Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

А. В. Щеголев

НАДГРУППЫ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ НАД КВАЗИ-КОНЕЧНЫМ КОЛЬЦОМ: ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая работа является анонсом результатов о строении решетки подгрупп гиперболической унитарной группы над квази-конечным кольцом. Подробные доказательства и обсуждение представленных здесь результатов содержатся в кандидатской диссертации автора [27]. Данное исследование относится к описанию промежуточных подгрупп гиперболической унитарной группы, определенной А. Баком (ср. [20–22, 24]). Центральный результат может быть сформулирован следующим образом. Пусть H – подгруппа гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, содержащая блочно-диагональную подгруппу $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$ типа ν. Предположим, что все самосопряженные блоки ν имеют размер хотя бы 6 (хотя бы 4 в случае, когда форменный параметр Λ удовлетворяет условию $R\Lambda + \Lambda R = R$) и все не самосопряженные блоки имеют размер хотя бы 5. Тогда существует единственная главная точная форменная сеть идеалов (σ, Γ) ранга $2n$ над (R, Λ) такая, что

$$\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)),$$

где $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ обозначает нормализатор в $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ форменной сетевой подгруппы $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ уровня (σ, Γ), а $\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma)$ обозначает соответствующую элементарную форменную сетевую подгруппу.

Подробный обзор истории проблемы и имеющихся результатов будет включен в одну из следующих статей этой серии. Здесь мы упомянем лишь основные ссылки. Одним из основных направлений исследований в области изучения решетки подгрупп классических групп над кольцами, вытекающим непосредственно из описания максимальных подгрупп классических групп над конечными и алгебраически замкнутыми полями [15–19, 25, 26, 28], является изучение надгрупп определенных "достаточно больших" подгрупп, соответствующих классам

Ключевые слова: гиперболическая унитарная группа, элементарная группа, трансвекции, параболические подгруппы, стандартность автоморфизмов, блочно-диагональная подгруппа, локализационные методы.

Ашбахера $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$ (ср. [9,25]). В этом смысле, настоящая работа посвящена изучению решетки надгрупп так называемых *subsystem subgroups*, которые получаются как комбинация классов Ашбахера $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ и являются почленными стабилизаторами разложений квадратичного модуля, на котором действует данная классическая группа, в произведение невырожденных и вполне изотропных подмодулей.

Задача описания надгрупп subsystem subgroups в полной линейной группе над коммутативными кольцами и кольцами, удовлетворяющими условиям стабильного ранга, была впервые рассмотрена в работах [2–4, 6, 8] З. И. Боревича, Н. А. Вавилова и В. Наркевича. Позднее, та же задача была решена А. Баком и А. В. Степановым над квази-конечными кольцами с использованием локализационных методов в [23]. Случай классических групп над коммутативными кольцами с обратимой 2 был рассмотрен в главе V докторской диссертации Н. А. Вавилова. Соответствующие доказательства опубликованы в [5] и [7] для расщепимой ортогональной и симплектической групп соответственно.

Случай классических групп над кольцами без условия обратимости 2 оказывается технически существенно более сложным и уже для описания надгрупп subsystem subgroups в классической симплектической группе требует применения локализации. Также, меняется сама формулировка ответа. В перечисленных выше работах каждой надгруппе subsystem subgroup ставилась в соответствие сеть идеалов, в то время как без условия обратимости 2 требуется вместо этого рассматривать форменные сети идеалов в духе работ Е. В. Дыбковой [10–14]. Остаток статьи посвящается аккуратной формулировке результатов описания блочно-диагональных подгрупп гиперболической унитарной группы. В частном случае, когда в качестве такой группы выбираются классические группы типов A_l, C_l или D_l, блочно-диагональные подгруппы совпадают с subsystem subgroups (ср. [7]).

Основные обозначения. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, а n – натуральное число. Обозначим через $\mathrm{M}(n, R)$ кольцо матриц ранга n над R и через $\mathrm{GL}(n, R)$ группу обратимых элементов кольца $\mathrm{M}(n, R)$. Обозначим через a_{ij} коэффициент матрицы $a \in \mathrm{M}(n, R)$ в позиции (i, j). Соответствующий коэффициент матрицы a^{-1}, обратной к a, обозначим через a'_{ij}. Матрицу, полученную из a транспонированием, мы будем обозначать как a^t. Далее, через a_{i*} и a_{*j} обозначим

i-ую строку и j-ый столбец матрицы a соответственно. Через e мы будем обозначать единичную матрицу кольца $\mathrm{M}(n, R)$. Коэффициенты матрицы e, в нарушение соглашения выше, обозначаются δ_{ij} (символ Кронекера), иными словами

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Такое отступление продиктовано тем, что обозначение e_{ij} традиционно используется для стандартных матричных единиц, т.е. матриц в $\mathrm{M}(n, R)$ с коэффициентом 1 в позиции (i, j) и коэффициентом 0 в любой другой позиции.

В дальнейшем нам будет удобно нумеровать строки и столбцы матриц $2n \times 2n$ элементами множества

$$I = I_{2n} = \{1, \ldots, n, -n, \ldots, -1\},$$

линейно упорядоченного в порядке записи. Соответствующий базис модуля столбцов R^{2n} будет обозначаться как

$$\mathfrak{E} = \{e_1, \ldots, e_n, e_{-n}, \ldots, e_{-1}\}.$$

Снабдим множество I отображением $\varepsilon : I \longrightarrow \{\pm 1\}$, сопоставляющим каждому элементу его знак следующим образом:

$$\varepsilon_i = \varepsilon(i) = \begin{cases} +1, & i > 0, \\ -1, & i < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим отношение эквивалентности ν на множестве индексов I. Мы будем писать $i \sim j$ для индексов $i, j \in I$, эквивалентных относительно ν. Класс эквивалентности индекса $i \in I$ будет обозначаться как $\nu(i)$. Отношение эквивалентности ν называется *унитарным*, если из того, что $i \sim j$, следует, что $-i \sim -j$. Множество индексов I может быть записано как дизъюнктное объединение классов эквивалентности, относительно ν:

$$I = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_t.$$

В предположении, что отношение эквивалентности ν является унитарным, группа $\{\pm 1\}$ действует на множестве всех классов эквивалентности следующим образом: $1 \cdot \nu(i) = \nu(i)$ и $-1 \cdot \nu(i) = \nu(-i)$ для любого индекса $i \in I$. Следуя [7], мы будем называть неподвижные точки этого действия *самосопряженными классами эквивалентности* ν, а все прочие классы – *не самосопряженными*.

Унитарному отношению эквивалентности ν сопоставим упорядоченную пару $h(\nu)$, первая компонента которой равна минимуму порядков всех самосопряженных классов эквивалентности ν, а вторая – минимуму порядков всех не самосопряженных классов. Отметим, что произвольное унитарное отношение эквивалентности не обязательно располагает как самосопряженными, так и не самосопряженными классами эквивалентности, таким образом $h(\nu)$ является элементом множества $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}\times\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. В данном контексте мы всегда будем рассматривать множество $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}\times\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ в сочетании с отношением частичного порядка, определяемым следующим образом: $(a_1,b_1)\leqslant(a_2,b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1\leqslant a_2$ и $b_1\leqslant b_2$.

Для любой абстрактной группы G и двух ее подмножеств A и B множество $\mathrm{Transp}_G(A,B)=\{g\in G\mid {}^gA\leqslant B\}$ называется *транспортером в G из A в B*. В общем случае, даже когда A и B являются подгруппами в G, соответствующий транспортер не обязан быть группой. В самом деле $\mathrm{Transp}_G(A,B)$ содержит единицу тогда и только тогда, когда $A\leqslant B$, и не обязан быть замкнутым относительно умножения и взятия обратных. Тем не менее, в ряде случаев $\mathrm{Transp}_G(A,B)$ оказывается подгруппой в G, например в случае, когда $A\leqslant B$ и B является нормальной подгруппой. Более того, нормализатор $\mathrm{N}_G(B)$ подгруппы B в G по определению совпадает с $\mathrm{Transp}_G(B,B)$ и $\mathrm{N}_G(B)\leqslant\mathrm{Transp}_G(A,B)$, если $A\leqslant B$.

Квадратичные формы и модули. Рассмотрим теперь ассоциативное кольцо с единицей R и заданный на R анти-автоморфизм $\overline{\cdot}$ такой, что для фиксированного обратимого элемента λ кольца R выполняется равенство $\overline{\overline{a}}=\lambda a\overline{\lambda}$ для любого $a\in R$. В этом случае $\overline{\cdot}$ называется [*обобщенной*] *инволюцией на R с определяющим скаляром λ*, а упорядоченная тройка $(R,\overline{\cdot},\lambda)$ называется *кольцом с обобщенной инволюцией*. Очевидно, в этом случае $\lambda^{-1}=\overline{\lambda}$. Отметим, что в отличие от [22] мы не предполагаем, что определяющий скаляр является центральным элементом кольца R.

Фиксируем правый R-модуль M. Биаддитивное отображение

$$f: M\times M\longrightarrow R$$

называется $\overline{\cdot}$-полуторалинейной формой, если для любых элементов x,y из M и a,b из R выполняется равенство

$$f(xa,yb)=\overline{a}f(x,y)b.$$

Назовем $\overline{\cdot}$-полуторалинейную форму h на M *λ-эрмитовой* если для любых двух элементов x и y из M выполняется

$$h(x,y) = \overline{h(y,x)}\lambda.$$

По произвольной λ-полуторалинейной форме f мы всегда можем построить λ-эрмитову форму h положив для любых x и y из M $h(x,y) = f(x,y) + \overline{f(y,x)}\lambda$.

Выбор обобщенной инволюции высекает на R две аддитивные подгруппы

$$\Lambda^{\min} = \Lambda^{\min}(R) = \{\alpha - \overline{\alpha}\lambda \mid \alpha \in R\},$$
$$\Lambda^{\max} = \Lambda^{\max}(R) = \{\alpha \in R \mid \overline{\alpha}\lambda = -\alpha\}.$$

Аддитивная подгруппа Λ кольца R называется *форменным параметром кольца* R если выполняются следующие два условия

(Λ1) $\Lambda^{\min} \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda^{\max}$,

(Λ2) $\overline{\alpha}\Lambda\alpha \leqslant \Lambda$ для любого $\alpha \in R$.

В этом случае пара (R,Λ) называется форменным кольцом. Очевидно, сами подгруппы $\Lambda^{\min}$ и $\Lambda^{\max}$ являются форменными параметрами кольца R. Мы будем называть их *минимальным и максимальным форменным параметром* соответственно.

Пусть f – $\overline{\cdot}$-полуторалинейная форма на правом R-модуле M. Определим отображения

$$h : M \times M \longrightarrow R \qquad \text{и} \qquad q : M \longrightarrow R/\Lambda,$$

полагая для каждых x и y из M

$$h(x,y) = f(x,y) + \overline{f(y,x)}\lambda \qquad \text{и} \qquad q(x) = f(x,x) + \Lambda.$$

Такую пару отображений (h,q) мы будем называть *Λ-квадратичной формой на* M, при этом мы будем говорить, что $\overline{\cdot}$-полуторалинейная форма f *определяет* (h,q). Как мы уже заметили выше, так построенное отображение h является λ-эрмитовой формой на M. Ненулевой вектор x из M называется *изотропным* [*относительно* (h,q)], если $q(x) \equiv 0 \mod \Lambda$. В противном случае x называется *анизотропным*.

Квадратичным модулем над форменным кольцом (R,Λ) называется упорядоченная тройка (M,h,q), где M – это правый R-модуль, а (h,q) – Λ-квадратичная форма на M. Квадратичный модуль (M,h,q) называется *свободным гиперболическим модулем ранга* $2n$, если модуль M имеет базис $\mathfrak{E} = \{e_1,\dots,e_n,e_{-n},\dots,e_{-1}\}$, состоящий из изотропных

векторов, такой что матрица Грамма $\overline{\cdot}$-полуторалинейной формы f записывается в базисе $\mathfrak{E}$ как

$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $p = \mathrm{sdiag}_n(1, \dots, 1)$ обозначает матрицу с единичными элементами на побочной диагонали и нулевыми в остальных позициях. Иными словами, для любых двух векторов $x = (x_1, \dots, x_{-1})$ и $y = (y_1, \dots, y_{-1})$ из M выполняется

$$f(x, y) = \overline{x}^t \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = \overline{x}_1 y_{-1} + \dots + \overline{x}_n y_{-n}.$$

Таким образом,

$$h(x, y) = f(x, y) + \overline{f(y, x)}\lambda = \overline{x}_1 y_{-1} + \dots + \overline{x}_n y_{-n} + \overline{x}_{-1}\lambda y_1 + \dots + \overline{x}_{-n}\lambda y_n$$

и

$$q(x) = f(x, x) + \Lambda = \overline{x}_1 x_{-1} + \dots + \overline{x}_n x_{-n} + \Lambda.$$

Унитарные группы. Пусть (M, h, q) – квадратичный модуль над форменным кольцом (R, Λ). Группу изометрий

$$\mathrm{U}(M) = \{g \in \mathrm{GL}(M) \mid h(gx, gy) = h(x, y) \text{ и } q(gx) = q(x) \text{ для любых } x, y \in M\}$$

модуля (M, h, q) мы будем называть *унитарной группой квадратичного модуля* (M, h, q). В случае, когда $M = R^{2n}$, а Λ-квадратичная форма (h, q) определяется в стандартном базисе $\mathfrak{E} = \{e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}\}$ λ-полуторалинейной формой f с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, мы будем называть унитарную группу $\mathrm{U}(M)$ *гиперболической унитарной группой кольца* R *ранга* $2n$ и обозначать $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Непосредственно из определения гиперболической унитарной группы следует следующая ее характеризация в терминах матричных элементов. Для случая, когда определяющий скаляр λ является центральным элементом кольца R, это в точности лемма 2.3 из [22] (см. также [20, лемма 3.4]).

Лемма 1. *Матрица g из полной линейной группы $\mathrm{GL}(2n, R)$ принадлежит гиперболической унитарной группе $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ форменного кольца (R, Λ) тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(U1): $g'_{ij} = \lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}\overline{g}_{-j,-i}\lambda^{(\varepsilon(j)+1)/2}$ *для любых* $i, j \in I$;

(U2): $S_{i,-i}(g) = \sum_{j>0} g_{ij} g'_{j,-i} \in \Lambda_i = \Lambda\lambda^{(-\varepsilon(i)-1)/2}$ *для любого индекса* $i \in I$.

До конца параграфа мы зафиксируем форменное кольцо (R, Λ) и натуральное число n. В дальнейшем особую роль будут играть следующие два класса унипотентных матриц из $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Для любой пары индексов $i \neq \pm j$ и любого элемента ξ кольца R положим

$$T_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij} - \lambda^{(\varepsilon(j)-1)/2}\overline{\xi}\lambda^{(1-\varepsilon(i))/2} e_{-j,-i}.$$

Так определенное преобразование $T_{ij}(\xi)$ называется *унитарной трансвекцией короткого типа*. Аналогично, для любого индекса $i \in I$ и элемента $\alpha \in \Lambda_i = \Lambda\lambda^{-(\varepsilon(i)+1)/2}$ положим

$$T_{i,-i}(\alpha) = e + \alpha e_{i,-i}.$$

Такое линейное преобразование называется *унитарной трансвекцией длинного типа*. Прямое вычисление показывает, что унитарные трансвекции длинного и короткого типов действительно являются элементами гиперболической унитарной группы. Обозначим через $\mathrm{EU}(2n, R, \Lambda)$ и назовем *элементарной подгруппой группы* $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ подгруппу, порожденную всеми унитарными трансвекциями $T_{ij}(\xi), T_{i,-i}(\alpha)$, где $i \neq \pm j$, $\xi \in R$ и $\alpha \in \Lambda_i$.

Форменные сети идеалов и соответствующие им подгруппы. Пусть (R, Λ) – форменное кольцо. Назовем (ср. [1]) квадратную таблицу $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,-1}$, состоящую из $(2n)^2$ двусторонних идеалов кольца R, *унитарной сетью идеалов порядка* $2n$ *над* R, если

(Σ1): $\sigma_{ij} = \overline{\sigma}_{-j,-i}$ для любых $i, j \in I$,
(Σ2): $\sigma_{ij}\sigma_{jk} \leqslant \sigma_{ik}$ для любых $i, j, k \in I$.

Для фиксированной унитарной сети идеалов σ положим для любого индекса $i \in I$

$$\Gamma_i^{\min} = \{\alpha - \lambda^{(-1-\varepsilon(i))/2}\overline{\alpha}\lambda^{(1-\varepsilon(i))/2} \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\},$$
$$\Gamma_i^{\max} = \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i,$$

где

$$\Lambda_i = \Lambda\lambda^{(-1-\varepsilon(i))/2}.$$

Несложно видеть, что $\Gamma_i^{\min}, \Gamma_i^{\max}$ являются аддитивными подгруппами $\sigma_{i,-i}$ для любого $i \in I$. Назовем столбец $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$, состоящий из $2n$ аддитивных подгрупп кольца R, *столбцом форменных параметров уровня* σ, если

(Г1): $\Gamma_i^{\min} \leqslant \Gamma_i \leqslant \Gamma_i^{\max}$ для любого $i \in I$,
(Г2): $\lambda^{(\varepsilon(j)-1)/2}\overline{\xi}\lambda^{(1+\varepsilon(i))/2}\Gamma_i\xi \leqslant \Gamma_{-j}$ для любых $i, j \in I$ и $\xi \in \delta_{-i,j} + \sigma_{-i,j}$.

Пару (σ, Γ), где σ – это унитарная сеть идеалов над R, а Γ – столбец форменных параметров уровня σ, мы будем называть *форменной сетью идеалов* [*ранга* $2n$] *над* (R, Λ). Форменная сеть идеалов (σ, Γ) называется форменной D-сетью идеалов, если $\sigma_{ii} = R$ для любого индекса $i \in I$. (σ, Γ) называется точной, если для любого $i \in I$ выполняется условие

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{j \neq \pm i} \sigma_{ij}\sigma_{j,-i} + \langle \Gamma_i \rangle .$$

Отметим, что условие (Г2) в определении форменной сети идеалов может быть заменено на эквивалентное

(Г2′): $\xi\Gamma_j\lambda^{(\varepsilon(j)-1)/2}\overline{\xi}\lambda^{(1-\varepsilon(i))/2} \leqslant \Gamma_i$ для любых $i, j \in I$ и $\xi \in \delta_{ij} + \sigma_{ij}$.

По унитарному отношению эквивалентности ν на множестве индексов I можно построить "дискретную" форменную сеть идеалов. Положим

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} R, & \text{если } i \sim j \\ 0, & \text{если } i \nsim j \end{cases} \qquad \Gamma_i = \begin{cases} \Lambda_i, & \text{если } i \sim -i \\ 0, & \text{если } i \nsim -i. \end{cases}$$

Несложно видеть, что в этом случае пара (σ, Γ) действительно образует форменную сеть идеалов над (R, Λ). Мы будем обозначать такую форменную сеть идеалов как $[\nu]_{(R,\Lambda)}$ и называть *форменной сетью идеалов, соответствующей отношению эквивалентности* ν.

Введем частичный порядок на множестве всех форменных сетей идеалов данного ранга над форменным кольцом (R, Λ). Положим $(\sigma', \Gamma') \leqslant (\sigma'', \Gamma'')$ в том и только том случае, когда для любого выбора индексов i и j из I выполняются включения $\sigma'_{ij} \leqslant \sigma''_{ij}$ и $\Gamma'_i \leqslant \Gamma''_i$. Назовем форменную сеть идеалов (σ, Γ) *главной* [*по отношению к* ν], если $[\nu]_{(R,\Lambda)} \leqslant (\sigma, \Gamma)$.

Форменные сетевые подгруппы. Для каждой форменной сети идеалов (σ, Γ) ранга $2n$ определим следующие две подгруппы гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Подгруппа

$$\mathrm{U}(\sigma, \Gamma) = \{g \in \mathrm{U}(2n, R, \Lambda) \mid g_{ij} \equiv \delta_{ij} \mod \sigma_{ij}, \\ S_{i,-i}(g) \in \Gamma_i \text{ для любых } i, j \in I\}$$

называется *форменной сетевой подгруппой уровня* (σ, Γ). Подгруппу

$$\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) = \langle T_{ij}(\xi), T_{i,-i}(\alpha) \mid i \neq \pm j, \xi \in \sigma_{ij}, \alpha \in \Gamma_i \rangle$$

назовем *элементарной форменной сетевой подгруппой уровня* (σ, Γ).

В случае, когда (σ, Γ) является форменной сетью идеалов, соответствующей унитарному отношению эквивалентности ν, мы будем обозначать соответствующую элементарную форменную сетевую подгруппу $\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma)$ как

$$\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$$

и называть ее *элементарной блочно-диагональной подгруппой типа* ν.

Рассмотрим подгруппу H гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$. Мы будем говорить, что точная форменная D-сеть идеалов (σ, Γ) *ассоциирована с* H, если $\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) \leqslant H$ и для любой другой точной форменной D-сети (σ', Γ') такой, что $\mathrm{EU}(\sigma', \Gamma') \leqslant H$, следует, что $(\sigma', \Gamma') \leqslant (\sigma, \Gamma)$. Очевидно, что если форменная сеть, ассоциированная с заданной подгруппой, существует, то она единственна. Следующая лемма показывает, что ассоциированная форменная сеть существует при условии, что подгруппа H содержит элементарную блочно-диагональную подгруппу $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$ и $h(\nu) \geqslant (4, 3)$.

Лемма 2. *Предположим, что* $h(\nu) \geqslant (4, 3)$. *Пусть* H *– подгруппа* $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ *такая, что* $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda) \leqslant H$. *Положим*

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \left\{\xi \in R \mid T_{ij}(\xi) \in H\right\} \text{ для любых } i \neq \pm j,\\
\Gamma_i &= \left\{\alpha \in \Lambda_i \mid T_{i,-i}(\alpha) \in H\right\} \text{ для любого } i \in I,\\
\sigma_{ii} &= R \text{ и}\\
\sigma_{i,-i} &= \sum_{j \neq \pm i} \sigma_{ij}\sigma_{j,-i} + \langle \Gamma_i \rangle \text{ для любого } i \in I.
\end{aligned}$$

Тогда (σ, Γ) *является форменной сетью идеалов, ассоциированной с* H.

Основные результаты. Напомним, что ассоциативное кольцо с единицей называется *квази-конечным*, если оно является прямым пределом колец, каждое из которых конечно порождено как модуль над своим центром. Форменное кольцо (R, Λ) называется *квази-конечным*, если R квази-конечно.

Теорема 3. *Пусть* (R, Λ) *– квази-конечное форменное кольцо. Предположим, что* $h(\nu) \geqslant (4, 5)$ *и либо* $h(\nu) \geqslant (6, 5)$, *либо* $R\Lambda + \Lambda R =$

R. Тогда для любой подгруппы H гиперболической унитарной группы $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, содержащей элементарную блочно-диагональную подгруппу $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$, существует единственная главная точная форменная сеть идеалов (σ, Γ) над (R, Λ) такая что

$$\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant \mathrm{Transp}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma), \mathrm{U}(\sigma, \Gamma)).$$

Более того, (σ, Γ) может быть найдена как форменная сеть идеалов, ассоциированная с H.

Как мы уже отметили в начале статьи, множество

$$\mathrm{Transp}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma), \mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$$

из теоремы 3 не обязано быть группой. Тем не менее, в условиях теоремы 3 мы можем показать, что $\mathrm{Transp}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma), \mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ совпадает с нормализатором $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ форменной сетевой подгруппы $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ и описывается в терминах конгруэнций.

Теорема 4. *Пусть (R, Λ) – квази-конечное форменное кольцо. Предположим, что $h(\nu) \geqslant (4, 3)$ и либо $h(\nu) \geqslant (6, 3)$, либо $R\Lambda + \Lambda R = R$. Пусть (σ, Γ) – главная точная форменная сеть идеалов ранга $2n$ над (R, Λ). Тогда транспортер $\mathrm{Transp}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma), \mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ совпадает с нормализатором $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ и совпадает со множеством всех матриц a из $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$, обладающих следующими тремя свойствами:*

(T1): $a_{ij}\sigma_{jk}a'_{kl} \leqslant \sigma_{il}$ *для любых* $i, j, k, l \in I$,

(T2): $a_{ij}\xi S_{k,-k}(a^{-1})\lambda^{(\varepsilon(k)-1)/2}\overline{\xi}\lambda^{(1-\varepsilon(j))/2}a'_{-j,-i} \leqslant \Gamma_i$ *для любых* $i, j, k \in I$ *и* $\xi \in \sigma_{jk}$,

(T3): $a_{ij}\Gamma_j a'_{-j,-i} \leqslant \Gamma_i$ *для любых* $i, j \in I$.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **148** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
3. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом.* — Изв. вузов. Матем. **11** (1982), 12–16.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, В. Наркевич, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 13–20.

5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 35–59.
6. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Изв. вузов. Матем. **12** (1987), 14–20.
7. Н. А. Вавилов, *О подгруппах симплектической группы, содержащих subsystem subgroup.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 5–29.
8. Н. А. Вавилов, *Об описании подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 30–33.
9. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер., No. 3 (2008), 51–95.
10. Е. В. Дыбкова, *Теорема Боревича для гиперболической унитарной группы над некоммутативным телом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 136–167.
11. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболической унитарной группы для хорошего форменного кольца над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 87–96.
12. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп симплектической группы над полем характеристики* 2. — Алгебра и анализ **10**, No. 4 (1998), 113–129.
13. Е. В. Дыбкова, *Надгруппы диагональной группы в гиперболической унитарной группе над простым артиновым кольцом.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 155–172.
14. Е. В. Дыбкова, *Надгруппы диагональной группы в гиперболической унитарной группе над простым артиновым кольцом.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 85–117.
15. Е. Б. Дынкин, *Максимальные подгруппы классических групп.* — Тр. ММО 1 **1** (1952), 39–166.
16. Е. Б. Дынкин, *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* — Мат. сб. **30**, No. 2 (1952), 349–362.
17. M. Aschbacher, *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* — Invent. Math. **76** (1984), No. 3, 469–514.
18. M. Aschbacher, *Finite simple groups and their subgroups.* — In: Group theory, Beijing (1984), Lecture Notes in Math., vol. 1185, Springer, Berlin, (1986), pp. 1–57.
19. M. Aschbacher, *Subgroup structure of finite groups.* — In: Proceedings of the Rutgers group theory year, 1983–1984 (New Brunswick, N.J., 1983–1984), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, pp. 35–44.
20. A. Bak, *K-theory of forms.* Princeton Univ. Press; University of Tokyo Press, 1981.
21. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules*, Ph.D. thesis, Columbia University, 1969.
22. A. Bak, N. A. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I*: Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7** (2000), No. 2, 159–196.
23. A. Bak, A. Stepanov, *Dimension theory and non-stable K-theory for net subgroups.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 207–253.
24. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer-Verlag (1989).

25. P. B. Kleidman, M. W. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups.* Cambridge Univ. Press (1990).
26. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Mem. AMS **67** (1987), No. 365.
27. A. Shchegolev, *Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in even unitary groups over quasi-finite rings*, Ph.D. thesis, Universität Bielefeld (2015).
28. D. M. Testerman, *Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups.* — Mem. AMS **75** (1988), No. 390.

Shchegolev A. V. Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in hyperbolic unitary groups over quasi-finite rings: main results.

Let H be a subgroup of the hyperbolic unitary group $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ that contains the elementary block-diagonal subgroup $\mathrm{EU}(\nu, R, \Lambda)$ of type ν. Assume that all self-conjugate blocks of ν are of size at least 6 (at least 4 if the form parameter Λ satisfies the condition $R\Lambda + \Lambda R = R$) and that all non-self-conjugate blocks are of size at least 5. Then there exists a unique major exact form net of ideals (σ, Γ) such that $\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma) \leqslant H \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$, where $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ stands for the normalizer in $\mathrm{U}(2n, R, \Lambda)$ of the form net subgroup $\mathrm{U}(\sigma, \Gamma)$ of level (σ, Γ) and $\mathrm{EU}(\sigma, \Gamma)$ denotes the corresponding elementary form net subgroup. The normalizer $\mathrm{N}_{\mathrm{U}(2n,R,\Lambda)}(\mathrm{U}(\sigma, \Gamma))$ is described in terms of congruences.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: iryoka@gmail.com

Поступило 2 декабря 2015 г.