Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 444, 2016 г.

А. И. Назаров, Б. О. Нетеребский

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМОГО НЕРАВЕНСТВОМ ИЛЬИНА–КАФФАРЕЛЛИ–КОНА–НИРЕНБЕРГА

§1. Введение

Данная работа посвящена изучению уравнения

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{\alpha p}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) = |x|^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^{q-2}v \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $1 < p < \infty$, $\alpha > 1 - \frac{n}{p}$, $0 < \sigma < \min\{1, \frac{n}{p}\}$, $q = \frac{np}{n-\sigma p}$. Под решением уравнения (1) будем подразумевать обобщенное решение из пространства

$$\mathcal{D}^{1,p}_{\alpha} = \{v \in L^q(\mathbb{R}^n; |x|^{(\alpha+\sigma-1)q}\,dx) \,:\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla v|^p\,dx < \infty\}.$$

Легко видеть, что такие решения являются критическими точками функционала

$$J(v) = \frac{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Неравенство

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{(\alpha+\sigma-1)q}|v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

было впервые получено В. П. Ильиным [2] в 1961 году. Впоследствии оно было переоткрыто L. Caffarelli, R. Kohn и L. Nirenberg в работе [9].

Ключевые слова: квазилинейные уравнения, неравенство Каффарелли–Кона–Ниренберга, множественность решений.

Работа поддержана грантом СПбГУ 6.38.670.2013. Работа первого автора также поддержана грантом РФФИ 14-01-00534.

Очевидно, что точная константа в неравенстве (2) дается формулой

$$\frac{1}{K(n,p,\sigma,\alpha)} = \inf_{v\in\mathcal{D}^{1,p}_{\alpha},\, v\neq 0} J(v) > 0.$$

Вопрос о существовании функции $v \in \mathcal{D}^{1,p}_{\alpha}$, которая минимизирует функционал $J(v)$ (и на которой достигается значение $K(n,p,\sigma,\alpha)$), нетривиален, так как соответствующее вложение не является компактным. Этот вопрос был рассмотрен в работах [10, 12, 18]. В статье [17] были получены аналогичные результаты для цилиндрических весов.

Другой цикл работ посвящен эффекту потери радиальности минимайзера. Существование функции $h(\alpha) \in (0,1)$, такой, что для $0 < 1-\sigma < h(\alpha)$ минимайзер является нерадиальным, доказано в [12] для $p = 2$ и в [8] для $p < n$. Точное значение $h(\alpha)$ для $p = 2$ было получено в работе [16]. Также эффект потери симметричности при различных параметрах изучался в работах [5,11,15,23]. Отметим, что если доказана нерадиальность минимайзера, у уравнения (1) существует как минимум два положительных решения. С другой стороны, если минимайзер радиален, то задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, и точная константа в (2) находится явно. Если же минимайзер нерадиальный, то найти точную константу не представляется возможным.

Радиальность минимайзера для некоторых параметров α и σ при $p = 2$ была получена в работах [15, 23]. Окончательно этот вопрос для $p = 2$ был решен в статье [14]. Для произвольных p, насколько нам известно, имеются лишь частичные результаты [21] при $1 < p < n$.

Мы будем изучать эффект множественности положительных решений для уравнения (1). Впервые подобный эффект был открыт в [13] при $n = 2$ для краевой задачи

$$-\Delta u = u^{q-1} \quad \text{в} \quad \Omega = B_{R+1} \setminus B_R, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Оказалось, что эта задача имеет любое наперед заданное количество неэквивалентных (то есть не получающихся друг из друга при помощи поворотов) положительных решений[1] при $q > 2$, если R достаточно велико. Далее этот эффект был установлен в [19] при $n \geqslant 4$ и в [7] при $n = 3$. Для других уравнений и краевых условий множественность изучалась в статьях [1, 3, 4, 6].

[1] Отметим, что во многих публикациях термин “множественность” (multiplicity) используется в другом смысле – для обозначения неединственности решения.

Мы установим множественность решений уравнения (1) при подходящих значениях параметров в случае четной размерности n. Для нечетных n вопрос остается открытым.

Статья организована следующим образом. В §2 собраны вспомогательные оценки. В §3 доказывается основной результат, а также "двойственная" теорема о множественности решений уравнения (1) при $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$ в "проколотом" пространстве $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Введем ряд обозначений. Пусть $n = ml$. Тогда пространство $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l$. Точки $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через x, а точки $\mathbb{R}^m$ – через y. Таким образом, $x = (y_1, \dots, y_l)$. Положим $r = |x|$. Сферические координаты точки y_i обозначаются (r_i, ϑ_i), $\vartheta_i \in \mathbb{S}_m$, где $\mathbb{S}_m$ – $(m-1)$-мерная сфера.

Следуя [4], будем называть функцию v **m-симметричной**, если v инвариантна относительно всех перестановок векторов $y_1, \dots, y_l$. Если же v m-симметрична и зависит только от r_i, $i = 1, \dots, l$, то будем называть её **m-радиальной**.

Для любой G – замкнутой подгруппы $O(m)$ будем обозначать $\mathcal{L}(m, G)$ подпространство всех m-симметричных функций из $\mathcal{D}^{1,p}_\alpha$, G-инвариантных по y_i.

Норму в $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначим $\|\cdot\|_p$.

§2. Вспомогательные результаты

Для функций из пространства $\mathcal{L}(m, G)$ неравенство (2) принимает вид

$$\|r^{\alpha+\sigma-1} v\|_q \leqslant K(n, m, p, \sigma, \alpha, G) \cdot \|r^\alpha \nabla v\|_p\,. \tag{3}$$

Для удобства, аргументы у константы K будут опускаться, если это не навредит ясности изложения.

Следующее утверждение основано на варианте принципа концентрации-компактности, см. [20]. Для $\alpha = 0$ и тривиальной группы G оно было доказано в [5]. Доказательство достаточно стандартно, и мы его опускаем.

Предложение 1. *Пусть последовательность $v_k \in \mathcal{L}(m, G)$ ограничена в $\mathcal{D}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Тогда из нее можно извлечь последовательность, которая слабо сходится в $\mathcal{D}^{1,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ (обозначим предельную функцию v),* *и для которой выполняются следующие соотношения в пространстве мер на* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *(здесь* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *— одноточечная компактификация* $\mathbb{R}^n$*):*

$$\begin{aligned} &|r^{\alpha+\sigma-1}v_k|^q \rightharpoonup |r^{\alpha+\sigma-1}v|^q + \alpha_0\delta_0(x) + \alpha_\infty\delta_\infty(x), \\ &|r^\alpha \nabla v_k|^p \rightharpoonup \mu \geqslant |r^\alpha \nabla v|^p + \beta_0\delta_0(x) + \beta_\infty\delta_\infty(x), \\ &\alpha_0, \alpha_\infty \geqslant 0, \quad \beta_0 = \frac{\alpha_0^{1-\frac{\sigma p}{n}}}{K^p}, \quad \beta_\infty = \frac{\alpha_\infty^{1-\frac{\sigma p}{n}}}{K^p}. \end{aligned} \tag{4}$$

Следствие 1. *При любом* $0 < \sigma < \min\{1, \frac{n}{p}\}$ *существует функция* $v \in \mathcal{L}(m, G)$ *такая, что в неравенстве* (3) *достигается равенство.*

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность v_k для функционала $J(v)$. Так как J инвариантен относительно растяжений аргументов и домножений на константу функции v, можно считать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |r^\alpha \nabla v_k|^p \, dx = 1, \qquad \int\limits_{B_1} |r^\alpha \nabla v_k|^p \, dx = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Не переходя к новым индексам, выберем подпоследовательность из предыдущего утверждения. Для предельной функции v по-прежнему выполняется неравенство

$$\frac{1}{K} \leqslant \frac{\|r^\alpha \nabla v\|_p}{\|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q}. \tag{6}$$

Далее, так как $\|r^{\alpha+\sigma-1}v_k\|_q \to K$, из (4) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \left(\|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q^q + \alpha_0 + \alpha_\infty\right)^{1-\frac{\sigma p}{n}} &= K^p \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^p \, d\mu \geqslant K^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |r^\alpha \nabla v|^p \, dx &+ K^p\beta_0 + K^p\beta_\infty \\ \geqslant \|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q^p &+ \alpha_0^{1-\frac{\sigma p}{n}} + \alpha_\infty^{1-\frac{\sigma p}{n}} \\ = \|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q^{q\cdot\left(1-\frac{\sigma p}{n}\right)} &+ \alpha_0^{1-\frac{\sigma p}{n}} + \alpha_\infty^{1-\frac{\sigma p}{n}}. \end{aligned}$$

Так как показатель $1-\frac{\sigma n}{p}$ меньше единицы, это возможно только лишь в том случае, если все слагаемые, кроме одного, — нули. В силу второго соотношения (5) получается, что $\alpha_0 = \alpha_\infty = 0$. Таким образом, $\|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q = K$. Поскольку $\|r^\alpha \nabla v\|_p \leqslant 1$, функция v доставляет минимум функционалу J. □

Следующая лемма – аналог Леммы 3.1 [4].

Лемма 1. *Пусть n кратно m, G – конечная подгруппа $O(m)$. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *если $p \geqslant n$, то существует $\widehat{\sigma}(n,m,p,G,\alpha) < \frac{n}{p}$, такое, что при $\sigma > \widehat{\sigma}$ любая m-радиальная функция v не дает минимума функционалу J на множестве $\mathcal{L}(m,G)$;*
2. *если $p \geqslant 2$, то существует $\widehat{\alpha}(n,m,p,G,\sigma) > 1-\frac{n}{p}$, такое, что при $\alpha > \widehat{\alpha}$ любая m-радиальная функция v не дает минимума функционалу J на множестве $\mathcal{L}(m,G)$.*

Доказательство. Пусть $v(r)$ – m-радиальная функция, на которой функционал J достигает своего минимума по множеству всех m-радиальных функций из $\mathcal{D}^{1,p}_\alpha$. Не умаляя общности, будем считать, что $\|r^{\alpha+\sigma-1}v\|_q = 1$.

В силу принципа симметричной критичности (см. [22]) имеем $dJ(v;h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{D}^{1,p}_\alpha$. Учитывая это равенство, получаем

$$\begin{aligned} J^{p-1}(v)\cdot d^2J(v;h,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}|\nabla v|^{p-4}\Big((p-2)\langle\nabla v,\nabla h\rangle^2 + |\nabla v|^2|\nabla h|^2\Big)\,dx \\ -J^p(v)\Bigg[(p-q)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q} vh|v|^{q-2}\,dx\right)^2 \\ +(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q}h^2|v|^{q-2}\,dx\Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

В качестве приращения будем рассматривать $h_i = vf_i$, где $f_i = \frac{r_i}{r}\cdot U(\vartheta_i)$, а U – пока что произвольная гладкая функция на $\mathbb{S}_m$, ортогональная единице. Очевидно, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q} vh_i|v|^{q-2}\,dx = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \langle\nabla v,\nabla h_i\rangle^2 &= |\nabla v|^2\left\langle\nabla v,\nabla(vf_i^2)\right\rangle + v^2\left\langle\nabla v,\nabla f_i\right\rangle^2, \\ |\nabla h_i|^2 &= \left\langle\nabla v,\nabla(vf_i^2)\right\rangle + v^2|\nabla f_i|^2. \end{aligned}$$

Прямым вычислением показывается, что $vf_i^2 \in \mathcal{D}^{1,p}_\alpha$, поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= dJ(v,vf_i^2) \\ &= J(v)\left[\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}|\nabla v|^{p-2}\left\langle\nabla v,\nabla(vf_i^2)\right\rangle dx}{\|r^\alpha\nabla v\|_p^p} - \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^q f_i^2\,dx}{\|r^{(\alpha+\sigma-1)q}v\|_q^q}\right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (7) и учитывая нормировку v, получим

$$\begin{aligned}
&J^{p-1}(v)\cdot d^2J(v;h_i,h_i)\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}v^2|\nabla v|^{p-4}\left((p-2)\langle\nabla v,\nabla f_i\rangle^2+|\nabla v|^2|\nabla f_i|^2\right)dx\\
&-(q-p)\cdot J^p(v)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^{q-2}h_i^2\,dx.
\end{aligned}$$

Так как $\langle\nabla v,\nabla U\rangle=0$, имеем

$$\begin{aligned}
J^{p-1}(v)\cdot d^2J(v;h_i,h_i)&=\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}|\nabla v|^{p-2}\,\frac{v^2}{r^2}\,|\nabla_{\vartheta_i}U|^2\,dx\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}|\nabla v|^{p-4}\,v^2\,U^2\,\left((p-2)\left\langle\nabla v,\nabla\frac{r_i}{r}\right\rangle^2+|\nabla v|^2\left|\nabla\frac{r_i}{r}\right|^2\right)dx\\
&-(q-p)\,J^p(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^q f_i^2\,dx.
\end{aligned}\tag{8}$$

Пусть теперь U – решение экстремальной задачи

$$\Lambda=\min\frac{\|\nabla_\vartheta w\|^2_{L_2(\mathbb{S}_m)}}{\|w\|^2_{L_2(\mathbb{S}_m)}}$$

(минимум берется по множеству G-инвариантных функций, ортогональных единице). Первые два слагаемых в (8) с учетом $p\geq 2$ оцениваются сверху через интеграл

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}\,|\nabla v|^{p-2}\,v^2\,\left(\frac{1}{r^2}\,|\nabla_{\vartheta_i}U|^2+(p-1)\,\left|\nabla\frac{r_i}{r}\right|^2\,U^2\right)dx\\
&=\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}\,U^2\,|\nabla v|^{p-2}\,\frac{v^2}{r^2}\,\left(\Lambda+(p-1)\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right)\right)\\
&=|\mathbb{S}_m|^{l-1}\int\limits_{\mathbb{S}_m} U^2\int\limits_{\Omega_r} r^{\alpha p}\,|\nabla v|^{p-2}\frac{v^2}{r^2}\,\left(\Lambda+(p-1)\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right)\right)\omega,
\end{aligned}$$

где $\Omega_r=\{(r_1,\ldots,r_l):\quad r_i>0\}$, $\omega=\prod\limits_{i=1}^{l} r_i^{m-1}$.

Мы считаем, что U нормирована в $L_2(\mathbb{S}_m)$, поэтому

$$|\mathbb{S}_m|\, J^{p-1}(v)\cdot d^2J(v;h_i,h_i) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}|\nabla v|^{p-2}\frac{v^2}{r^2}\left(\Lambda+(p-1)\left(1-\frac{r_i^2}{r^2}\right)\right)dx \\ -(q-p)J^p(v)\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q}|v|^q\cdot\frac{r_i^2}{r^2}\,dx. \tag{9}$$

Далее, положим $h=\sum\limits_{i=1}^{l}h_i\in\mathcal{L}_{(m,G)}$. Несложно видеть, что

$$D^2J(v;h,h)=\sum_{i=1}^{l}D^2J(v;h_i,h_i).$$

Просуммировав неравенства (9) по всем i и учитывая нормировку v, получим

$$|\mathbb{S}_m|\, J^{p-1}(v)\cdot d^2J(v;h,h) \\ \leqslant (l\Lambda+(l-1)(p-1))\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}\,|\nabla v|^{p-2}\,\frac{v^2}{r^2}\,dx-(q-p)\,J^p(v).$$

Оставшийся интеграл оценивается по неравенствам Гельдера и Харди:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p}\,|\nabla v|^{p-2}\,\frac{v^2}{r^2}\,dx \leqslant J^{p-2}(v)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} v^p\, r^{p(\alpha-1)}\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant c_{n,p,\alpha}^2\cdot J^p(v)$$

(здесь $c_{n,p,\alpha}=\frac{p}{n+p(\alpha-1)}$), откуда

$$|\mathbb{S}_m|\cdot d^2J(v;h,h)\leqslant J(v)\left[(l\Lambda+(l-1)(p-1))\,c_{n,p,\alpha}^2-(q-p)\right]. \tag{10}$$

Далее доказательство разделяется на две части.

1. Если $p\geq n$, то при σ, близких к $\frac{n}{p}$, показатель $q=\frac{np}{n-\sigma p}$ становится сколь угодно большим, и потому правая часть неравенства (10) отрицательна. Поэтому $d^2J(v;h,h)<0$, откуда следует первое утверждение леммы.

2. При больших α коэффициент $c(n,p,\alpha)$ мал, и потому правая часть (10) вновь отрицательна. Отсюда следует второе утверждение.

Зависимость $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\alpha}$ от G выражена в (10) через множитель Λ. $\square$

Пусть теперь $m = 2$. Обозначим G_t подгруппу в $O(2)$, порождаемую поворотом на угол $2\pi/t$, $t \in \mathbb{N}$. Функцию, минимизирующую функционал J на пространстве $\mathcal{L}(2, G_t)$, будем обозначать $u_{(2,t)}$.

Лемма 2. *Пусть n чётно. Тогда для любых $t, t' \in \mathbb{N}$*

(1) *при условии $p \geqslant n$ существует такое $\widehat{\sigma}(n, p, \alpha, t, t') < \frac{n}{p}$, что при $\sigma > \widehat{\sigma}$ функции $u_{(2,t)}$ и $u_{(2,t')}$ различны;*

(2) *при условии $p \geqslant 2$ существует такое $\widehat{\alpha}(n, p, \sigma, t, t') > 1 - \frac{n}{p}$, что при $\alpha > \widehat{\alpha}$ функции $u_{(2,t)}$ и $u_{(2,t')}$ различны.*

Доказательство. Запишем $|\nabla u|^2$ следующим образом:

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{l} \left(u_{r_i}^2 + \frac{1}{r_i^2} u_{\vartheta_i}^2 \right).$$

Пусть сначала $t' = st$, $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$v_{(2,t)}((r_1, \vartheta_1), \ldots (r_l, \vartheta_l)) = u_{(2,st)} \left((r_1, \frac{1}{s}\vartheta_1), \ldots (r_l, \frac{1}{s}\vartheta_l) \right).$$

Тогда $v_{(2,t)} \in \mathcal{L}(2, G_t)$, и ввиду $\left(v_{(2,t)}\right)_{\vartheta_i} = \frac{1}{s}(u_{(2,st)})_{\vartheta_i}$ получаем

$$\|r^{\alpha+\sigma-1} v_{(2,t)}\|_q = \|r^{\alpha+\sigma-1} u_{(2,st)}\|_q, \ \|r^{\alpha} \nabla v_{(2,t)}\|_p < \|r^{\alpha} \nabla u_{(2,st)}\|_p, \tag{11}$$

если только $\left(u_{(2,st)}\right)_{\vartheta_i} \not\equiv 0$. Но последнее означает, что $u_{(2,st)}$ — 2-радиальная функция, что невозможно по Лемме 1. Из (11) вытекает

$$J(u_{(2,t)}) \leqslant J(v_{(2,t)}) < J(u_{(2,st)}), \tag{12}$$

что доказывает оба утверждения леммы при $t' = st$.

В общем случае положим $\widehat{t} = \text{НОК}(t, t')$. Если $u_{(2,t)}$ и $u_{(2,t')}$ эквивалентны, то $u_{(2,t)} \in \mathcal{L}(2, G_{\widehat{t}})$. А тогда $J(u_{(2,\widehat{t})}) \leqslant J(u_{(2,t)})$, что противоречит (12). $\square$

§3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть n – четное. Тогда*

(1) *если $p \geqslant n$ и $\alpha > 1 - \frac{n}{p}$, то для любого $t_0 \in \mathbb{N}$ существует $\widehat{\sigma}(t_0, n, p, \alpha) < \frac{n}{p}$ такое, что при $\sigma > \widehat{\sigma}$ для всех $t \leq t_0$ существует положительное 2-симметричное, G_t-инвариантное решение уравнения (1), причем решения при различных t различны.*

(2) *если* $p \geqslant 2$, *то для любого* $t_0 \in \mathbb{N}$ *существует* $\widehat{\alpha}(t_0, n, p, \sigma) > 1 - \frac{n}{p}$ *такое, что при* $\alpha > \widehat{\alpha}$ *для всех* $t \leq t_0$ *существует положительное* 2*-симметричное,* G_t*-инвариантное решение уравнения* (1)*, причем решения при различных* t *различны.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое значение t_0. Для всех $t \leq t_0$ следствие 1 показывает, что функционал J достигает минимума на $\mathcal{L}(2, G_t)$. Ввиду леммы 1 все минимайзеры попарно различны, если при заданном α параметр σ достаточно близок к $\frac{n}{p}$ или, соответственно, если при заданном σ параметр α достаточно велик.

Из принципа симметричной критичности следует $dJ(u_{(2,t)}; h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{D}^{1,p}_{\alpha}$. После домножения $u_{(2,t)}$ на подходящую константу уравнение Эйлера–Лагранжа для J совпадает с (1).

Поскольку $J(|v|) = J(v)$, функция $|u_{(2,t)}|$ также является решением уравнения (1). В силу неравенства Гарнака (см. [24]) она положительна в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$. Тогда уравнение (1) следует рассматривать в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и под решением понимается обобщенное решение из пространства

$$\mathcal{D}^{1,p}_{\alpha,0} = \{v \in L^q(\mathbb{R}^n; |x|^{(\alpha+\sigma-1)q}\,dx) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |\nabla v|^p\,dx < \infty,\ v(0) = 0\}.$$

Воспользуемся приемом из работы [11]. Рассмотрим преобразование инверсии относительно единичной сферы $\mathcal{K}(x) = x/|x|^2$. Прямыми вычислениями показывается, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\alpha p} |\nabla v|^p\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\left(2-\frac{2n}{p}-\alpha\right)p} |\nabla(v \circ \mathcal{K})|^p\,dx,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{(\alpha+\sigma-1)q} |v|^q\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} r^{\left(2-\frac{2n}{p}-\alpha+\sigma-1\right)q} |v \circ \mathcal{K}|^q\,dx.$$

Заметим, что $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$ влечет $2 - \frac{2n}{p} - \alpha > 1 - \frac{n}{p}$. Таким образом, с помощью преобразования $\alpha \mapsto 2 - \frac{2n}{p} - \alpha$ решения из пространства $\mathcal{D}^{1,p}_{\alpha,0}$ для $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$ переводятся в решения из пространства $\mathcal{D}^{1,p}_{\alpha}$ для $\alpha > 1 - \frac{n}{p}$. Поэтому из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* n *– четное. Тогда*

(1) *если* $p \geqslant n$ *и* $\alpha < 1 - \frac{n}{p}$, *то для любого* $t_0 \in \mathbb{N}$ *существует* $\widehat{\sigma}(t_0, n, p, \alpha) < \frac{n}{p}$ *такое, что при* $\sigma > \widehat{\sigma}$ *для всех* $t \leq t_0$ *существует положительное* 2*-симметричное,* G_t*-инвариантное решение уравнения* (1)*, причем решения при различных* t *различны.*

(2) *если* $p \geqslant 2$*, тогда для любого* $t_0 \in \mathbb{N}$ *существует* $\widehat{\alpha}(t_0, n, p, \sigma) < 1 - \frac{n}{p}$ *такое, что при* $\alpha < \widehat{\alpha}$ *для всех* $t \leq t_0$ *существует положительное* 2*-симметричное,* G_t*-инвариантное решение уравнения* (1)*, причем решения при различных* t *различны.*

Литература

1. А. И. Енин, А. И. Назаров, *Множественность решений квазилинейной задачи Неймана в трехмерном случае.* — Пробл. мат. анализа, **78** (2015), 85–94.
2. В. П. Ильин, *Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных.* — Мат. сб., **54** (1961), No. 3, 331–380.
3. С. Б. Колоницкий, *Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое.* — Алгебра и анализ, **22** (2010), No. 3, 206–221.
4. А. И. Назаров, *О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего p-лапласиан, в сферическом слое.* — Труды СПбМО, **10** (2004), 33–62.
5. А. И. Назаров, *Неравенства Харди–Соболева в конусе.* — Пробл. мат. анализа, **31** (2005), 39–46.
6. А. П. Щеглова, *Множественность решений для краевой задачи с нелинейным условием Неймана.* — Пробл. мат. анализа, **30** (2005), 121–144.
7. J. Byeon, *Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli.* — J. of Diff. Eqs, **136** (1997), 136–165.
8. J. Byeon, Z.-Q. Wang, *Symmetry breaking of extremal functions for the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* — Commun. Contemp. Math, **4**, No. 3 (2002), 457–465.
9. L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights.* — Compositio Math, **53**, No. 3 (1984), 259–275.
10. P. Caldiroli, R. Musina, *On the existence of extremal functions for a weighted Sobolev embedding with critical exponent.* — Calc. Var. Part. Diff. Eqs, **8**, No. 4 (1999), 365–387.
11. P. Caldiroli, R. Musina, *Symmetry Breaking of Extremals for the Caffarelli–Kohn–Nirenberg Inequalities in a Non-Hilbertian Setting.* — Milan Journal of Mathematics **81**, No. 2 (2013), 421–430.

12. F. Catrina, Z.-Q. Wang, *On the Caffarelli – Kohn – Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions.* — Comm. Pure Appl. Math, **54**, No. 2 (2001), 229–258.
13. C. V. Coffman, *A non-linear boundary value problem with many positive solutions.* — J. of Diff. Eqs, **54** (1984), 429–437.
14. J. Dolbeault, M. J. Esteban, M. Loss, *Symmetry of extremals of functional inequalities via spectral estimates for linear operators.* — J. Math. Phys., **53**, No. 9 (2012), 095204, 18 pp.
15. J. Dolbeault, M. J. Esteban, G. Tarantello, *The role of Onofri type inequalities in the symmetry properties of extremals for Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities, in two space dimensions.* — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., (5) **7**, No. 2 (2008), 313–341.
16. V. Felli, M. Schneider, *Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg type.* — J. Diff. Eqs, **191**, No. 1 (2003), 121–142.
17. M. Gazzini, R. Musina, *On a Sobolev-type inequality related to the weighted p-Laplace operator.* — J. Math. Anal. Appl., **352**, No. 1 (2009), 99–111.
18. T. Horiuchi, *Best constant in weighted Sobolev inequality with weights being powers of distance from the origin.* — J. Inequal. Appl., **1**, No. 3 (1997), 275–292.
19. Y. Y. Li, *Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus.* — J. of Diff. Eqs, **83** (1990), 348–367.
20. P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case.* — Ann. Inst. H.Poincaré. Anal. Non Linéaire, **1** (1984), 109–145, 223–283.
21. V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova, *A Collection of sharp dilation invariant integral inequalities for differentiable functions.* Sobolev spaces in mathematics. I, Int. Math. Ser. (N. Y.), Springer, New York, 8 (2008), 223–247.
22. R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality.* — Comm. in Math. Phys. **69** (1979), 19–30.
23. D. Smets, M. Willem, *Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic variational problems.* — Calc. Var. Part. Diff. Eqs, **18**, No. 1 (2003), 57–75.
24. N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.* — Comm. in Pure and Appl. Math. **20** (1967), 721–747.

Nazarov A. I., Neterebskii B. O. The multiplicity of positive solutions to the quasilinear equation generated by the Il'in–Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality.

We consider the Euler–Lagrange equation for the functional related to the V. P. Il'in inequality also known as the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality. We prove that if the space dimension is even then, changing

some parameters, we can obtain arbitrary many different positive solutions for this equation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

ООО "НПП 'Лазерные Системы'"

Поступило 12 ноября 2015 г.