Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

В. С. Кальницкий

СИММЕТРИИ ПЛОСКОЙ АЛГЕБРЫ КОСИМВОЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§1. Основные понятия

Пусть A – коммутативная унитарная алгебра над кольцом с единицей K. Если P и Q – A-модули, то для каждого $a \in A$ определены коммутирующие между собой гомоморфизмы K-модулей

$$\delta_a : \mathrm{Hom}_K(P,Q) \to \mathrm{Hom}_K(P,Q), \quad h \mapsto p \mapsto h(ap) - ah(p), \quad p \in P.$$

Определение 1. *Элемент $\Delta \in \mathrm{Hom}_K(P,Q)$ называется дифференциальным оператором порядка $\leqslant k$, если для любого набора $\{a_0, \dots, a_k\} \subset A$*

$$[\delta_{a_0} \circ \dots \circ \delta_{a_k}](\Delta) = 0.$$

Множество $\mathrm{Diff}_k(P,Q)$ всех дифференциальных операторов порядка $\leqslant k$ наследует структуру A-модуля $\mathrm{Hom}_K(P,Q)$, в котором определено умножение $(ah)(p) = ah(p)$. В случае $P = A$ будем использовать обозначение $\mathrm{Diff}_k(Q)$. Элементы A-модуля

$$\mathrm{D}(Q) = \{\Delta \in \mathrm{Diff}_1(Q) | \Delta(1) = 0\}$$

называются дифференцированиями алгебры A со значениями в модуле Q.

Рассмотрим категорию A-Mod всех A-модулей с гомоморфизмами A-модулей в качестве морфизмов. Сопоставление $\mathrm{Diff}_k : P \mapsto \mathrm{Diff}_k(P)$ является функтором в этой категории.

Определение 2. *Функтор Diff_k называется представимым в подкатегории $\mathfrak{M} \subset A - \mathrm{Mod}$, если он является функтором в подкатегории и если существует представляющий объект $\mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$ такой, что для любого $Q \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{M})$*

$$\mathrm{Diff}_k(Q) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}}, Q).$$

Ключевые слова: косимволы дифференциальных операторов, пульверизация, симметрии полиномиальных полей.

Автор благодарен профессору А. М. Виноградову за настоятельную рекомендацию рассматривать вопросы симметрий полей на алгебре косимволов дифференциальных операторов.

Если положить $Q = \mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}}$, то тождественному отображению представляющего объекта в себя будет соответствовать дифференциальный оператор $j^{\mathfrak{M}}_k : A \to \mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}}$. Модуль $\mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}}$ называется *модулем k-джетов*, отображение $j^{\mathfrak{M}}_k$ – *универсальным дифференцированием* порядка k.

Подробно представленные понятия изложены в [1, 2]. Определение дифференциально замкнутой категории, в которой представимы функторы дифференциального исчисления, дано в [3]. Там же доказана дифференциальная замкнутость категории A-модулей, показано, что пространство джетов порождается как A-модуль элементами вида $j_k(a)$, доказана представимость функтора D, сопоставляющего модулю модуль его дифференцирований. Явное алгебраическое описание строения модулей джетов в категории A-Mod дано в [4].

Определим модуль $\mathcal{J}^\infty_{\mathfrak{M}}$ (см. [5]). Дифференциальные операторы порядка $\leqslant l$ являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant l+1$, т.е. определено инъективное вложение $i_l : \mathrm{Diff}_l(Q) \to \mathrm{Diff}_{l+1}(Q)$ для любого модуля Q. Рассмотрим случай $Q = \mathcal{J}^l_{\mathfrak{M}}$. Универсальному дифференциальному оператору $i_l(j_l)$ как элементу

$$\mathrm{Diff}_{l+1}(\mathcal{J}^l_{\mathfrak{M}}) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^{l+1}, \mathcal{J}^l_{\mathfrak{M}})$$

соответствует единственный эпиморфизм $\nu_{l+1,l} : \mathcal{J}^{l+1}_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{J}^l_{\mathfrak{M}}$, такой, что $j_l = \nu_{l+1,l} \circ j_{l+1}$. Возникает цепь модулей и их эпиморфизмов

$$0 \leftarrow A = \mathcal{J}^0_{\mathfrak{M}} \overset{\nu_{1,0}}{\leftarrow} \mathcal{J}^1_{\mathfrak{M}} \overset{\nu_{2,1}}{\leftarrow} \mathcal{J}^2_{\mathfrak{M}} \overset{\nu_{3,2}}{\leftarrow} \dots .$$

Рассмотрим обратный предел $\mathcal{J}^\infty_{\mathfrak{M}} = \varprojlim \mathcal{J}^k_{\mathfrak{M}}$. Покомпонентное сложение и действие элементов из A превращает $J^\infty_{\mathfrak{M}}$ в A-модуль. Естественные эпиморфизмы $\nu_{\infty,l} : \mathcal{J}^\infty_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{J}^l_{\mathfrak{M}}$ задают фильтрацию

$$J^\infty_{\mathfrak{M}} \supset \mathrm{Ker}\nu_{\infty,0} \supset \mathrm{Ker}\nu_{\infty,1} \supset \dots .$$

По отношению к покомпонентному умножению и сложению k-джетов модуль $\mathcal{J}^\infty_{\mathfrak{M}}$ становится коммутативной фильтрованной алгеброй с единицей.

Обозначим фактор-модули фильтрованной алгебры:

$$\mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}_{l+1}(A) = \mathrm{Ker}\nu_{\infty,l}/\mathrm{Ker}\nu_{\infty,l+1}, \quad \mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}_0(A) = A.$$

Эти модули называются модулями *косимволов* порядка l. Умножение в фильтрованной алгебре задает умножение косимволов. Модуль косимволов

$$\mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}_i(A)$$

является коммутативной ассоциативной градуированной алгеброй с единицей.

Замечательными свойствами, отличающими эту градуированную алгебру от известной алгебры *символов* дифференциальных операторов, являются следующие факты, верные во всех дифференциально замкнутых категориях.

Утверждение 1. *Модуль* $\mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$, $k \geqslant 2$, *порождается произведениями элементов модуля* $\mathrm{Csm}_1^{\mathfrak{M}}(A)$. *Последний, в свою очередь, изоморфен модулю* $\Lambda^1_{\mathfrak{M}}(A)$ *внешних форм, являющемуся представляющим объектом функтора* D, *а его универсальное дифференцирование* d *совпадает с внешним дифференциалом.*

Утверждение 2. *Для всех дифференциально замкнутых категорий* $\mathfrak{M}$ K*-спектр алгебры косимволов* $\mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}(A)$ *биективен множеству* $TA = \cup_{h\in|A|} T_h A$ *– касательному расслоению над алгеброй* A.

Последним фактом мы будем пользоваться для иллюстрации полученных в дальнейшем результатов на геометрическом языке. Все описанные в работе конструкции имеют геометрический смысл в случае алгебры гладких функций $A = C^\infty(M)$ на гладком многообразии M, в категории геометрических модулей. Обсуждение перечисленных выше понятий можно найти в [6].

§2. Дифференцирования градуированной алгебры

Дифференцирование X ранга 0 градуированной алгебры задает дифференцирование алгебры A. В свою очередь, любое дифференцирование $X \in D(A)$, в силу универсальности модуля $\Lambda^1_{\mathfrak{M}}(A)$ и утверждения 1, продолжается однозначно до градуированного дифференцирования $\bar{X}$ алгебры косимволов. Его действие на элементы модуля $a \cdot d(b) \in \Lambda^1_{\mathfrak{M}}(A)$ имеет вид

$$\bar{X}(a \cdot d(b)) = X(a)d(b) + a \cdot d(X(b)). \tag{1}$$

Геометрически эта операция является полным лифтом потока на многообразии на касательное расслоение. В силу этого замечания дифференцирование $\bar{X}$ мы будем называть *лифтом* оператора X. Как следует из выше сказанного, любое дифференцирование алгебры косимволов полностью определяется своим действием на нулевой и первой компоненте градуировки.

Определение 3. *Градуированное дифференцирование* $S \in D(\mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}(A))$ *ранга* 1*, совпадающее с внешним дифференциалом на нулевой компоненте* $d : A \to \mathrm{Csm}_1^{\mathfrak{M}}(A)$*, будем называть пульверизацией. Пульверизация, тем самым, задает систему операторов*

$$A \xrightarrow{\overset{(0)}{\delta}} \mathrm{Csm}_1^{\mathfrak{M}}(A) \xrightarrow{\overset{(1)}{\delta}} \mathrm{Csm}_2^{\mathfrak{M}}(A) \xrightarrow{\overset{(2)}{\delta}} \dots,$$

которые мы будем называть внутренними дифференциалами.

Любое градуированное дифференцирование X, коммутирующее с пульверизацией, в силу соотношения

$$X(a \cdot d(b)) = X_0(a)d(b) + a \cdot d(X_0(b)) \tag{2}$$

полностью определяется своей нулевой компонентой. Дифференцирование ранга 0, как следует из (2), совпадает со своим лифтом. Дифференцирование отрицательного ранга, коммутирующее с пульверизацией, является тождественно нулевым.

Всюду в дальнейшем мы будем считать модуль $D(A)$ свободным конечного ранга. Хотя это условие является сильным ограничением, но в случае алгебры гладких функций на гладком многообразии в категории геометрических модулей позволяет вычислить верхнюю границу размерностей алгебры Ли симметрий геодезического потока, что и является основной целью данного исследования.

Рассмотрим дифференцирование X ранга k алгебры косимволов. Его сужение на нулевую компоненту $X_0 : A \to \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$ является элементом модуля $D(A, \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A))$ дифференцирований алгебры A со значениниями в A-модуле $\mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$. В силу естественного изоморфизма

$$D(A, \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)) \cong D(A) \otimes_A \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A),$$

если выбрать в качестве базиса модуля дифференцирований некий набор $Y_0^i \in D(A)$, найдутся элементы $\lambda_i \in \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$, такие, что $X_0 = \lambda_i Y_0^i$. Рассмотрим дифференцирование $Z = X - \lambda_i \bar{Y}_0^i$, где черта означает лифт. Вычислим его значение на модуле $\Lambda^1_{\mathfrak{M}}(A)$:

$$Z(a \cdot d(b)) = (X_0(a)d(b) + aX_1(d(b))) - ((\lambda_i Y_0^i(a))d(b) + a(\lambda_i Y_0^i(a))d(b))$$
$$= a(X_1 - \lambda_i Y_0^i)(d(b)) = aZ(d(b)).$$

Таким образом,

$$Z \in \mathrm{Hom}_A(\Lambda^1_{\mathfrak{M}}(A), \mathrm{Csm}_{k+1}^{\mathfrak{M}}(A)) \cong D(A) \otimes_A \mathrm{Csm}_{k+1}^{\mathfrak{M}}(A).$$

Тем самым, каждое дифференцирование градуированной алгебры косимволов однозначно определяется двумя наборами величин из A-модулей $\mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$ и $\mathrm{Csm}_{k+1}^{\mathfrak{M}}(A)$. Симметрии ранга k, в свою очередь, определяются лишь набором элементов из $\mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$.

Обозначим символом $\mathfrak{Aff}(A) \subset D(A)$ пространство симметрий пульверизации ранга 0, а K-модуль всех симметрий пульверизации символом $\mathfrak{A}(A)$. Эти пространства являются алгебрами Ли, но не являются A-модулями. Однако симметрия остается таковой, если ее домножить на элемент $a \in \mathrm{Csm}^{\mathfrak{M}}(A)$, который обнуляется внутренним дифференциалом. Введем обозначение для ядер внутренних дифференциалов

$$\mathfrak{r}_k = \mathrm{Ker}\ \overset{(k)}{\delta}\ .$$

Сумма $\mathfrak{r} = \oplus_{k=0}\mathfrak{r}_k$ является подалгеброй алгебры косимволов. Элементы этой алгебры будем называть *эквивариантными*. Таким образом, K-модуль $\mathfrak{A}(A)$ является и $\mathfrak{r}$-модулем.

Определение 4. *Алгебру A с пульверизацией S будем называть плоской, если*

(a) $D(A) = \langle \mathfrak{Aff}(A) \rangle A$,

(b) *для некоторого базиса $\{Y_i\} \subset \mathfrak{Aff}(A)$ модуля $D(A)$ существует набор элементов $\{\alpha_j\} \subset A$, такой, что $Y^i(\alpha_j) = \delta^i_j$.*

Теорема 1. *Пространство симметрий плоской алгебры A порождается симметриями ранга 0 как модуль над алгеброй эквивариантных функций*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{Aff}(A).$$

Доказательство. Любая линейная комбинация симметрий ранга 0 с коэффициентами из r содержится в алгебре симметрий. Необходимо доказать обратное включение $\mathfrak{A} \subset \langle \mathfrak{Aff}(A) \rangle_{\mathfrak{r}}$. Так как $\mathfrak{r}_0$ содержит единицу алгебры, то $\mathfrak{Aff}(A) \subset \langle \mathfrak{Aff}(A) \rangle_{\mathfrak{r}}$. По установленному выше, любая симметрия X ранга k имеет вид $X = \lambda_i \bar{Y}^i$. Здесь $\lambda_i \in \mathrm{Csm}_k^{\mathfrak{M}}(A)$, $Y^i \in \mathfrak{Aff}(A)$ – базис из определения плоской алгебры. Запишем цепочку равенств

$$X(\delta(a)) = \delta X(a) = \delta(\lambda_i) Y^i(a) + \lambda_i \delta(Y^i(a)) = \delta(\lambda_i) Y^i(a) + X(\delta(a)).$$

Таким образом, для любого элемента $a \in A$ верно равенство

$$\delta(\lambda_i) Y^i(a) = 0.$$

Полагая последовательно $a = \alpha_i$, где $\{\alpha_i\}$ – множество из определения плоской алгебры, мы получим равенство $\delta(\lambda_i) = 0$, что завершает доказательство. $\square$

Замечание. Геометрический смысл доказанной теоремы состоит в том, что при достаточно широкой алгебре киллинговых полей все симметрии геодезической пульверизации порождены ими с помощью эквивариантных функций на касательном расслоении.

§3. Симметрии полиномиальных полей

Рассмотрим $\mathbb{R}$-алгебру многочленов $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ от n переменных. Ее алгебра косимволов изоморфна алгебре многочленов от двух групп переменных

$$\mathrm{Csm}(A) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n].$$

Пространства градуировки алгебры косимволов являются пространствами однородных функций по второй группе переменных фиксированной степени однородности k с коэффициентами из A. Универсальное дифференцирование $d : A \to \Lambda^1(A)$ является оператором

$$d = v_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Возьмем этот оператор, являющийся дифференцированием всей алгебры $\mathrm{Csm}(A)$, в качестве пульверизации. Пространство $\mathfrak{Aff}(A)$ представляет собой линейную оболочку полей вида $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\}$, $i, j = 1, \dots, n$, т.е. представляет собой алгебру Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n)$ группы Ли аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Множество $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ порождает пространство всех дифференцирований алгебры A. Для набора функций $\{x_i\}$ верно, что $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta^i_j$. Таким образом, алгебра многочленов с этим дифференцированием является плоской алгеброй. Остается вычислить пространство эквивариантных функций для оператора d.

Введем обозначение для многочленов специального вида

$$\overset{(i,j)}{\Delta} = \det \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. (*Лемма об эквивариантных многочленах*)

$$\mathrm{Ker}\, d = \mathbb{R}[\overset{(1,2)}{\Delta}, \overset{(1,3)}{\Delta}, \dots, \overset{(n-1,n)}{\Delta}, v_1, \dots, v_n],$$

где определители берутся по всем $i < j$.

Замечание. Переменные в лемме не являются независимыми, поэтому ядро оператора d не изоморфно пространству многочленов от $C_n^2 + n$ переменных.

Доказательство. Все многочлены указанного вида принадлежат ядру дифференциала. Необходимо доказать обратное включение. Доказательство проведем индукцией по степени однородности относительно второй группы переменных $\{v_i\}$. В качестве базы выступают два факта: 1) $\mathfrak{r}_0 = \mathbb{R}$ и 2) $\mathbb{R}[v_1, \dots, v_n] \subset \mathfrak{r}$. Рассмотрим произвольный многочлен степени однородности (k, s) относительно двух групп переменных, $k, s > 0$. Такой многочлен всегда можно записать в виде

$$F = f^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_s} x_{i_1} \dots x_{i_k} v_{j_1} \dots v_{j_s},$$

где коэффициенты многочлена симметричны по каждой группе индексов. Предположив, что он обнуляется оператором d, получим равенство

$$f^{i_1 \dots i_{k-1} b | j_1 \dots j_s} x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} v_b v_{j_1} \dots v_{j_s} = 0.$$

Приведем подобные члены в полученном многочлене. Для каждого двойного набора индексов $\{i_1 \dots i_{k-1}\}$, $\{b, j_1 \dots j_s\}$ возникает система соотношений

$$f^{i_1 \dots i_{k-1} b | j_1 \dots j_s} + f^{i_1 \dots i_{k-1} j_1 | j_2 \dots j_s b} + \dots + f^{i_1 \dots i_{k-1} j_s | j_1 \dots j_{s-1} b} = 0. \quad (3)$$

Первое слагаемое выразим через остальные и запишем группу слагаемых исходного многочлена, соответствующую этой паре групп индексов:

$$f^{i_1 \dots i_{k-1} j_1 | j_2 \dots j_s b} x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} v_{j_2} \dots v_{j_s} \overset{(b, j_1)}{\Delta} + \dots$$

$$f^{i_1 \dots i_{k-1} j_s | j_1 \dots j_{s-1} b} x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{s-1}} \overset{(b, j_s)}{\Delta}.$$

Обозначим другим символом еще один индекс, скажем $c = j_s$, и соберем во всех группах слагаемых, соответствующих всем возможным перестановкам индексов $\{i_1 \dots i_{k-1}, j_1 \dots j_{s-1}, b, c\}$, слагаемые со множителем $\overset{(b,c)}{\Delta}$. Учитывая при этом, что $\overset{(c,b)}{\Delta} = - \overset{(b,c)}{\Delta}$. Будем использовать с этого момента мультииндексы для записи. Итак, при определителе $\overset{(b,c)}{\Delta}$ оказывается сумма по всем возможным разбиениям $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $|\bar{\alpha}| = k - 1$,

$|\bar\beta| = s-1$, набора исходной группы индексов $\{i_1 \dots i_{k-1}, j_1 \dots j_{s-1}\}$, и имеет вид

$$\left(\sum_{\bar\alpha,\bar\beta}(f^{\bar\alpha b|\bar\beta c} - f^{\bar\alpha c|\bar\beta b})x_{\bar\alpha}v_{\bar\beta}\right)\overset{(b,c)}{\Delta}.$$

Покажем, что сомножитель при определителе, который имеет степень однородности меньшую на 1 по первой и второй группе переменных, обнуляется оператором δ. Это, после применения индукционного предположения, завершит доказательство.

Для фиксированной выборки $(\bar\alpha, \bar\beta)$ применение оператора дает $k-1$ слагаемое

$$(f^{\bar\alpha b|\bar\beta c} - f^{\bar\alpha c|\bar\beta b})v_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\dots x_{\alpha_{k-1}}v_{\bar\beta} + \dots,$$

с последовательной заменой x_{α_i} на v_{α_i}. Если $k=1$, эта сумма нулевая, поэтому далее считаем, что $k>1$. Сгруппируем первые слагаемые по всем выборкам, по которым производилось суммирование. Докажем, что эта сумма обращается в ноль. Аналогично это будет доказываться для всех остальных $k-2$ групп. Итак, полученная группа является однородной по двум группам переменных, степеней однородности $k-2$ и $s-1$. Зафиксируем некоторое разбиение группы исходного набора индексов $\{\mu_1, \dots, \mu_{k-2}\}$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$. Для такого разбиения при мономе $x_{\bar\mu}v_{\bar\gamma}$ возникает сумма коэффициентов

$$f^{b\bar\mu(\gamma_1|\gamma_2\dots\gamma_s)c} - f^{c\bar\mu(\gamma_1|\gamma_2\dots\gamma_s)b},$$

где (,)-скобки в индексах означают циклическую перестановку. Применяя формулу (3) к первой циклической сумме и второй, получаем окончательно

$$-f^{b\bar\mu c|\bar\gamma} - (-f^{c\bar\mu b|\bar\gamma}) = 0.$$

Нами доказано, что каждый многочлен из ядра представляет собой сумму произведений определителей на многочлены со степенью однородности ниже на единицу по каждой переменной, что завершает доказательство. Однако заметим, что продолжая процесс мы его заканчиваем в трех разных ситуациях:

$k > s$ В этом случае на последнем шаге мы должны получить однородный многочлен от первой группы переменных, лежащий в ядре. Но это только 0. Таким образом, многочленов с $k > s$ не существует.

$k = s$ На последнем шаге только константы. Тем самым многочлен является комбинацией произведений k штук определителей.

$k < s$ В этом случае мы упираемся на последнем шаге в многочлены по второй группе переменных, которые, напомним, лежат в ядре. □

Все готово для формулировки основного результата этого параграфа.

Теорема 2. *Алгебра полиномиальных симметрий векторного поля* $x_i \frac{\partial}{\partial v_i}$ *в* $\mathbb{R}^{2n}$ *имеет следующую структуру*

$$\mathfrak{A} \cong \langle \mathbb{R}[\overset{(1,2)}{\Delta}, \overset{(1,3)}{\Delta} \ldots, \overset{(n-1,n)}{\Delta}, v_1, \ldots, v_n] \rangle_{\mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n)}.$$

Исходя из этого результата можно сделать оценку размерности компонент градуировки алгебры $\mathfrak{A}$, которая определяется степенью однородности по v. Это будет оценка сверху, так как определители не являются независимыми. Существенно понизить оценку позволяет следующее замечание. Любое поле, полученное в виде произведения, содержащего определитель монома и трансляции $\frac{\partial}{\partial x_i}$, если этот определитель разложить, представляется комбинацией полей с коэффициентами, в которых количество определителей на единицу меньше и произведение взято с полем вида $x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{aff}(\mathbb{R}^n)$. Используя выражение C^k_{n+k-1} для размерности пространства однородных многочленов от n переменных степени однородности k, запишем окончательную оценку.

Теорема 3. *Верна оценка*

$$\dim \mathrm{Csm}_k(A) \leqslant n^2 C^k_{C^2_n+n+k-1} + nC^k_{n+k-1}. \tag{4}$$

Для случая плоскости $n = 2$ имеем

$$\dim \mathrm{Csm}_k(A) \leqslant 2(k+1)(k+3).$$

Эта оценка является точной, как было вычислено автором ранее в [7]. Там же было доказано, что для канонической связности в евклидовом пространстве

$$\mathfrak{A} \cong \mathrm{Ker}\, \delta^2 \times \mathbb{R}^n.$$

Это влечет, что размерность пространства симметрий кратна n и формулу (4) можно уточнить

$$\dim \mathrm{Csm}_k(A) = n^2 C^k_{C^2_n+n+k-1} + nC^k_{n+k-1} - \mu(n,k)n.$$

Например, прямые вычисления показывают, что $\mu(3,1) = 1$.

Как было показано автором там же, для любой пульверизации на любом гладком многообразии размерность градуировки алгебры полиномиальных симметрий не превосходит размерности для плоской алгебры. Тем самым оценка (4) остается верной в категории геометрических модулей на алгебре $C^\infty(M)$ для любой пульверизации.

§4. Заключительные замечания

В данном исследовании, видимо впервые, предпринято систематическое исследование симметрий градуированных дифференцирований алгебры косимволов дифференциальных операторов. При этом существует довольно обширная литература по исследованиям полиномиальных симметрий и полиномиальных интегралов на кокасательном расслоении гладких многообразий ([8–11]), и собственно на алгебре символов дифференциальных операторов ([12,13]), методами гамильтоновой механики. При естественных отождествлениях в случае алгебры полиномов, структуры обеих алгебр совмещаются, но обе теории симметрий (как отмечено в [14]) оказываются по существу различными, так как почти все аффинные симметрии пульверизации даже локально не “гамильтоновы”.

Требование на алгебру быть плоской довольно ограничительное, но, если продолжить рассмотрение кольца полиномов, то легко понять, что для всех пульверизаций вида

$$S = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a^i_{jk} v^j v^k \frac{\partial}{\partial v^i}$$

алгебра косимволов является плоской, но тензор кривизны возникающей симметричной ($a^i_{jk} = a^i_{kj}$) связности является нулевым лишь при дополнительном условии

$$a^i_{lk} a^l_{js} = a^i_{lk} a^l_{ks}.$$

Т.е. класс многообразий, для которых возможно применять полученные результаты, немного шире плоских многообразий.

Литература

1. А. М. Виноградов, *Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений.* — Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. **11**, ВИНИТИ, М., 1980, 89–134.
2. I. S. Krasil'shchik, *Calculus over Commutative Algebras: A Concise User Guide.* — Acta Applicandae Mathematicae **49** (1997), 235–248.

3. G. Vezzosi, A. M. Vinogradov, *On higher order analogues of de Rham cohomology.* — Differential Geom. Appl. **19**, No. 1 (2003), 29–59.
4. I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin, A. M. Vinogradov, *Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations.* v. 1, Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
5. I. S. Krasil'shchik, B. Prinari, *Lectures on Linear Differential Operators over Commutative Algebras.* — The Diffiety Inst. Preprint Series, DIPS 1/99.
6. А. М. Виноградов, В. С. Кальницкий, *Принцип наблюдаемости в примерах и задачах.* — Изд. Дом СПбГУ, 2012.
7. В. С. Кальницкий, *Алгебра обобщенных полей Якоби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1995), 222–243.
8. В. В. Козлов, Н. В. Денисова, *Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе.* — Матем. сб. **185**, No. 12 (1994), 49–64.
9. В. В. Козлов, *О группах симметрий динамических систем.* — ПММ **52**, No. 4 (1988), 531–541.
10. В. В. Козлов, *О группах симметрий геодезических потоков на замкнутых поверхностях.* — Матем. заметки **48**, No. 5 (1990), 62–67.
11. Н. В. Денисова, В. В. Козлов, *Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора.* — Матем. сб. **191**, No. 2 (2000), 43–63.
12. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, *Что такое гамильтонов формализм?* — УМН, **XXX**, вып. 1(181) (1975), 173–198.
13. Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые.* М.: МЦНМО, 2000.
14. В. В. Козлов, Н. В. Денисова, *Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы.* — Матем. сб. **184**, No. 9 (1993), 125–148.

Kalnitsky V. S. Symmetries of a flat cosymbol algebra of the differential operators.

In this paper the structure theorem is proved for graded symmetries of a flat cosymbol algebra. This theorem together with Equivariant Polynomials Lemma gives an upper bound on the grade dimensions of the Lie algebra of symmetries.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: st003739@spbu.ru

Поступило 2 декабря 2015 г.