме 7, получаем, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{p-1} k}{k} E_k^2(f_\beta)_2$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 \ln^p k,$$

который по следствию 2 сходится одновременно с интегралом

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(r)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-1} \ln^{p-1} \frac{2\pi e}{t}\, dt.$$

Полагая $\lambda_k^2 = \beta_k^2 k^{\alpha-2(r-m)}$ при $k \in \mathbb{N}$ в лемме 7, получаем, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha-2(r-m)-1} E_k^2(f_\beta)_2 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f) \beta_k^2 k^{\alpha-2(r-m)}$$

сходятся или расходятся одновременно. По теореме 2 последний ряд сходится одновременно с интегралом

$$\int_0^{2\pi} \left\| S_{r,t}^{(m)}(f_\beta) \right\|_2^2 t^{2r-\alpha-1}\, dt. \quad \square$$

Важным частным случаем теоремы 7 является тот, когда $\beta_k = k^s$.

Литература

1. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
2. П. Л. Ульянов, *О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов.* — УМН **8**, No. 6(58) (1953), 133–141.
3. П. Л. Ульянов, *О модулях непрерывности и коэффициентах Фурье.* — Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. No. 1 (1995), 37–52.
4. П. Л. Ульянов, *Об эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов для тригонометрической системы.* — Докл. РАН **343**, No. 4 (1995), 458–462.
5. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряд.* М., 1961.
6. М. К. Потапов, *К вопросу об эквивалентности условий сходимости рядов Фурье.* — Мат. сб. **68(110)**, No. 1 (1965), 111–127.
7. М. К. Потапов, *О вложении и совпадении некоторых классов функций.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **33**, No. 4 (1969), 840–860.
8. С. Б. Стечкин, *О теореме Колмогорова–Селиверстова.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **17**, No. 6 (1953), 499–512.
9. В. В. Жук, Г. И. Натансон *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
10. Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* М., 1973.
11. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
12. В. В. Жук, *Об одном методе суммирования рядов Фурье. Ряды Фурье с положительными коэффициентами.* — В кн.: Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций. Сб. научн. трудов Ленингр. мех. ин-та. **50** (1965), 73–92.

13. В. В. Жук, *О приближении 2π-периодической функции линейным оператором.* — В кн.: Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций. Сб. научн. трудов Ленингр. мех. ин-та. **50** (1965), 93–115.

Babushkin M. V., Zhuk V. V. Growth of norms in L_2 of derivatives of Steklov functions and properties of functions defined by best approximations and Fourier coefficients.

In the paper, for periodic functions, a connection between integrals of norms in L_2 of derivatives of Steklov functions and series constructed from Fourier coefficients and the best approximations in L_2 is established, and the question on their simultaneous convergence or divergence is considered. Similar investigations are carried out for even and odd periodic functions.

Поступило 31 марта 2016 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: maxbabushkin@gmail.com

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zhuk@math.spbu.ru