Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

В. В. Нестеров

ТЕОРЕМЫ РЕДУКЦИИ ДЛЯ ТРОЕК КОРОТКИХ КОРНЕВЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ

§1. Введение

В данной работе получены теоремы редукции для троек коротких корневых унипотентных подгрупп в группах Шевалле типа B_ℓ и C_ℓ. Утверждение теорем состоит в том, что любая подгруппа, порожденная тройкой коротких корневых унипотентных подгрупп, вкладывается посредством сопряжения в одну из перечисленных в теоремах ниже подгрупп.

Как известно, короткие корневые подгруппы ведут себя намного более сложным образом, чем длинные. Так, уже список порождений для пар коротких корневых подгрупп получается в три-четыре раза больше, чем для пар длинных корневых подгрупп (ср. [14, теорема 1] и [24, лемма 3.1] или [2]). Этим объясняется то, что мы вопросам редукции для троек коротких корневых подгрупп посвящаем отдельную работу.

Прежде чем сформулировать основные результаты данной работы, напомним, что в системах корней типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 и G_2 существуют корни двух типов: длинные и короткие. Также в этих системах существуют два доминантных корня. Один из них максимальный корень δ, а другой короткий корень ρ (максимальный короткий корень). Подгруппа X называется длинной корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_δ, и короткой корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_ρ. Элементы X называются длинными или короткими унипотентными элементами соответственно. В дальнейшем слово "унипотентный" мы всегда опускаем и говорим просто "длинная/короткая корневая подгруппа/элемент".

Как обычно, через $U(\Phi, K)$ мы обозначаем унипотентный радикал борелевской подгруппы в группе Шевалле $G(\Phi, K)$, через $\langle D\rangle$ для подмножества D группы G обозначаем подгруппу в G, порожденную множеством D.

Ключевые слова: группы Шевалле, корневые подгруппы, унипотентный радикал.

Теорема 1. *Пусть* X, Y, Z *– короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа* B_ℓ *над полем* K, $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда существует такой элемент* $g \in G(\mathrm{B}_\ell, K)$, *что* $g\langle X, Y, Z\rangle g^{-1}$ *является подгруппой одной из следующих групп*:

$$\begin{aligned}
&U(\mathrm{B}_5, K),\\
&G(\mathrm{B}_2, K)U(\mathrm{B}_5, K),\\
&G(\mathrm{D}_4, K)U(\mathrm{B}_5, K),\\
&G(\mathrm{B}_4, K).
\end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть* X, Y, Z *– короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа* C_ℓ *над полем* K, $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда существует такой элемент* $g \in G(\mathrm{C}_\ell, K)$, *что* $g\langle X, Y, Z\rangle g^{-1}$ *является подгруппой одной из следующих групп*:

$$\begin{aligned}
&X_\alpha X_\beta X_\gamma, \quad \text{где}\\
&\alpha, \beta, \gamma \text{ – короткие попарно строго ортогональные корни},\\
&U(\mathrm{C}_5, K),\\
&G(\mathrm{A}_1, K)U(\mathrm{C}_5, K),\\
&G(\mathrm{C}_4, K).
\end{aligned}$$

В случае, когда характеристика основного поля равна 2, приведенные теоремы можно сформулировать более точно.

Теорема 3. *Пусть* X, Y, Z *– различные короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа* B_ℓ *над полем* K, $\operatorname{char} K = 2$. *Тогда существует такой элемент* $g \in G(\mathrm{B}_\ell, K)$, *что* $g\langle X, Y, Z\rangle g^{-1}$ *совпадает с одной из следующих групп*:

$$\begin{aligned}
&X_\alpha X_\beta X_\gamma, \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma \text{ – короткие корни},\\
&X_\alpha X_\beta X_{\alpha+\beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \text{ – короткие корни}, \alpha+\beta \text{ – длинный корень},\\
&\mathrm{SL}_2(K)X_{\rho,\delta},
\end{aligned}$$

где $X_{\rho,\delta} = \{x_\rho(t)x_\delta(t),\ t \in K\}$.

Теорема 4. *Пусть* X, Y, Z *– короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа* C_ℓ *над полем* K, $\operatorname{char} K = 2$. *Тогда* *существует такой элемент* $g \in G(\mathrm{C}_\ell, K)$, *что* $g\langle X, Y, Z\rangle g^{-1}$ *является подгруппой одной из следующих групп:*

$X_\alpha X_\beta X_\gamma$, *где*

α, β, γ *– короткие попарно строго ортогональные корни,*

$U(\mathrm{C}_5, K)$,

$G(\mathrm{C}_3, K)U(\mathrm{C}_4, K)$.

Рассматриваемая задача находится в контексте задач о порождении корневыми подгруппами и элементами в группах Шевалле. В этом направлении давно и хорошо изучена геометрия длинных корневых подгрупп и элементов, чему посвящено огромное количество работ. Упомянем здесь только фундаментальные работы М. Ашбахера и Г. Зейтца [16], В. Кантора [24], Б. Куперстейна [19–22], М. Либека и Г. Зейтца [28], Б. Старк [29–31], Ф. Тиммесфельда [33–36] и обзоры А. Е. Залесского [10], А. С. Кондратьева [11] и Н. А. Вавилова [5].

Для коротких корневых подгрупп имеются лишь отдельные результаты. Неприводимые подгруппы классических групп, порожденные короткими корневыми подгруппами, описаны Б. Старк [30] и Ли Шанжи [26,27]. Для алгебраически замкнутого поля подгруппы, порожденные короткими корневыми подгруппами, описаны в работе Д. Стюарт [32].

Планируемое описание важных классов троек коротких корневых подгрупп, которое опирается на результаты данной работы, даст ключ к пониманию геометрии коротких корневых подгрупп и имеет значение для различных задач, связанных с порождением корневыми элементами и подгруппами.

Описание троек длинных корневых подгрупп, две из которых противоположны, было получено в работах Н. А. Вавилова и Л. Ди Мартино [23] и Н. А. Вавилова и И. М. Певзнера [7]. Эти результаты были применены ими при решении задач о порождении корневыми элементами в $G(\mathrm{E}_6, K)$.

Также описание троек коротких корневых подгрупп вместе с работой [7] можно рассматривать как один из первых шагов в направлении конструктивного порождения корневыми подгруппами. Единственный полностью решенный случай в этом направлении разобран в работах Р. Брауна и С. Хамфриса [17].

С технической точки зрения наши доказательства близки к рассуждениям в работе Н. А. Вавилова [6] и в работе Н. А. Вавилова и

А. А. Семенова [8], где, в частности, доказана теорема редукции для длинного корневого тора.

Наше доказательство основано на описании пар коротких корневых подгрупп, полученном автором в [12–14], и на разложении Брюа короткого корневого элемента, полученном Н. А. Вавиловым [4]. Собственно, идея доказательства наших теорем следующая. Одну из пар тройки коротких корневых подгрупп мы приводим сопряжением к одному из известных видов (таблица 1 §3). После этого действуем сопряжениями на третью подгруппу, оставляя выбранную пару инвариантной, так, чтобы корни, определяющие тройку подгрупп, попали в систему корней наименьшего ранга. Технические леммы действия сопряжением на унипотентном радикале доказаны в §4. После этого мы вычисляем замыкания получившихся множеств корней (§§6–9).

Для оставшихся двух групп Шевалле типа F_4 и G_2 теоремы редукции не имеют смысла, поскольку в утверждениях теорем для этих случаев должны фигурировать сами группы $G(\mathrm{F}_4,K)$ и $G(\mathrm{G}_2,K)$. Более того, насколько известно автору, существует открытый вопрос: порождают ли три (короткие) корневые подгруппы группу $G(\mathrm{F}_4,K)$ целиком.

Автор выражает благодарность Н. А. Вавилову за полезные консультации во время подготовки работы.

§2. Основные понятия

Все свойства групп Шевалле, используемые в дальнейшем, могут быть найдены в книгах [18] или [15]. Зафиксируем обозначения и напомним некоторые необходимые нам понятия. Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, $G = G(\Phi,K)$ – группа Шевалле типа Φ над полем K. Обычно мы можем (и будем) предполагать, что G односвязна. Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ и каждого элемента $t \in K$ обозначим через $x_\alpha(t)$ соответствующий элементарный корневой унипотент. Далее, $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in K\}$ – элементарная корневая унипотентная подгруппа, соответствующая α. Для $\alpha \in \Phi$ и $t \in K^*$ положим $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Зафиксируем порядок на Φ. Пусть тогда $B = B(\Phi,K)$ – борелевская подгруппа относительно этого порядка. Φ^+, Φ^- – соответственно множества положительных и отрицательных корней. Теперь подгруппы U, V, H и N в G определяются следующим образом:

$$U = U(\Phi, K) = \langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^+,\ t \in K\rangle,$$

$$V = V(\Phi, K) = \langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^-,\ t \in K\rangle,$$

$$H = H(\Phi, K) = \langle h_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi,\ t \in K^*\rangle,$$

$$N = N(\Phi, K) = \langle w_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi,\ t \in K^*\rangle.$$

Фактор-группа N/H изоморфна группе Вейля $W = W(\Phi)$ системы корней Φ. При этом любому элементу w группы Вейля соответствует элемент $n_w \in N/H$. Обычно мы можем игнорировать диагональный множитель n_w и, поэтому мы будем отождествлять w и его прообраз n_w и писать просто w вместо n_w.

Одним из основных отношений в группе Шевалле является коммутационная формула Шевалле:

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}t^i s^j),$$

где $i\alpha + j\beta$ являются корнями, причем i, j – целые положительные числа, константы $N_{\alpha\beta ij} \in K$ не зависят от t, s [18, Ch.4].

Наряду с ней мы используем соотношение:

$$w_\alpha x_\beta(t) w_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm t).$$

Любой элемент $u \in U$ может быть разложен в виде $u = \prod x_\alpha(c_\alpha)$, где произведение можно взять в любом фиксированном порядке. Через $S(u)$ мы обозначаем носитель элемента u: $S(u) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid c_\alpha \neq 0\}$, т.е. множество корней, соответствующих ненулевым коэффициентам в разложении u.

В стандартной реализации систем корней (см˙ [1]) мы имеем:

$$\mathrm{B}_\ell = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}, \quad \rho = e_1, \quad \delta = e_1 + e_2,$$

$$\mathrm{C}_\ell = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j\}, \quad \rho = e_1 + e_2, \quad \delta = 2e_1.$$

Здесь $1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell$. Знаки $\pm$ выбираются независимо друг от друга. В последующем, если не будет возникать двусмысленности, мы будем просто писать $\pm i$, $\pm i \pm j$ для обозначения соответствующих корней B_ℓ или C_ℓ.

Пусть $\Delta \subset \Phi$ – подмножество корней. Будем говорить, что Δ порождает подсистему корней типа Φ_1, если пересечение $\mathbb{Z}$-замыкания Δ с системой корней Φ является подсистемой корней типа Φ_1.

Если в системе корней Φ существуют корни двух различных длин, а в системе корней типа Φ_1 – только одной длины, то Φ_1 может быть вложена в Φ двумя существенно разными способами: на длинные корни и на короткие. Следуя Дынкину [9], для различения этих случаев, мы пишем $\widetilde{\Phi}_1 \subset \Phi$, когда вложение происходит на короткие корни, и $\Phi_1 \subset \Phi$, когда на длинные.

Напомним, что подмножество корней $S \subset \Phi$ называется замкнутым, если из того, что $\alpha, \beta \in S$ и $\alpha + \beta \in \Phi$ следует, что $\alpha + \beta \in S$. Для любого замкнутого множества S определим подгруппу $E(S) = E(S, K)$ как подгруппу, порожденную всеми элементарными корневыми подгруппами X_α, $\alpha \in S$.

Любое замкнутое множество S является дизъюнктным объединением своей редуктивной S^r и унипотентной S^u частей, где $S^r = \{\alpha \in S | -\alpha \in S\}$, $S^u = \{\alpha \in S | -\alpha \notin S\}$. Тогда подгруппа $E(S)$ является полупрямым произведением редуктивной $E(S^r)$ и унипотентной $E(S^u)$ подгрупп.

Два множества S_1 и S_2 называются сопряженными, если существует элемент группы Вейля $w \in W(\Phi)$ такой, что $wS_1 = S_2$. Если множества S_1 и S_2 сопряжены, то подгруппы $E(S_1)$ и $E(S_2)$ сопряжены в $G(\Phi, K)$.

Стандартным параболическим подмножеством P называется замкнутое множество корней, содержащее Φ^+. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ обозначает множество простых корней относительно зафиксированного порядка. Пусть $J \subseteq \Pi$. Определим P_J как наименьшее замкнутое множество корней, содержащее Φ^+ и $-J$. Через $J_{rpq\dots}$ обозначим множесто $\Pi \setminus \{\alpha_r, \alpha_p, \alpha_q, \dots\}$, где r, p, $q, \dots$ – различные индексы множества $\{1, \dots, \ell\}$. Тогда $P_{rpq\dots}$ – стандартное параболическое множество, соответствующее множеству $J_{rpq\dots}$. В частности, J_r соответствует максимальному параболическому множеству $P_{J_r} = P_r$.

Поскольку мы рассматриваем односвязные группы Шевалле $G(\Phi, K)$, подгруппа $E(P_J) = G(P_J)$ является стандартной параболической подгруппой. В этом случае группа $G(P_J) = L_J U_J$ есть полупрямое произведение подгруппы Леви L_J и унипотентного радикала U_J.

Если $J = J_{rpq\ldots}$, мы пишем $U_{rpq\ldots}$ вместо U_J, в то время как подгруппа Леви L_J всегда будет совпадать с некоторой группой Шевалле $G(\Delta, K)$, где Δ – некоторая подсистема корней Φ.

В завершение параграфа опишем строение группы Вейля $W(\mathrm{B}_\ell) = W(\mathrm{C}_\ell)$. Эта группа изоморфна октаэдральной группе Oct_ℓ и представляет собой группу перестановок означенного ортонормированного базиса эвклидова пространства $\mathbb{R}^\ell$: $\pm e_1, \ldots, \pm e_\ell$.

§3. Пары коротких корневых подгрупп

Как очень хорошо и давно известно (см., например, [2, 16, 20, 24]), любая пара (X, Y) длинных корневых подгрупп приводится одновременным сопряжением к паре элементарных длинных корневых подгрупп (X_α, X_β). Углом между (X, Y) называется угол между корнями α и β. Угол однозначно определяет структуру подгруппы $\langle X, Y\rangle$ и в четырех из пяти случаях орбиту группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на таких парах.

Как показано в [14], для пары (X, Y) коротких корневых подгрупп ситуация намного сложнее. Взаимное расположение подгрупп X и Y определяется двумя, тремя, четырьмя и в двух случаях пятью корнями. Орбиты зависят не только от конфигурации этих корней, но и в некоторых случаях параметризуются элементами поля. Одна из причин происходящего кроется в том, что короткая корневая подгруппа (в отличие от длинной) не лежит в центре унипотентного радикала U борелевской подгруппы. И, следовательно, сопряжения элементами U приводят к намного более сложной структуре.

В настоящей работе при описании троек коротких корневых подгрупп мы существенным образом используем результаты работ [4] и [14]. На основе разложения Брюа короткого корневого элемента, вычисленного Н. А. Вавиловым в [4], был получен следующий результат [14, лемма 2], который мы сейчас воспроизведём.

Предварительно определим следующие подгруппы.

$$X_{\rho,\delta,c} = \{x_\rho(t)x_\delta(ct),\ t \in K\},\ \text{где } c \in K^*,$$
$$X_{\rho,\delta,\lambda} = \{x_\rho(t)x_\delta(t)x_\lambda(t),\ t \in K\},$$
где λ – некоторый длинный корень такой, что $\rho < \lambda < \delta$,
$$X_{\alpha,\beta} = \{x_\alpha(t)x_\beta(-t),\ t \in K\},\ \text{где } \alpha \text{ и } \beta \text{ – длинные корни.}$$

Лемма 1. *Пусть X, Y – короткие корневые подгруппы в группе $G(\Phi, K)$, $\operatorname{char} K \neq 2$, где $\Phi = \mathrm{B}_\ell$, C_ℓ, F_4. Тогда существует $g \in G$ такой, что*

$$gXg^{-1} = X_\rho \text{ или } X_{\rho,\delta,c} \text{ или } X_{\rho,\delta,\lambda},$$
$$gYg^{-1} = X_\gamma \text{ или } X_{\alpha,\beta},$$

где α и β – длинные ортогональные корни, причем $(\alpha \pm \beta)/2$ также является корнем, и γ – короткий корень.

В случае, когда $\operatorname{char} K = 2$, возможна только ситуация

$$gXg^{-1} = X_\rho,$$
$$gYg^{-1} = X_\gamma.$$

Заметим, что группа $X_{\rho,\delta,\lambda}$ появляется только в двух случаях для группы Шевалле типа F_4.

Таким образом, каждой паре (X, Y) коротких корневых подгрупп можно сопоставить пару множеств корней (которую в [14] мы называли копией) и коэффициент поля c. В большинстве случаев орбита (X, Y) не зависит от коэффициента c (см. [14, лемма 5]). Но в некоторых случаях (случаи (S2)–(S4), (S8), (S16), (S19)–(S21) в [14]), когда пара (X, Y) сопряжена паре $(X_{\rho,\delta,c}, X_{\alpha,\beta})$, коэффициент c определяет орбиту (X, Y) и даже структуру подгруппы $\langle X, Y\rangle$ (случаи (S2)–(S4), (S19)–(S21)).

Для того, чтобы по паре множеств корней, соответствующей паре подгрупп (X, Y), можно было однозначно определить структуру подгруппы, порожденной этой парой, мы здесь введем понятие копии пары немного по-другому, чем это сделано в [14].

Вначале докажем аналог леммы 1, который верен для всех групп Шевалле, содержащих короткие корневые подгруппы.

Для короткого корня σ и длинного корня β определим еще одну подгруппу

$$X_{\sigma,\beta} = \{x_\sigma(t)x_\beta(t),\ t \in K\}.$$

Лемма 2. *Пусть X, Y – короткие корневые подгруппы в группе Шевалле $G = G(\Phi, K)$. Тогда существует $g \in G$ такой, что*

$$gXg^{-1} = X_\rho \text{ или } X_{\rho,\delta,c} \text{ или } X_{\rho,\delta,\lambda},$$
$$gYg^{-1} = X_\gamma \text{ или } X_{\sigma,\beta},$$

где σ – короткий корень, β – длинный корень такие, что угол между ними равен $\pi/4$ для B_ℓ, C_ℓ, F_4 или $\pi/6$ для G_2, и $\sigma > \beta$.

Если $\operatorname{char} K = 2$ *в случае системы корней типа* B_ℓ, C_ℓ *или* F_4, *и* $\operatorname{char} K = 3$ *для системы корней типа* G_2, *то равенства принимают вид*

$$gXg^{-1} = X_\rho,$$
$$gYg^{-1} = X_\gamma.$$

Доказательство. В работе [13, лемма 3] данное утверждение доказано для группы Шевалле типа G_2. Доказательство для групп типа B_ℓ, C_ℓ или F_4 непосредственно следует из леммы 1 работы [12]. Действительно, лемма утверждает, что для любого короткого корневого элемента x в этих группах найдется такой элемент $u \in U(\Phi, K)$, что выполняется одно из следующих утверждений:

$$x = u^{-1}x_\gamma(t)u,$$
$$x = u^{-1}x_\sigma(t)x_\beta(kt)u,$$

где t, $k \in K$, корни γ, σ и β имеют такое же значение, как в формулировке леммы.

Легко проверить, что всегда можно подобрать такой элемент $h \in H(\Phi, K)$, сопряжением с помощью которого мы получим $k = 1$. Лемма доказана. $\square$

Итак, используя лемму 1, приведем пару (X, Y) коротких корневых подгрупп к одной из следующих пар

$$(X_\rho, X_\gamma), (X_{\rho,\delta,c}, X_\gamma), (X_\rho, X_{\alpha,\beta}), (X_{\rho,\delta,c}, X_{\alpha,\beta}), (X_{\rho,\delta,\lambda}, X_{\alpha,\beta}).$$

В тех случаях, когда пара (X, Y) сопряжена паре $(X_{\rho,\delta,c}, X_{\alpha,\beta})$ и $(\alpha + \beta)/2 = \pm\rho$ (это – случаи (S2)–(S4) и (S19)–(S21) в [14]), мы, используя лемму 2, данную пару сопряжением приводим к одной из пар $(X_\rho, X_{\rho,\delta-\rho})$, $(X_{\rho,\delta,c}, X_{\rho,\delta-\rho})$, $(X_\rho, X_{-\rho,-\delta})$, $(X_{\rho,\delta,c}, X_{-\rho,-\delta})$. Таким образом с каждой парой коротких корневых подгрупп мы связываем пару множеств корней, каждое из которых соответствует одной из подгрупп.

Определение. *Копией пары* (X, Y) *мы будем называть соответствующую ей (в указанном только что смысле) пару множеств корней. Копия может принимать одну из следующих форм:*

$$\begin{gathered}(\{\rho\},\{\gamma\}),\ (\{\rho\},\{\alpha,\beta\}),\ (\{\rho,\delta\},\{\gamma\}),\ (\{\rho,\delta\},\{\alpha,\beta\}),\\ (\{\rho\},\{\rho,\delta-\rho\}),\ (\{\rho\},\{-\rho,-\delta\}),\\ (\{\rho,\delta\},\{\rho,\delta-\rho\}),\ (\{\rho,\delta\},\{-\rho,-\delta\}),\ (\{\rho,\delta,\lambda\},\{\alpha,\beta\}).\end{gathered}$$

Корни λ, γ *и корни* α *и* β, *если* $(\alpha+\beta)/2 \neq \pm\rho$, *такие как в лемме* 1.

Поскольку в дальнейшем коэффициент $c \neq 0$ не играет никакой роли для наших рассуждений, начиная с этого момента, в обозначениях мы будем его опускать: $X_{\rho,\delta} = X_{\rho,\delta,c}$.

Обозначим через Γ второе множество копии пары (X, Y). Тогда любая пара коротких корневых подгрупп в ортогональной и симплектической группе сопряжена одной из пар (X_ρ, X_Γ) или $(X_{\rho,\delta}, X_\Gamma)$.

Теперь конфигурацию пары коротких корневых подгрупп (X, Y) можно характеризовать углами между корнями первого множества копии и корнями второго множества копии. Положим

$$\begin{aligned}\theta_i &= \angle(\rho,\gamma_i), \quad \gamma_i \in \Gamma,\\ \eta_i &= \max_{j=1,2}\{\angle(\lambda_j,\gamma_i)\}, \quad \gamma_i \in \Gamma, \lambda_1 = \delta,\ \lambda_2 = \lambda.\end{aligned}$$

Следовательно, за расположение пары подгрупп отвечает один из следующих наборов углов.

$$\theta, (\theta_1, \theta_2), (\theta; \eta), (\theta_1, \theta_2; \eta_1, \eta_2).$$

Наконец, мы переформулируем теорему 1 работы [14] для ортогональной и симплектической группы. Заметим, что в [14] данная теорема сформулирована более точно: подсчитаны корневые подгруппы, содержащиеся в каждом порождении, и указано число орбит, получающихся при одновременном сопряжении пары коротких корневых подгрупп группой Шевалле. Но, исходя из целей данной работы, мы опускаем здесь эти детали.

В теореме ниже мы также выписываем углы каждой конфигурации подгрупп. Запись (b) и (c) после номера указывает на то, что данная конфигурация реализуется только в группе типа B_ℓ или C_ℓ, соответственно.

Теорема 5. *Пусть* X, Y *– две различные короткие корневые подгруппы в односвязной группе Шевалле* $G(\Phi, K)$ *типа* B_ℓ *или* C_ℓ,

$\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда подгруппа* $\langle X, Y\rangle$ *в зависимости от конфигурации корней, изоморфна одной из следующих подгрупп.*

$1(c)$.	$\pi/3$	XY,
2.	$(0, \pi/4)$	XY,
3.	$(0, \pi/4; \pi/4, \pi/2)$	XY,
$4(c)$.	$(\pi/4, \pi/2; \pi/2, \pi/2)$	XY,
5.	$(\pi/2, \pi/2)/(\pi/3; \pi/2)$	XY,
$6(c)$.	$\pi/2$	XY,
7.	$\pi/2$	XYZ,
$8(b)$.	$(\pi/2, \pi/2; \pi/3, 2\pi/3)$	XYZ,
$9(c)$.	$2\pi/3$	$U(\widetilde{\mathrm{A}}_2, K)$,
10.	$(\pi/2, ; 3\pi/4)$	$U(\mathrm{C}_2, K)$,
$11(c)$.	$(2\pi/3; 3\pi/4)$	$U(\mathrm{C}_2, K)$,
$12(b)$.	$(\pi/2, \pi/2; 2\pi/3, 2\pi/3)$	XYY_1Z,
13.	π	$\mathrm{SL}_2(K)$,
14.	$(\pi/4, 3\pi/4; \pi/2, \pi)$	$\mathrm{SL}_2(K) \times Z,\ K \neq \mathbb{F}_3$,
$15(c)$.	$(\pi/2, 3\pi/4; \pi/2, \pi)$	$\mathrm{SL}_2(K) X_2 X_3$,
16.	$(\pi, 3\pi/4)$	$\mathrm{SL}_2(K) U_2(\mathrm{C}_2, K)$,
17.	$(3\pi/4, 3\pi/4; \pi/2, \pi)$	$\mathrm{SL}_2(K) \times \mathrm{SL}_2(K)$,
18.	$(3\pi/4, 3\pi/4; \pi/2, \pi)$	$\mathrm{SL}_2(L),\ [L:K]=2$.

Здесь Z *– длинная,* Y_1 *– короткая корневые подгруппы. В 5 варианте первая пара углов реализуется в группе типа* B_ℓ*, вторая – в группе типа* C_ℓ*. В* 14 *варианте в случае* $K = \mathbb{F}_3$*, получаем* $\mathrm{SL}_2(K)$*. В системе корней типа* C_ℓ *мы различаем два случая для пары коротких ортогональных корней: когда они порождают подсистему типа* $2\widetilde{\mathrm{A}}_1$*: вариант* 6*, и когда порождают подсистему типа* C_2*: вариант* 7*. В вариантах* 17 *и* 18 *пара подгрупп параметризуется элементом поля. Порождение получается в зависимости от принадлежности параметра* K^{*2}*.*

Теорема 6. *При предположениях теоремы* 5*, но при* $\operatorname{char} K = 2$ *получаем следующие варианты.*

1(c).	$\pi/3$	XY,
2(c).	$\pi/2$	XY,
3.	$\pi/2$	XY,
4(c).	$2\pi/3$	$U(\widetilde{\mathrm{A}}_2, K)$,
5.	π	$\mathrm{SL}_2(K)$,

Заметим, что в формулировке теоремы 1 в [14] в варианте (S21), который соответствует варианту 18 в теореме 5 настоящей работы, допущена ошибка: вместо $\mathrm{SL}_2(L)$ написано $\mathrm{SL}_2(L) \times \mathrm{SL}_2(L)$.

Выпишем в следующей таблице представители пар коротких корневых подгрупп для всех случаев, перечисленных в теоремах 5–6. В дальнейшем, рассматривая тройку коротких корневых подгрупп, мы всегда выбираем представитель орбиты одной из пар данной тройки из этой таблицы.

Для краткости положим $x_\alpha = x_\alpha(t)$, $x_\alpha(c) = x_\alpha(ct)$, где $t \in K$. Порядковые номера в крайнем левом столбце таблицы соответствуют номерам в теореме 5. Символом * обозначены варианты, встречающиеся в характеристике 2.

Таблица 1

	C_ℓ		B_ℓ	
1.*	x_{1+2}	x_{1+3}		
2.	x_{1+2}	$x_{1+2}x_2$	x_1	x_1x_{1-2}
3.	$x_{1+2}x_1(c)$	$x_{1+2}x_2$	$x_1x_{1+2}(c)$	x_1x_{1-2}
4.	$x_{1+2}x_1$	x_2x_3		
5.	$x_{1+2}x_1$	x_{2+3}		
6.*	x_{1+2}	x_{3+4}	x_1	$x_{2+3}x_{2-3}$
7.*	x_{1+3}	x_{1-3}	x_1	x_2
8.			$x_1x_{1+3}(c)$	$x_{2+3}x_{2-3}$
9.*	x_{1+3}	x_{2-3}		
10.	$x_{1+3}x_3$	x_{1-3}	x_1x_{1-2}	x_2
11.	$x_{1+3}x_3$	x_{2-3}		
12.			x_1x_{1-2}	$x_{2+3}x_{2-3}$
13.*	x_{1+2}	x_{-1-2}	x_1	x_{-1}
14.	$x_{1+2}x_1(c)$	x_2x_{-1}	x_1x_{1+2}	$x_{1-2}x_{-1-2}$
15.	$x_{1+2}x_1$	x_3x_{-1}		
16.	x_{1+2}	$x_{-1-2}x_{-1}$	x_1	$x_{-1}x_{-1-2}$
17.	$x_{1+2}x_1(c)$	$x_{-1-2}x_{-1}$	$x_1x_{1+2}(c)$	$x_{-1}x_{-1-2}$

Заметим, что выбранные нами представители орбит в некоторых случаях отличаются от тех, которые были приведены в таблицах 5–6 в работе [14]. Вариант 17 данной таблицы соответствует вариантам 17 и 18 теоремы 1. А именно, при $c \in K^{*2}$ указанные элементы порождают подгруппу варианта 17, при $c \notin K^{*2}$ – варианта 18.

§4. Действие на унипотентном радикале

В этом параграфе мы доказываем технические леммы, описывающие действие на унипотентном радикале. Заметим, что лемма 3, доказанная ниже, по своему характеру подобна предложению, полученному в работе [8, §3].

Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant \ell$, определим множество Σ_k как множество таких положительных корней β, в разложение которых корни $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ входят с нулевыми коэффициентами, а корень α_k с положительным (единичным) коэффициентом. Множество Σ_k представляет собой цепь, состоящую из $2(\ell-k)$ длинных (соответственно, коротких) корней и одного короткого (соответственно, длинного) корня для $\Phi = \mathrm{B}_\ell$ (соответственно, $\Phi = \mathrm{C}_\ell$). В стандартной реализации – это корни вида $e_k \pm e_{k+1}, \dots, e_k \pm e_\ell$ и корень e_k (соответственно, $2e_k$).

В каждой цепи Σ_k занумеруем первые $(\ell - k)$ длинных/коротких корней в порядке возрастания: $\beta_1^k < \dots < \beta_{\ell-k}^k$, где $\beta_i^k = e_k - e_{k+i}$, $1 \leqslant i \leqslant \ell-k$. Через $\overline{\beta}_i^k = e_k + e_{k+i}$ обозначим корень, ортогональный корню β_i^k. Единственный короткий/длинный корень мы обозначим через λ_k. В случае $\Phi = \mathrm{C}_\ell$ сумма корней β_i^k и $\overline{\beta}_i^k$ равна длинному корню λ_k.

Для m, n, $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant \ell$ положим

$$\Sigma_{mn} = \bigcup_{m \leqslant k \leqslant n} \Sigma_k,$$

объединение $n - m + 1$ цепей. В частности, $\Sigma_{1\ell} = \Phi^+$.

Пусть, далее, Δ_k – подсистема корней, порожденная корнями $\{\alpha_k, \dots, \alpha_\ell\}$. Тогда для любого k, $1 \leqslant k < \ell$, имеем

$$\Sigma_{1k} \cup (-\Sigma_{1k}) \cup \Delta_{k+1} = \Phi.$$

Подгруппа $E(\Sigma_{mn})$ является унипотентным радикалом некоторой стандартной параболической подгруппы группы Шевалле $G(\Delta_m)$. В частности, подгруппа $E(\Sigma_{mn})$ инвариантна относительно сопряжения при помощи элементов из подгруппы Леви $G(\Delta_{n+1})$. Таким образом, группа $G(\Delta_{n+1})$ действует сопряжением на $E(\Sigma_{mn})$:

$$y \mapsto x^{-1}yx, \ x \in G(\Delta_{n+1}), \ y \in E(\Sigma_{mn}).$$

Лемма 3. *Пусть $u \in E(\Sigma_{mn})$, $1 \leqslant m \leqslant n < \ell$. Положим $r = n - m + 1$. Тогда существует элемент $x \in G(\Delta_{n+1})$ такой, что носитель $S(x^{-1}ux)$ содержится в множестве*

$$\{\beta_1^m, \dots, \beta_r^m, \overline{\beta}_r^m, \dots, \overline{\beta}_1^m, \lambda_m, \dots, \beta_1^n, \dots, \beta_r^n, \overline{\beta}_r^n, \dots, \overline{\beta}_1^n, \lambda_n\},$$

и порождает некоторую подсистему корней в системе корней типа B_{2r} или C_{2r}, соответственно.

Доказательство. Предположим, что множество

$$(\{e_m \pm e_{m+r}, \dots, e_m \pm e_{m+\ell}\}) \cap S(u)$$

непусто и содержит некоторый корень β. Тогда найдется такой элемент w группы Вейля $W(\Delta_{n+1})$, что $w\beta = \beta_r^m = e_m - e_r$, при этом $w\Sigma_k = \Sigma_k$, $m \leqslant k \leqslant n$, и первые $r-1$ корня в цепи Σ_m останутся неподвижными. Следовательно, $\alpha = \beta_r^m \in S(w^{-1}uw)$.

Для любого корня $\gamma \in \Sigma_m \cap S(u)$, такого, что $\beta_r^m < \gamma < \overline{\beta}_r^m$, разность корней $\gamma - \alpha$ принадлежит Δ_{n+1}. Следовательно, сопряжения при помощи элементов $x_{\gamma-\alpha}(\pm c_\gamma / c_\alpha) \in G(\Delta_{n+1})$ исключают все унипотенты вида $x_\gamma(c_\gamma)$ из разложения $w^{-1}uw$.

Переобозначим получившийся после сопряжений элемент снова за u и проделаем аналогичные вычисления для оставшейся $r-1$ цепи.

А именно, на каждом шаге i, $1 \leqslant i \leqslant r$ мы рассматриваем подмножество цепи Σ_{m+i-1} вида $(\{e_{m+i-1} \pm e_{m+i+r-1}, \dots, e_{m+i-1} \pm e_{m+\ell}\}) \cap S(u)$. Если оно непусто, то, благодаря сопряжению элементом w группы Вейля $W(\Delta_{n+1})$, получаем, что $\alpha = \beta_r^{m+i-1} \in S(w^{-1}uw)$. Далее для всех $\beta \in \Sigma_{m+i-1} \cap S(u)$ и $\beta_r^{m+i-1} < \beta < \overline{\beta}_r^{m+i-1}$ исключаем все унипотенты вида $x_\beta(c_\beta)$ из разложения $w^{-1}uw$ при помощи сопряжений элементами $x_{\beta-\alpha}(\pm c_\beta / c_\alpha) \in G(\Delta_{n+1})$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть $u \in U(\mathrm{B}_\ell, K)$, $u = \prod x_\beta(c_\beta)$, где β – короткие положительные корни, $c_\beta \in K$. Пусть σ – наибольший корень из носителя $S(u)$ и $\sigma = \alpha_k + \dots + \alpha_\ell$. Тогда существует такой элемент $v \in V(\Delta_k, K)$, что*

$$v^{-1}uv = x_\sigma(c_\sigma) \prod x_\lambda(c_\lambda), \ \text{где } \lambda \in \Sigma_k \text{ – длинные корни и } \lambda > \sigma.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что в обозначениях леммы мы имеем $\beta-\sigma\in\Delta_k\cap\Phi^-$ и $\beta+\sigma\in\Sigma_k$ – длинный корень, больший σ.

Выпишем коммутационную формулу Шевалле для нашего случая.

$$x_{\beta-\sigma}(-c_\beta/c_\sigma)x_\sigma(c_\sigma)x_{\beta-\sigma}(c_\beta/c_\sigma)=x_\sigma(c_\sigma)x_\beta(-c_\beta)x_{\beta+2\sigma}(c_\beta c_\sigma),$$

где β – короткий положительный корень.

Для завершения доказательства остаётся положить $v{=}\prod x_{\beta-\sigma}(\pm c_\beta)$, где произведение берётся по всем корням $\beta\in S(u)$, отличным от σ. □

Из леммы 3 сразу следует полезное для нас утверждение.

Лемма 5. *Пусть тройка коротких корневых подгрупп (X,Y,Z) в группе Шевалле $G(\Phi,K)$ типа B_ℓ или C_ℓ сопряжена тройке*

$$(X_{\Gamma_1},X_{\Gamma_2},X_{\Gamma_3}^u),$$

где $u\in U(\Phi,K)$. Предположим, что носитель $S(u)\subset\Sigma_{mn}$ и $r=n-m+1$. Тогда, если множество корней $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ порождает подсистему корней ранга k, то существует элемент $g\in G(\Phi,K)$ такой, что $g^{-1}\langle X,Y,Z\rangle g\leqslant G(\Delta,K)$, где Δ – подсистема корней ранга $k+r$.

§5. Схема доказательства

В §§6–9 мы доказываем теоремы 1–4, сформулированные в начале работы. Доказательства проходят в едином ключе и носят в основном технический характер. Поэтому в этом параграфе мы остановимся на их идее.

Прямым следствием теорем 5–6 являются следующие леммы.

Лемма 6. *Пусть X, Y – короткие корневые подгруппы в односвязной группе Шевалле типа B_ℓ над произвольным полем K. Тогда существует такой элемент $g\in G(\mathrm{B}_\ell,K)$, что $g\langle X,Y\rangle g^{-1}$ будет подгруппой $G(\mathrm{B}_2,K)$ или $U_{12}(\mathrm{B}_3,K)$.*

Лемма 7. *Пусть X, Y – короткие корневые подгруппы в односвязной группе Шевалле типа C_ℓ над произвольным полем K. Тогда существует такой элемент $g\in G(\mathrm{C}_\ell,K)$, что $g\langle X,Y\rangle g^{-1}$ либо будет подгруппой $G(\mathrm{C}_2,K)$ или $U_{23}(\mathrm{C}_3,K)$, либо совпадёт с группой $\mathrm{SL}(2,K)X_2X_3$ или с $X_{1+2}X_{3+4}$.*

На основе этих лемм все пары (X,Y) коротких корневых подгрупп мы разбиваем на два или четыре класса (в ортогональной или симплектической группе, соответственно) в зависимости от вложения в одну из перечисленных подгрупп.

Таким образом, для любой тройки (X, Y, Z) коротких корневых подгрупп существует некоторый элемент g, принадлежащий соответствующий группе Шевалле, и такой, что

$$\langle X, Y, Z\rangle^g \leqslant \langle E(S_0), Z^g\rangle = \langle E(S_0), X_\Gamma^u\rangle,$$

где группа $E(S_0)$ – одна из перечисленных в леммах 6–7, $Z^g = X_\Gamma^u$ для некоторого множества Γ и элемента u таких, как в лемме 1.

Представим u в виде произведения $u = u_1u_2u_3$, где элемент u_1 нормализует X_Γ, элемент u_3 нормализует $E(S_0)$. После сопряжения элементом u_3 можно считать, что $u = u_2$ раскладывается в произведение таких элементарных корневых унипотентов $x_\alpha(*)$, которые одновременно не нормализуют группы $E(S_0)$ и X_Γ.

Для каждого множества Γ обозначим носитель элемента u через $S(u) = S_\Gamma(u)$. В тех случаях, когда элемент u удовлетворяет условиям лемм 3 и 4, применяем эти леммы. Таким образом, получаем

$$(E(S_0), X_\Gamma^u) \sim (E(S_0), X_\Gamma^{u_0})$$

для некоторого $u_0 \in U(\Phi, K)$, сопряженного элементу u. Носитель $S(u_0)$ мы всегда выписываем.

Окончательно, определяем наименьшее замкнутое множество S такое, что $\langle E(S_0), X_\Gamma^{u_0}\rangle \leqslant E(S)$. Для этого вычисляем замыкание одного из множеств корней $S_0 \cup \Gamma \cup (\Gamma + S(u_0)) \cap \Phi$ или $S_0 \cup \Gamma \cup (S_0 + S(u_0)) \cap \Phi$.

§6. Теорема вложения: ортогональный случай

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.

Предположим, что X, Y, Z – короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа B_ℓ над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$. Обозначим через $D = \langle X, Y, Z\rangle$, подгруппу, порожденную тройкой X, Y и Z. Доказательство теоремы разобьём на два случая.

1^0. Хотя бы одна из пар, скажем (X, Y), вкладывается в $G(\mathrm{B}_2, K)$.

В этом случае существует такой элемент $g_1 \in G(\mathrm{B}_\ell, K)$, что

$$g_1^{-1}\langle X, Y\rangle g_1 \leqslant E(S_1),$$

где $S_1 = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_1 \pm e_2\}$.

По лемме 1 подгруппа $g_1^{-1}Zg_1 = X_\Gamma^u$ для некоторого элемента $u \in U(\mathrm{B}_\ell, K)$ и некоторого множества Γ, состоящего из корня γ или пары корней α, β таких, как указано в лемме. При этом носитель $S(u)$

элемента u содержится в множестве

$$S_u = \{e_3, \ldots, e_\ell, e_1 \pm e_3, \ldots, e_1 \pm e_\ell, e_2 \pm e_3, \ldots, e_2 \pm e_\ell\}.$$

Поскольку корни Γ порождают подсистему корней ранга не более двух, существует элемент группы Вейля $w \in W(\Delta_3)$ такой, что $w(\Gamma \cup S_1) \subset \Phi(\mathrm{B}_4)$, причём $wS(u) \subset S_u$.

В зависимости от включения множества Γ в одно из перечисленных ниже множеств, выпишем соответствующие S_u в следующей таблице.

Γ	S_u	
$\pm e_3$	$e_4, \ldots, e_\ell,$	(1)
$\pm e_i,$	$e_3, \ldots, e_\ell,\ \Sigma_i,$	(2)
$\pm e_1 \pm e_2$	$\Sigma_{12},$	(3)
$\pm e_1 \pm e_3$	$e_3, e_2 \pm e_3, \Sigma_1,$	(4)
$\pm e_2 \pm e_3$	$e_3, e_1 \pm e_3, \Sigma_2,$	(5)
$\pm e_3 \pm e_4$	$e_3, e_4, e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4,$	(6)

где $i = 1, 2$.

В силу леммы 4 в случае (1) существует некоторый элемент $g_2 \in G(\Delta_4)$ и в случае (2) $g_2 \in G(\Delta_3)$, после сопряжения тройки подгрупп которым, получаем, что $S(g_2^{-1}ug_2)$ будет подмножеством либо $\{e_4\}$, либо $\{e_3, e_i \pm e_3, \ldots, e_i \pm e_\ell\}$, $i = 1, 2$, соответственно.

Далее в случаях (2)–(5) в силу леммы 3 существует такой элемент $g_3 \in G(\Delta_4)$ (нормализующий $E(S_1)$ и X_Γ), что $S(u_0)$, где

$$u_0 = g_3^{-1}g_2^{-1}ug_2g_3,$$

будет подмножеством одного из следующих множеств

$$\begin{gathered}\{e_3, e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4\},\\ \{e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\},\\ \{e_3, e_2 \pm e_3, e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4\},\\ \{e_3, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\},\end{gathered}$$

соответственно.

Таким образом, замыкание множества

$$S_1 \cup \Gamma \cup ((\Gamma + S(u_0)) \cap \Phi)$$

содержится в системе корней типа B_4. Следовательно, в этом случае подгруппа D вкладывается в $G(\mathrm{B}_4, K)$.

2^0. Предположим, что одна из пар коротких корневых подгрупп, скажем (X, Y), вкладывается в $U_{12}(\mathrm{B}_3, K)$. Тогда для некоторого $g_1 \in G(\mathrm{B}_\ell, K)$ имеем

$$g_1^{-1}\langle X, Y, Z\rangle g_1 \leqslant \langle E(S_2), X_\Gamma^u\rangle, \text{ где } S_2 = \{e_1, e_2, e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3\}.$$

При этом

$$S(u) \subset S_u = \{e_4, \dots e_\ell, e_2 \pm e_4, \dots, e_2 \pm e_\ell, e_3 \pm e_4, \dots, e_3 \pm e_\ell\}.$$

С помощью сопряжения элементом группы Вейля $w \in W(\Delta_4)$, оставляющим инвариантным множество S_u, вложим все корни $\Gamma \cup S_2$ в одну подсистему корней типа B_5. Точнее говоря,

$$w(\Gamma \cup S_2) \subset \{\pm e_i, e_4, \pm e_i \pm e_j, e_4 \pm e_5,\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4\}.$$

Как было указано в §5, мы найдем такие минимальные множества корней S, что подгруппа D при помощи сопряжения вкладывается в группу $E(S)$.

Если Γ состоит только из положительных корней, в качестве группы $E(S)$ мы сразу получаем унипотентный радикал $U(\mathrm{B}_5, K)$.

Теперь рассмотрим перечисленные ниже в таблице корни множества Γ. Как и ранее, для каждого Γ указано соответствующее множество S_u.

Γ	S_u	
$-e_1$	$e_4, \dots, e_\ell,$	(1)
$\pm e_1 \pm e_i$	$\Sigma_i,$	(2)
$\pm e_1 \pm e_4$	$e_4,\ e_2 \pm e_4, e_3 \pm e_4,$	(3)
$e_2 \pm e_3 / \pm e_2 + e_3$	$\Sigma_3/\Sigma_2,$	(4)

где $i = 2, 3$.

В случае (1) в силу леммы 4 $S(u_0) \subset \{e_4\}$. Отсюда в случаях (1) и (3) сразу получаем вложение множества корней S в $\Phi(\mathrm{B}_4)$. В случаях (2) и (4) тот же результат следует после применения леммы 5. Таким образом, в любом из перечисленных случаев имеем вложение в группу $G(\mathrm{B}_4, K)$.

Если $\Gamma = \{-e_i\}$, $i = 2, 3$, тогда $S(u) \subset \{e_4, \dots, e_\ell, e_i \pm e_4, \dots, e_i \pm e_\ell\}$.

В силу лемм 3 и 4 получаем

$$S(u_0) \subset \{e_4, e_i \pm e_4, e_i \pm e_5\}.$$

Далее, имеем

$$S_2 \cup (S_2 + S(u_0)) \cap \Phi$$
$$\subset \{e_1, e_2, e_1 \pm e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_4, e_1 \pm e_5, e_2 \pm e_5\}.$$

Окончательно, добавляем к этому множеству корень $-e_i$ и вычисляем замыкание полученного множества. В результате получаем, что D вкладывается в подгруппу вида $G(\mathrm{B}_2', K)U_1(\mathrm{B}_5, K)$, где через B_2' обозначена подсистема корней $\Phi(\mathrm{B}_5)$, порождённая корнями $e_2 - e_3$ и e_3.

Если $\Gamma = \{\pm e_i + e_4\}$, $\{\pm e_i - e_4\}$ или $\{-e_i \pm e_4\}$, $i = 2, 3$, тогда $S(u) \subset \Sigma_i \cup \{e_4\}$.

В силу леммы 3 сопряжениями элементами из группы $G(\Delta_5, K)$ получаем

$$S(u_0) \subset \{e_4, e_i \pm e_4, e_i \pm e_5\}.$$

Таким образом, множество S содержится в $\Phi(\mathrm{B}_5)$. Вычисляя редуктивную и унипотентную части множества S, получаем, что D посредством сопряжения вкладывается в группу $G(\mathrm{D}_4', K)U_1(\mathrm{B}_5, K)$, где через D_4' обозначена подсистема корней $\Phi(\mathrm{B}_5)$, порождённая корнями $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$, $e_4 - e_5$, $e_4 + e_5$.

Если $\Gamma = \{\pm e_2 - e_3\}$, $\{-e_2 \pm e_3\}$, тогда $S(u) \subset \Sigma_{23}$.

В силу леммы 3 получаем, что $S(u_0)$ будет подмножеством одного из множеств

$$\{e_2 \pm e_4, e_3 \pm e_4, e_3 \pm e_5\} \text{ или } \{e_2 \pm e_4, e_2 \pm e_5, e_3 \pm e_4\}.$$

Вычисление замыкания множества корней приводят к такому же множеству, как и в 1^0, т.е. подгруппа D вкладывается в группу

$$G(\mathrm{D}_4', K)U_1(\mathrm{B}_5, K).$$

Теорема 1 доказана.

§7. Теорема вложения: симплектический случай

В этом параграфе предположим, что X, Y, Z – короткие корневые подгруппы в некоторой группе Шевалле типа C_ℓ над полем K, $\operatorname{char} K \neq 2$. Как и выше, $D = \langle X, Y, Z \rangle$. Доказательство теоремы разобьём на четыре случая.

1^0. Хотя бы одна из пар рассматриваемой тройки вкладывается в $G(\mathrm{C}_2, K)$.

Пусть такой парой будет пара (X, Y). Тогда существует элемент $g \in G(\mathrm{C}_\ell, K)$ такой, что $g^{-1}\langle X, Y\rangle g \leqslant E(S_1)$, где

$$S_1 = \{\pm e_1 \pm e_2, \pm 2e_1, \pm 2e_2\}.$$

При этом $g^{-1}Zg = X_\Gamma^u$ для некоторого элемента $u \in U(\mathrm{C}_\ell, K)$ и некоторого множества Γ (см. лемму 1). Носитель $S(u)$ элемента u содержится в множестве

$$S_u = \{e_1 \pm e_3, \dots, e_1 \pm e_\ell, e_2 \pm e_3, \dots, e_2 \pm e_\ell\} \subset \Sigma_{12}.$$

Далее, существует элемент группы Вейля $w \in W(\Delta_3)$ такой, что $w(\Gamma \cup S_1) \subset \Phi(\mathrm{C}_4)$, в то же время $wS(u) \subset S_u$.

В зависимости от включения множества Γ в одно из перечисленных ниже множеств, выпишем соответствующие S_u в следующей таблице.

Γ	S_u	
$\pm e_1 \pm e_2, (\pm 2e_1, \pm 2e_2)$	Σ_{12},	(1)
$\pm e_i \pm e_3, (\pm 2e_i, \pm 2e_3)$	Σ_i,	(2)
$\pm e_3 \pm e_4, (\pm 2e_3, \pm 2e_4)$	$e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4$,	(3)

где $i = 1$, 2.

Таким образом, по лемме 5 для ситуации (1) и (2) и, очевидно, в ситуации (3) получаем, что подгруппа D вкладывается в группу $G(\mathrm{C}_4, K)$.

2^0. Две пары порождают подгруппу, сопряженную группе

$$\mathrm{SL}(2, K)X_2X_3$$

(вариант 15 таблицы 1).

Предположим, что такими парами являются пары (X, Y) и (X, Z). Убедимся, что

$$(X, Y, Z) \sim (X_{\rho,\delta}, X_{-\delta,\lambda}, X^u_{-\delta,\beta}), \text{ где } \lambda = 2e_3,\ \beta = \pm 2e_3 \text{ или } 2e_4.$$

Действительно, тройка (X, Y, Z) сопряжена $(X_{\rho,\delta}, X_{-\delta,\lambda}, X_\Gamma^u)$, при этом пара $(X_{\rho,\delta}, X_\Gamma^u)$ сопряжена паре $(X_{\rho,\delta}, X_{-\delta,\beta})$ для некоторого длинного корня β, ортогонального корню ρ. Поскольку унипотентный радикал $U(\mathrm{C}_\ell, K)$ нормализует подгруппу $X_\rho X_\delta$, заключаем, что $\Gamma = \{-\delta, \beta\}$.

Легко видно, что $S(u) \subset \{e_1 \pm e_3, \dots, e_1 \pm e_\ell, e_2 - e_3\} = \Sigma_1 \cup \{e_2 - e_3\}$.

По лемме 5 для $\beta = \pm 2e_3$ получаем, что D вкладывается в $G(\mathrm{C}_4, K)$. Если $\beta = 2e_4$, то по лемме 3 получаем, что после сопряжения некоторым элементом из $G(\Delta_5)$ носитель $S(u_0)$ станет подмножеством множества $\{e_1 \pm e_3, e_1 \pm e_4, e_1 \pm e_5\}$.

Дальнейшие сопряжения подходящими унипотентами позволяют заключить, что $S(u_0)$ является подмножеством одного из множеств

$$\{e_1 - e_3, e_1 - e_4\} \text{ или } \{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 \pm e_5\}.$$

В первом случае мы снова попадаем в рассмотренную ситуацию. Во втором, при помощи сопряжения тройки подгрупп элементом вида $x_{-5}(*)$, получаем

$$(X, Y, Z) \sim (X_{\rho,\delta}, X_{-\delta,\lambda}, (x_\delta(-c) X_{-\delta,\beta} x_\delta(c))^{u_0}), \quad c \in K,$$

где $S(u_0) \subset \{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5\}$.

Вычисляем замыкание множества $\{\rho, \delta, -\delta, 2e_3, -\delta + S(u_0), 2e_4\}$. После сопряжения подходящим элементом группы Вейля получаем, что подгруппа D вкладывается в группу $G(\mathrm{A}_1, K) U_4(\mathrm{C}_5, K)$, где $G(\mathrm{A}_1, K) = E(\delta, -\delta)$.

3^0. Все три пары (X, Y), (X, Z) и (Y, Z) строго ортогональны, т.е. каждая из пар сопряжена паре подгрупп (X_α, X_β), где α и β – строго ортогональные короткие корни.

Тогда

$$(X, Y, Z) \sim (X_{1+2}, X_{3+4}, X_\Gamma^u).$$

Из строгой ортогональности подгрупп следует, что Γ состоит из корней, строго ортогональных $e_1 + e_2$ и $e_3 + e_4$. Поэтому можно считать, что $\Gamma = \{e_5 + e_6\}$ или $\{2e_5, 2e_6\}$. Следовательно, $u = 1$. Наконец, заметим, что подгруппы X_{5+6} и $X_{5,6}$ сопряжены в нормализаторе $X_{1+2} X_{3+4}$.

Окончательно, имеем $D \sim X_\alpha X_\beta X_\gamma$, где α, β и γ – попарно строго ортогональные короткие корни.

4^0. Хотя бы одна из пар вкладывается в $U_{23}(\mathrm{C}_3, K)$.

Тогда существует такой элемент $g \in G(\mathrm{C}_\ell, K)$, что

$$g^{-1} \langle X, Y, Z \rangle g \leqslant \langle E(S_2), X_\Gamma^u \rangle,$$

где $S_2 = \{e_1 + e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, 2e_1, 2e_2, 2e_3\}$ и $S(u) \subset \Sigma_3$.

Далее, существует элемент группы Вейля $w \in W(\Delta_4)$ такой, что $w(\Gamma \cup S_2) \subset \Phi(\mathrm{C}_5)$. Более того, можно считать, что $w(\Gamma \cup S_2)$ содержится в множестве

$$\{\pm e_i \pm e_j, \pm 2e_i, \pm 2e_j, \pm e_i + e_4, \pm e_i + e_5, 2e_4, 2e_5, e_4 + e_5, 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3\}.$$

Если Γ состоит только из положительных корней и $\Gamma \cup S_2 \subset \Phi(\mathrm{C}_4)$, то, как следует из леммы 5, подгруппа D вкладывается в $U(\mathrm{C}_5, K)$.

Если $\Gamma = \{e_4 + e_5\}$ или $\Gamma = \{2e_4, 2e_5\}$, то $S(u) \subset \{e_3 - e_4, e_3 - e_5\}$ и D также вкладывается в $U(\mathrm{C}_5, K)$.

Если $\Gamma \cup S_2 \subset \Phi(\mathrm{C}_3)$, то по лемме 5 получаем, что D вкладывается в $G(\mathrm{C}_4, K)$.

Если Γ совпадает с одним из множеств $\{-e_i + e_4\}$, $\{-2e_i, 2e_4\}$, $i = 1$, 2, то $S(u) \subset \{e_3 - e_4\}$. Снова приходим к $G(\mathrm{C}_4, K)$.

Для множества Γ остаётся две возможности:
$\{-e_3 + e_4\}$ или $\{-2e_3, 2e_4\}$. В обоих случаях по лемме 3 имеем $S(u_0) \subset \{e_3 \pm e_4, e_3 \pm e_5\}$. Тогда

$$(S_2 + S(u_0)) \cap \Phi = \{e_1 \pm e_4, e_2 \pm e_4, e_1 \pm e_5, e_2 \pm e_5\}.$$

Если $\Gamma = \{-e_3 + e_4\}$, тогда элемент группы Вейля w такой, что $w(-e_3 + e_4) = e_3 - e_4$, переводит все корни множества $S_2 + S(u_0)$ в положительные и, следовательно, D вкладывается в $U(\mathrm{C}_5, K)$.

Наконец, для $\Gamma = \{-2e_3, 2e_4\}$ вычисляем замыкание множества $S_2 \cup (S_2 + S(u_0)) \cap \Phi \cup \Gamma$. В результате чего после подходящего сопряжения получаем подгруппу группы $G(\mathrm{A}_1, K)U_4(\mathrm{C}_5, K)$, где $G(\mathrm{A}_1, K) = E(\pm 2e_5)$. Теорема доказана.

§8. Характеристика 2: ортогональный случай

Напомним, что в этом случае любая пара (X, Y) различных коротких корневых подгрупп сопряжена либо паре (X_1, X_{-1}), либо (X_1, X_2). Унипотентный радикал $U(\Phi, K)$ нормализует X_ρ.

Пусть (X, Y, Z) – тройка различных коротких корневых подгрупп в $G(\mathrm{B}_\ell, K)$, $\operatorname{char} K = 2$. Рассмотрим два случая.

1^0. Хотя бы одна из пар тройки противоположная. Тогда

$$(X, Y, Z) \sim (X_1, X_{-1}, X_\gamma^u), \text{ где } S(u) \subset \{e_1 \pm e_2, \dots, e_1 \pm e_\ell\}.$$

Сопряжение подходящим элементом группы Вейля позволяет считать, что $\gamma = \pm e_1$ или $\gamma = e_2$ (случай $\gamma = e_1$ исключаем).

Предположим, что $\gamma = -e_1$. Тогда в силу леммы 3 $S(u_0) \subset \{e_1 \pm e_2\}$. Далее имеем

$$\begin{aligned}\langle X_1, X_{-1}, X_{-1}^{u_0}\rangle &\sim \langle X_1, X_{-1}, X_{-1}^{x_1(*)x_{1-2}(*)}\rangle \\ &= \langle X_1, X_{-1}, \{x_{-2}(t)x_{-1-2}(ct),\ t \in K\}\rangle,\ c \in K.\end{aligned}$$

Отсюда, после сопряжения некоторым элементом группы Вейля, получаем

$$\langle X, Y, Z\rangle \sim \mathrm{SL}_2(K)X_{\rho,\delta}.$$

Если $\gamma = e_2$, то

$$\begin{aligned}\langle X_1, X_{-1}, X_2^{x_{1-2}(*)}\rangle &= \langle X_1, X_{-1}, \{x_2(t)x_{1+2}(ct),\ t \in K\}\rangle \\ &= \mathrm{SL}_2(K)X_{\rho,\delta},\ c \in K.\end{aligned}$$

2^0. Среди пар нет противоположных. Тогда

$$(X, Y, Z) \sim (X_1, X_2, X_\gamma^u),\ \text{где } S(u) \subset \{e_1 - e_2\}.$$

Сопряжение подходящим элементом группы Вейля позволяет считать, что $\gamma = \pm e_1$, $\pm e_2$ или e_3. Но, если $\gamma = e_1$, то $X = Z$. Если $\gamma = -e_1$ или $-e_2$, то тройка содержит противоположные пары.

Пусть $\gamma = e_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle X_1, X_2, X_2^{x_{1-2}(*)}\rangle &= \langle X_1, X_2, \{x_2(t)x_1(ct)x_{1+2}(dt),\ t \in K\}\rangle \\ &= X_1X_2X_{1+2}, c,\ d \in K.\end{aligned}$$

Если $\gamma = e_3$, сразу получаем подгруппу $X_1X_2X_3$. Теорема 3 доказана.

§9. Характеристика 2: симплектический случай

В этом параграфе мы доказываем последнюю сформулированную во введении теорему. X, Y, Z – тройка коротких корневых подгрупп в $G(\mathrm{C}_\ell, K)$ над полем K характеристики два, $D = \langle X, Y, Z\rangle$. Рассмотрим три случая.

1^0. Среди пар подгрупп данной тройки есть хотя бы одна противоположная. Тогда

$$(X, Y, Z) \sim (X_{1-2}, X_{-1+2}, X_\gamma^u),\ \text{где } S(u) \subset \Sigma_{12}.$$

Ясно, что существует элемент группы Вейля $w \in W(\Delta_3)$, после сопряжения которым корень γ окажется во множестве $\{\pm e_1 \pm e_2, \pm e_1 + e_3, e_3 + e_4\}$ (корни $\pm e_1 + e_3$ и $\pm e_2 + e_3$ отождествляются).

Применяя, если необходимо, лемму 3, заключаем, что для любого корня γ множество $S(u_0) \subset \{2e_1, 2e_2, e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\}$. Если корень γ положительный или равен $-e_1 + e_2$, то среди корней, соответствующих унипотентным элементам данной тройки, будет только одна пара противоположных, причем положительный корень из этой пары – простой. Поэтому редуктивная часть подгруппы D имеет вид $G(\widetilde{\mathrm{A}}_1)$, при этом унипотентная часть вкладывается в $U(\mathrm{C}_4, K)$.

Необходимо рассмотреть только случай $\gamma = -e_1 - e_2$. После сопряжения элементами вида $x_1(*)$ и $x_2(*)$ получаем: подгруппа

$$\langle X_{1-2}, X_{-1+2}, X^{u_0}_{-1-2}\rangle$$

сопряжена некоторой подгруппе группы

$$\langle E(\pm(e_1 - e_2), e_1 + e_2, 2e_1, 2e_2), X^{u_1}_{-1-2}\rangle,$$

где $S(u_1) \subset \{e_1 \pm e_3, e_2 \pm e_3, e_2 \pm e_4\}$.

В результате дополнительных сопряжений элементами вида $x_3(*)$ и $x_4(*)$ получаем u_2, сопряженный u_1, такой, что $S(u_2) \subset \{e_1 - e_3, e_2 \pm e_3, e_2 - e_4\}$. Легко видно, что замыкание множества

$$\{\pm(e_1 - e_2), e_1 + e_2, 2e_1, 2e_2\} \cup (-e_1 - e_2 + S(u_2)) \cap \Phi.$$

имеет редуктивную часть типа C_3. Следовательно, D вкладывается в $G(\mathrm{C}_3)U(\mathrm{C}_4, K)$.

2^0. Все три пары строго ортогональны. Случай полностью совпадает со случаем 3^0 из §7.

3^0. Среди пар нет противоположных, и хотя бы одна пара вкладывается в $U(\mathrm{C}_3, K)$. Тогда

$$\langle X, Y, Z\rangle \sim \langle X_\alpha, X_\beta, X^u_\gamma\rangle \leqslant \langle E(S_3), X^u_\gamma\rangle,$$

где $S_3 = \{e_1 + e_2, e_1 \pm e_3, e_2 + e_3\}$. Следовательно, $S(u) \subset \Sigma_3$ и корень γ после сопряжения элементом группы Вейля принадлежит множеству $\{\pm e_1 \pm e_2, \pm e_1 \pm e_3, \pm e_2 \pm e_3, \pm e_1 + e_4, \pm e_2 + e_4, \pm e_3 + e_4, e_4 + e_5\}$.

Рассуждения в §7, п. 4^0, не зависят от характеристики поля. Поэтому из них сразу следует, что при положительном корне γ и при $\gamma = -e_3 + e_4$ подгруппа D вкладывается в $U(\mathrm{C}_5, K)$.

При $\gamma \in \{-e_1 \pm e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_3\}$ $S(u_0) = \emptyset$ и D вкладывается в $G(\mathrm{C}_3, K)$.

Остаётся рассмотреть ситуацию, когда корень γ совпадает с одним из следующих корней $-e_2-e_3$, $-e_1+e_4$, $-e_2+e_4$. После применения леммы 3 в любом случае $S(u_0)\subset\{2e_3, e_3\pm e_4\}$. Вместо подгруппы $\langle E(S_3), X_\gamma^{u_0}\rangle$ рассмотрим сопряженную ей $\langle u_0^{-1}E(S_3)u_0, X_\gamma\rangle$. Следовательно, подгруппа D вкладывается в группу $E(S)$, где S – замыкание множества корней

$$S_3\cup(S_3+S(u_0))\cap\Phi=\{e_1+e_2, e_1\pm e_3, e_2\pm e_3, e_1\pm e_4, e_2\pm e_4, 2e_1, 2e_2\}$$

и корня γ. Но, корень γ сопряжен корню $-\alpha_2$, при этом положительные корни S переходят в положительные. Значит, редуктивная часть S имеет тип $\widetilde{\mathrm{A}}_1$. Таким образом, D вкладывается в $G(\widetilde{\mathrm{A}}_1, K)U(\mathrm{C}_4, K)$.

Теорема 4 доказана.

Литература

1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. IV–VI. Мир, М., 1972.
2. Н. А. Вавилов, *О геометрии длинных корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Вестник ЛГУ, сер. 1 (1988), Вып. 1, 8–11.
3. Н. А. Вавилов, *Разложение Брюа длинных корневых элементов в группах Шевалле.* — Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей, Л., 1988, 18–39.
4. Н. А. Вавилов, *Взаимное расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Вестник ЛГУ, сер. 1 (1989), Вып. 1, 3–7.
5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общества **1** (1990), 64–109.
6. Н. А. Вавилов, *Весовые элементы групп Шевалле.* — Алгебра и анализ **20** (2008), 34–85.
7. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
8. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24** (2012), 22–83.
9. Е. Б. Дынкин, *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* — Матем. сб. **30**, No. 2 (1952), 349–462.
10. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Успехи мат. наук **36**, No. 5 (1981), 56–107.
11. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — Успехи мат. наук **41**, No. 1 (1986), 57–96.
12. В. В. Нестеров, *Расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа* G_2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 273–285.
13. В. В. Нестеров, *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа* G_2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 253–273.
14. В. В. Нестеров, *Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **16** (2004), 172–208.
15. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975.

16. M. Aschbacher, G. M. Seitz, *Involutions in Chevalley groups over fields of even order.* — Nagoya Math. J. **63** (1976), 1–91, *corrections* Nagoya Math. J. **72** (1978), 135–136.
17. R. Brown, S. P. Humphries, *Orbits under symplectic transvections.* — I, II, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), 517–531, 532–556.
18. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Pure Appl. Math. **28**, Wiley: London et al., 1972.
19. B. N. Cooperstein, *Subgroups of the group* $\mathrm{E}_6(q)$ *which are generated by root subgroups.* — J. Algebra **46** (1977), 355–388.
20. B. N. Cooperstein, *The geometry of root subgroups in exceptional groups.* — Geometria dedicata **8**, No. 3 (1979), 317–381; **15**, No. 1 (1983), 1–45.
21. B. N. Cooperstein, *Geometry of long root subgroups in groups of Lie type.* — Proc. Symp. Pure Math., **37** (1980), 243–248.
22. B. N. Cooperstein, *Subgroups of exceptional groups of Lie type generated by long root elements.* I, II. — J. Algebra **70**, No. 1 (1981), 270–298.
23. L. Di Martino, N. A. Vavilov, (2,3)*-generation of* $\mathrm{SL}(n, q)$. I, II. — Comm. Algebra **22**, No. 4 (1994), 1321–1347; Comm. Algebra **24**, No. 2 (1996), 487–515.
24. W. M. Kantor, *Subgroups of classical groups generated by long root elements.* — Trans. Amer. Math. Soc. **248**, No. 2 (1979), 347–379.
25. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups containing root subgroups in finite classical groups.* — Kexue Tongbao **29**, No. 1 (1984), 14–18.
26. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups in* $P\Omega(n, F, Q)$ *with root subgroups.* — Sci. Sinica Ser. A **28**, No. 8 (1985), 826–838.
27. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups containing short root subgroups in* $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{F})$. — Acta Math. Sinica, New ser. **3**, No. 1 (1987), 82–91.
28. M. W. Liebeck, G. M. Seitz, *Subgroups generated by root elements in groups of Lie type.* — Ann. Math. **139** (1994), 293–361.
29. B. S. Stark, *Some subgroups of* $\Omega(V)$ *generated by groups of root type* 1. — Illinois J. Math. **17**, No. 4 (1973), 584–607.
30. B. S. Stark, *Some subgroups of* $\Omega(V)$ *generated by groups of root type.* — J. Algebra **17**, No. 1 (1974), 33–41.
31. B. S. Stark, *Irreducible subgroups of orthogonal groups generated by groups of root type* 1. — Pacific J. Math. **53**, No. 2 (1974), 611–625.
32. D. I. Stewart, *The reductive subgroups of* F_4. — Mem. Amer. Math. Soc. **223**, No. 1049 (2013).
33. F. G. Timmesfeld, *Groups generated by root involutions.* — J. Algebra **33** (1975), 75–134; II, J. Algebra **35** (1975), 367–441.
34. F. G. Timmesfeld, *Groups generated by* k*-transvections.* — Invent. Math. **100** (1990), 167–206.
35. F. G. Timmesfeld, *Groups generated by* k*-root subgroups.* — Invent. Math. **106** (1991), 575–666.
36. F. G. Timmesfeld, *Groups generated by* k*-root subgroups – a survey.* — Groups, Combinatorics and Geometry, Durham, 1990, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 165, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 183–204.

Nesterov V.V. Reduction theorems for triples of short root subgroups in Chevalley groups.

In the present paper we prove reduction theorems for triples of short root unipotent subgroups in Chevalley groups of type B_ℓ and C_ℓ. The main results assert that apart from one case any subgroup generated by such a triple is conjugate to a subgroup of

$$G(\mathrm{B}_4, K)U(\mathrm{B}_5, K) \quad \text{or} \quad G(\mathrm{C}_4, K)U(\mathrm{C}_5, K),$$

respectively.

Балтийский государственный
технический университет
“ВОЕНМЕХ” им.Д.Ф. Устинова,
1-я Красноармейская, 1,
190005, Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: vl.nesterov@mail.ru

Поступило 2 июня 2015 г.