Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 444, 2016 г.

С. В. Банкевич

О МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПРИ МОНОТОННОЙ ПЕРЕСТАНОВКЕ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§1. Введение

Пусть $\Omega = \omega \times [-1,1]$, где ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)\, dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ – характеристическая функция множества A.

Определим монотонную перестановку измеримого множества $E \subset [-1,1]$ и монотонную перестановку неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [1 - |E|, 1]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)\, dt.$$

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\,\cdot\,, \,\cdot\,, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$I(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)\, dx, \tag{1}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x)) D_1 u, \dots, a_{n-1}(x', u(x)) D_{n-1} u, a(x, u(x)) D_n u)$$

Ключевые слова: перестановки функций, интегральные функционалы.
Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-07650.

– градиент u с весом (следует обратить внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\,\cdot\,,\cdot\,) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\,\cdot\,,\cdot\,) : \omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

Хорошо известно, что при $a_i = a \equiv 1$ справедливо неравенство

$$I(u^*) \leqslant I(u), \qquad u \in W_1^1(\Omega),\ \ u \geqslant 0 \tag{2}$$

(см., например, [2] и цитированную там литературу).

В настоящей работе мы приводим необходимые условия на вес a для выполнения неравенства (2) и доказываем неравенство (2) при некоторых дополнительных ограничениях.

В работе [3] рассматривается неравенство, аналогичное (2). А именно,

$$I(\overline{u}) \leqslant I(u), \qquad u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\Omega),\ \ u \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\overline{u}$ – симметризация по Штейнеру (симметричная перестановка) функции u по переменной y. Автор [3] доказывает неравенство в случае, когда вес a – четная и выпуклая по y функция. Для этого неравенство (3) доказывается для кусочно линейных функций u и утверждается, что в общем случае неравенство получается при помощи аппроксимации. Однако предельный переход в [3] должным образом не обоснован, и можно считать, что результат получен лишь для липшицевых функций u. Отметим, что в статье [3] также только вес при $D_n u$ зависит от y, избавиться от этого ограничения не удается.

В одномерном случае неравенства (2) и (3) рассматриваются в работе [4], где получены необходимые и достаточные условия их выполнения. В частности, пробел в работе [3] был закрыт для $n = 1$. При некоторых дополнительных ограничениях этот результат был анонсирован в [5].

В статье [6] рассматривается неравенство (2) с аналогичным функционалом в двумерном случае при дополнительном ограничении $u(\,\cdot\,, -1) \equiv 0$. Отметим, что наши условия на весовые функции слабее, чем в [6].

Статья разделена на четыре параграфа. В §2 приведены условия, необходимые для выполнения неравенства (2). В §3 приведено доказательство неравенства (2) для кусочно линейных функций u. §4 содержит доказательство неравенства в более общих случаях.

§2. Условия, необходимые для выполнения неравенства (2)

Здесь и далее мы будем ссылаться на некоторые утверждения из работы [4], доказательства которых в многомерном случае дословно совпадают с доказательствами в одномерном случае.

Кроме того, в данном параграфе мы для простоты опускаем параметры x' и v у функции a, подразумевая, что все неравенства выполняются для любых $x' \in \omega, v \in \mathbb{R}_+$. В рамках этой договоренности положим $a(x', y, v) \equiv a(y)$.

Предложение 1 ([4, Теорема 1]). **1.** *Если неравенство* (2) *выполняется для некоторой* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u*, то вес* a *четен по* y*, то есть* $a(y) \equiv a(-y)$.

2. *Если неравенство* (2) *выполняется для произвольной* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u*, то вес* a *удовлетворяет неравенству*

$$a(s) + a(t) \geqslant a(1 - t + s), \qquad -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \tag{4}$$

Замечание 1. Если функция a неотрицательна, а также четна и вогнута по первому аргументу, то она удовлетворяет условию (4). Действительно: для такой функции при любых (s, t) выполнено $a(1) - a(s) \leqslant a(t) - a(-1+t-s)$. А так как $a(1) \geqslant 0$, то получаем $a(s)+a(t) \geqslant a(-1+t-s) = a(1-t+s)$. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть не всякая четная неотрицательная функция, удовлетворяющая (4), вогнута.

Замечание 2. Если положить $u(\,\cdot\,, -1) \equiv 0$, то условие (4) остается необходимым для выполнения неравенства (2).

Предложение 2 ([4, Лемма 1]). *Рассмотрим непрерывную функцию* $a \geqslant 0$*, заданную на* $[-1, 1]$ *и удовлетворяющую условию* (4). *Тогда для любых* $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant 1$ *верно*

$$\sum_{k=1}^{m} a(t_k) \geqslant a(1 - \sum_{k=1}^{m} (-1)^k t_k), \qquad \text{для четных } m,$$
$$\sum_{k=1}^{m} a(t_k) \geqslant a(- \sum_{k=1}^{m} (-1)^k t_k), \qquad \text{для нечетных } m.$$

§3. Доказательство неравенства (2) для кусочно линейных функций

В этом параграфе мы докажем неравенство (2) для кусочно линейных функций.

Лемма 1. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ четна и удовлетворяет условию (4) для всех (x', u). Тогда, если u – неотрицательная кусочно линейная функция, то $I(u) \geqslant I(u^*)$.*

Доказательство. Доказательство следует схеме доказательства теоремы 2 в [4]. Пусть функция u имеет изломы на множестве $\partial\Omega \subset C \subset \Omega$. Возьмем

$$U := \{(x', u(x', y)) : y \in (-1, 1), (x', y) \notin C\}.$$

Тогда открытое множество U разбивается в объединение конечного числа связных открытых множеств G_j. Обозначим m_j число прообразов значения $(x', u_0) \in G_j$, то есть число решений уравнения $u(x', y) = u_0$ (очевидно, это число постоянно для $(x', u_0) \in G_j$). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями (x', u_0): $y = y_k^j(x', u_0)$, $k = 1, \dots, m_j$, и $D_n y_k^j(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u(x', y)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(x', u_0) < y_2^j(x', u_0) < \cdots < y_{m_j}^j(x', u_0)$.

Уравнение $u^*(x_0', y^*) = u_0$ задает y^* как функцию $(x_0', u_0) \in G_j$. Ее можно выразить через y_k^j (в частности, y^* кусочно линейна):

$u(x_0', -1) < u_0$	m_j четно	$y^* = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
$u(x_0', -1) > u_0$	m_j четно	$y^* = -1 + \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$
	m_j нечетно	$y^* = \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j$

Отсюда ясно, что при $(x', u) \in G_j$

$$D_n y^*(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u^*(x', y)} = \sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x', u(x', y))|$$

и $D_i u^*(x', y) = \pm \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k D_i y_k^j(x', u(x', y))$, где знак перед правой частью зависит только от j.

Тогда

$$\begin{aligned} I(u) &= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{G_j} F(x', u(x), \|a_i(x', u(x)) D_i u(x), a(x, u(x)) D_n u(x)\|)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{u(G_j)} \sum_{k=1}^{m_j} F\Big(x', u, \frac{\|a_i(x', u) D_i y_k^j(x', u), a(x', y_k^j(x', u), u)\|}{\Big|D_n y_k^j(x', u)\Big|}\Big) \\ &\qquad\qquad \times \Big|D_n y_k^j(x', u)\Big|\, dx'\, du, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} I(u^*) &= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{G_j} F(x', u^*, \|a_i(x', u^*(x)) D_i u^*(x), a(x, u^*(x)) D_n u^*(x)\|)\, dx \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{u(G_j)} F\Big(x', u^*, \frac{\|a_i(x', u^*) D_i y^*(x', u^*), a(x', y^*(x', u^*), u^*)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m_j} \Big|D_n y_k^j(x', u^*)\Big|}\Big) \\ &\qquad\qquad \times \sum_{k=1}^{m_j} \Big|D_n y_k^j(x', u^*)\Big|\, dx'\, du^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Зафиксируем j, x' и u и обозначим $b_k = \Big|D_n y_k^j\Big|$, $c_{ki} = D_i y_k^j$, $c_i^* = D_i y^*$, $y_k = y_k^j(x', u)$, $y^* = y^*(x', u)$, $m = m_j$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{m} b_k F\Big(\frac{\|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{b_k}\Big) \overset{a}{\geqslant} F\Big(\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$\overset{b}{=} F\Big(\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \|(-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$\overset{c}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum\limits_{k=1}^{m} ((-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k))\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$= F\Big(\frac{\|\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k a_i c_{ki}, \sum\limits_{k=1}^{m} a(y_k)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$\overset{d}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k a_i c_{ki}, a(y^*)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$\overset{e}{=} F\Big(\frac{\|\pm a_i \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^k c_{ki}, a(y^*)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k$$

$$= F\Big(\frac{\|a_i c_i^*, a(y^*)\|}{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k}\Big) \sum_{k=1}^{m} b_k. \qquad (7)$$

Здесь в переходе (a) применено неравенство Йенсена, в переходах (b) и (e) использована четность нормы, в (c) использовано неравенство треугольника, в (d) – предложение 2 и четность веса a по y.

Из (7) видно, что подынтегральное выражение в (5) не меньше подынтегрального выражения в (6). Тем самым, доказательство завершено. □

Замечание 3. Если $u(\,\cdot\,,-1)\equiv 0$, то утверждение леммы верно без условия четности веса. Четность используется только в переходе (d) цепочки неравенств (7), и, поскольку при $u(\,\cdot\,,-1)\equiv 0$ всегда выполнено $u(x_0',-1)<u_0$, то предложение 2 как раз обеспечивает требуемые для перехода (d) неравенства.

§4. Переход к соболевским функциям

Следующие утверждения доказаны в одномерном случае в работе [4]. Доказательства в многомерном случае совершенно аналогичны.

Предложение 3 ([4, Лемма 5])**.** *Функционал $I(u)$ слабо полунепрерывен снизу в $W_1^1(\Omega)$.*

Предложение 4 ([4, Лемма 6])**.** *Пусть $A\subset W_1^1(\Omega)$. И пусть $B\subset A$ таково, что $\forall v\in B$ выполнено $I(v^*)\leqslant I(v)$. Предположим, что для каждого $u\in A$ найдется последовательность $u_k\in B$ такая, что $u_k\to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $I(u_k)\to I(u)$. Тогда $\forall u\in A$ будет выполнено $I(u^*)\leqslant I(u)$.*

Теорема 1. *Пусть функция $a(x',\,\cdot\,,u)$ четна и удовлетворяет условию (4) для всех x' и u. Тогда*

1. *Неравенство (2) верно для произвольной неотрицательной $u\in \mathrm{Lip}(\Omega)$.*

2. *Предположим, что $\partial\omega\in \mathrm{Lip}$ и для любых $x'\in\omega, z\in\mathbb{R}_+, p\in\mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x',z,p)\leqslant C(1+|z|^{q^*}+|p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$, если $q<n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q\leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (2) верно для произвольной неотрицательной $u\in W_q^1(\Omega)$.

Доказательство. 1. Мы можем приблизить липшицевы u кусочно линейными функциями u_k вместе с производными почти всюду. Поскольку u_k равномерно ограничены вместе с производными, то и $F(x',u_k(x),\|\mathcal{D}u_k\|)$ равномерно ограничены. Тогда мы можем воспользоваться теоремой Лебега, получив $u_k\to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $I(u_k)\to I(u)$. Воспользовавшись предложением 4, получаем требуемое.

2. Рассмотрим произвольную $u\in W_q^1(\Omega)$. Для нее можно построить последовательность кусочно линейных функций u_k, приближающих ее в $W_q^1(\Omega)$. Действительно, поскольку $\partial\Omega \in \mathrm{Lip}$, u можно продолжить финитным образом на внутренность большого шара в $\mathbb{R}^n$ и приблизить гладкими финитными функциями. Далее шар триангулируется, и значения функции линейно интерполируются. Очевидно, в процессе все функции остаются неотрицательными.

Тогда, ввиду предложения 4, достаточно добиться $I(u_k) \to I(u)$. Доказательство этой сходимости можно свести к теореме Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого (см. [7, гл. 5, §17]). Однако для удобства читателя мы приводим здесь рассуждение целиком.

Покажем, что веса $a_i(x', u(x))$ и $a(x, u(x))$ ограничены. Если $q \leqslant n$, то это выполнено по предположению теоремы. Если же нет, то $W_q^1(\Omega)$ вкладывается в $C(\overline{\Omega})$, тем самым, $u_k(x)$ равномерно ограничены, а значит, и $a_i(x', u_k(x))$ и $a(x, u_k(x))$ равномерно ограничены. Поэтому $\|\mathcal{D}u_k(x)\| \leqslant C_1|\nabla u_k(x)|$. То есть,

$$F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leqslant C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q).$$

Рассмотрим множества A_m, состоящие из $x \in \Omega$, для которых при всех $k \geqslant m$ выполнено $1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q \leqslant 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q)$. Очевидно, что $A_m \subset A_{m+1}$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $u_k \to u$ и $\nabla u_k \to \nabla u$ почти всюду. А значит $|A_m| \to |\Omega|$. Тогда

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) & \leqslant & 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q), \\ \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) & \to & F(x', u(x), \|\mathcal{D}u(x)\|) \end{array}$$

почти всюду. По теореме вложения $\|u_k\|_{q^*} \leqslant C_3\|u_k\|_{W_q^1}$. Тем самым, мы нашли суммируемую мажоранту и получаем

$$\int\limits_\Omega \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)\, dx \to I(u)$$

по теореме Лебега.

Теперь оценим остаток:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\setminus A_k} & F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)\,dx \\ &\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus A_k} C_2(1+|u_k(x)|^{q^*}+|\nabla u_k(x)|^q)\,dx \\ &\leqslant C_4\Big(\int\limits_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q)\,dx \\ &\quad + \int\limits_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x)|^q)\,dx\Big).\end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю по абсолютной непрерывности интеграла. Для второго слагаемого выполнено

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\setminus A_k} & (1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x))|^q)\,dx \\ &\leqslant C_5\big(|\Omega\setminus A_m(k)|+\|u-u_k\|^{q^*}_{W^1_q}+\|u-u_k\|^q_{W^1_q}\big)\to 0.\end{aligned}$$

Тем самым, сходимость $I(u_k)\to I(u)$ доказана. □

Аналогично, с учетом замечаний (2) и (3), доказывается

Теорема 2. *Пусть* $u(\,\cdot\,,-1)\equiv 0$ *и функция* $a(x',\,\cdot\,,u)$ *удовлетворяет условию* (4) *для всех* x' *и* u. *Тогда верны выводы теоремы* 1.

Я признателен А. И. Назарову за постановку задачи, многочисленные ценные замечания и мотивацию. Также я признателен В. Г. Осмоловскому за замечания, позволившие улучшить текст статьи.

Литература

1. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ.* Научная книга, Новосибирск, 276 с. (1998)
2. B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE.* — Lecture notes in mathematics **1150**. Berlin; Springer Verlag, 134 p. (1985)
3. F. Brock, *Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization.* — Calc. Var. and PDEs **8** (1999), 15–25.
4. S. V. Bankevich, A. I. Nazarov, *On monotonicity of some functionals under rearrangements.* — Calc. Var. and PDEs **53**, No. 3 (2015), 627–647. (http://link.springer.com/article/10.1007/s00526-014-0761-6)

5. С. В. Банкевич, А. И. Назаров, *Об обобщении неравенства Пойа–Сеге для одномерных функционалов*. — Доклады Академии Наук **438**, No. 1 (2011), 11–13.
6. R. Landes, *Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density*. — Math. Nachr. **280**, No. 5–6 (2007), 560–570.
7. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*. Наука, М., 1966.

Bankevich S. V. On monotonicity of some functionals under monotone rearrangement with respect to one variable.

We consider the P]'olya–Szegö inequality for monotone rearrangement with integrand dependent on the rearrangement variable. The inequality is proved for integrands having polynomial growth.

Центр алгоритмической биотехнологии,
С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. д.7-9,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: Sergey.Bankevich@gmail.com

Поступило 11 ноября 2015 г.