Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VI. СЕРИЯ $SD(2\mathcal{B})_2$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ, ОТЛИЧНОЙ ОТ 2

§1. Введение

Работа посвящена вычислению групп когомологий Хохшильда для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_2$, представленной в известной классификации К. Эрдман [1], над основным алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. Таким образом, эта работа является прямым продолжением статей [2,3], в которых исследовались когомологии Хохшильда для алгебр этой серии над полем характеристики 2.

Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления. В этом вычислении мы используем подход работы [4], в которой была описана алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 (мы вновь используем обозначения из [1]). Указанный подход состоит в том, что сначала на основе некоторых эмпирических вычислений строится минимальная проективная бимодульная резольвента для рассматриваемых алгебр, а затем с использованием этой резольвенты вычисляются группы когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий.

Ранее этот подход был применен к некоторым другим сериям алгебр диэдрального типа (см. [5–9]). Аналогичным образом в [2,3,10–12] исследуются когомологии Хохшильда для некоторых серий алгебр полудиэдрального типа, а в [13–16] – для некоторых серий алгебр кватернионного типа. Кроме того, подход из [4] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [17]).

Имеются также результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [18–

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

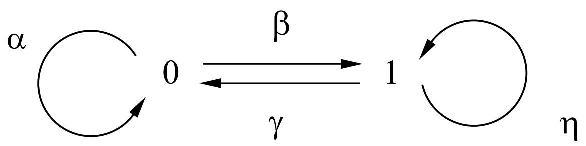
21]) и для самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n (см. [22–29]). Кроме того, подход из [4] был использован в [30, 31] при вычислении когомологий Хохшильда для целочисленных групповых колец диэдральных и полудиэдральных групп; см. также [32, 33].

Кратко опишем структуру работы. В разделе 2 приведены некоторые вспомогательные сведения, включая описание минимальной бимодульной резольвенты для рассматриваемых алгебр, которая была построена ранее в [2] (без ограничений на характеристику основного поля), а раздел 3 содержит вычисления соответствующих групп когомологий Хохшильда.

§2. Предварительные сведения

Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2(k, t, c)$, где $k \geqslant 2, t \geqslant 3$. Таким образом, алгебра R определяется следующим колчаном с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{array}{c} \eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1}, \ \ \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1}, \ \ \beta\gamma = \eta^{t-1}, \\ \alpha^2 = c(\alpha\gamma\beta)^k, \ \ \eta^2\beta = 0, \ \ \gamma\eta^2 = 0. \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Далее, если не оговорено иное, предполагается, что характеристика основного (алгебраически замкнутого) поля K отлична от 2. В этом случае можно ограничиться рассмотрением случая, когда $c = 0$.

Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j), \ i, j \in \{0, 1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^e$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^* \colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$a := \alpha\gamma\beta,\ b := \beta\alpha\gamma,\ g := \gamma\beta\alpha.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathcal{B}_{00} = \{a^{i+1},\ g^i,\ \gamma\beta a^i,\ \alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} = \{\beta a^i,\ \beta\alpha g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} = \{\gamma b^i,\ \alpha\gamma b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} = \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant t\} \cup \{b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}.
\end{gathered}$$

Мы сейчас опишем минимальную Λ-проективную резольвенту алгебр из серии $SD(2B)_2$, построенную в [2]. В категории (левых) Λ-модулей рассмотрим следующий комплекс $Q_\bullet$. Положим

$$\begin{aligned}
&Q_0 := P_{00} \oplus P_{11},\\
&Q_1 := Q_2 := \Lambda = P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11},\\
&Q_3 := P_{00}^2 \oplus P_{11}
\end{aligned}$$

и далее для $n \geqslant 4$ рекурсивно определяем

$$Q_n := P_{00}^2 \oplus Q_{n-4}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \mathrm{Hom}(Q_{i+1}, Q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \beta\otimes e_0 & -e_0\otimes\gamma & 0\\ 0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix}
\star & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^{k-1-i}\otimes g^i & -\sum\limits_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i}\otimes\gamma b^i & 0\\
0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^{k-1-i}\otimes\alpha g^i - \eta\otimes e_0 & -\sum\limits_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^{k-2-i}\otimes\alpha\gamma b^i & e_1\otimes\gamma\\
0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^{k-2-i}\otimes\beta\alpha g^i & e_0\otimes\eta - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha g^{k-1-i}\otimes b^i & \beta\otimes e_1\\
0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \sum\limits_{i=0}^{t-2} -\eta^i\otimes\eta^{t-2-i}
\end{pmatrix},$$

где

$$(d_1)_{11} = \alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha;$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 \\ 0 & -\alpha\gamma\otimes\varepsilon_0 - \gamma\otimes\alpha & e_1\otimes\gamma \\ 0 & -e_0\otimes\beta\alpha - \alpha\otimes\beta & \beta\otimes e_1 \\ 0 & 0 & \eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta \end{pmatrix};$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (d_3)_{23} &= \sum_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes\gamma\beta g^{k-1-i}, \\ (d_3)_{24} &= \sum_{i=0}^{k-1}\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i}, \\ (d_3)_{33} &= \sum_{i=0}^{k-1}\alpha\gamma b^i\otimes\beta a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i}, \\ (d_3)_{34} &= \sum_{i=0}^{t}\eta^i\otimes\eta^{t-i} + \sum_{i=1}^{k-1} b^i\otimes b^{k-i}; \end{aligned}$$

$$d_4 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star & \beta\otimes e_0 & -e_0\otimes\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \star \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} (d_4)_{23} &= \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}, \\ (d_4)_{26} &= \beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1}, \\ (d_4)_{33} &= \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha, \\ (d_4)_{46} &= \eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta; \end{aligned}$$

наконец, для $n \geqslant 5$ определим дифференциалы d_n рекурсивно с помощью следующих блочных матриц (соответствующих прямым разложениям $Q_i = P_{00}^2 \oplus Q_{i-4}$): для нечётных $n = 2m+1$ ($m \geqslant 2$) положим

$$d_{2m+1} = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & \multirow{2}{*}{$\mathrm{A}^{(2m+1)}$} \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-3} \end{array}\right), \tag{2.5}$$

а для чётных $n = 2m$ ($m \geqslant 3$) положим

$$d_{2m} = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & \multirow{2}{*}{$\mathrm{A}^{(2m)}$} \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-4} \end{array}\right); \tag{2.6}$$

при этом в матрицах (2.5) и (2.6) блоки $\mathrm{A}^{(2m+1)}$ и $\mathrm{A}^{(2m)}$ соответственно содержат единственный ненулевой элемент, а именно,

$$(d_{2m+1})_{23} = (d_{2m})_{23} = \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}.$$

Наконец, в качестве пополняющего отображения $\mu\colon Q_0 \to R$, мы берем каноническое отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r\otimes s) = rs$.

Замечание 2.1. Отметим, что при описании дифференциала d_3 мы исправили опечатку, содержащуюся в формуле для элемента $(d_3)_{34}$ в [2] (на дальнейших вычислениях в [2] эта опечатка не сказалась).

Теорема 2.2. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2(k,t,0)$, где $k,t \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $t \geqslant 3$. Тогда построенный выше комплекс $Q_\bullet$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Эта теорема вытекает из [2, теорема 2.1], где она доказана для произвольных значений $p := \operatorname{char} K$ и c. Отметим также, что мы упростили описание этой резольвенты по сравнению с [2], поскольку сейчас $c = 0$.

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что при $n \geqslant 4$ $X_n = P_{00}^2$ – это первые два прямых слагаемых в разложении Q_n из (2.3), а для $0 \leqslant n \leqslant 3$ $X_n = Q_n$.

Также в [2] получено следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*
$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{2.7}$$
расщепляющаяся в каждой степени.

§3. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = SD(2\mathcal{B})_2(k,t,0)$ – K-алгебра, определённая в разделе 2, при этом далее мы всюду предполагаем, что $\operatorname{char} K \neq 2$.

В этом разделе мы докажем следующий основной результат этой работы.

Теорема 3.1. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{B})_2(k,t,0)$, *где* $k,t \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $t \geqslant 3$, *и пусть* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда:*

(а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+t+2$;

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R)$
$$= \begin{cases} k+t+1, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t, \\ k+t & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(в) $$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+3, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t, \\ k+t+2, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t, \\ k+t+1, & \text{если } p \text{ не делит } k\cdot t; \end{cases}$$

(г) $$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+t+4, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t, \\ k+t+3, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t, \\ k+t+2, & \text{если } p \text{ не делит } k\cdot t. \end{cases}$$

Кроме того, если $n = 4m + r$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 4$, *то*
$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 2m.$$

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс
$$\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\big)_{n\geqslant 0}, \tag{3.1}$$
где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, описаннная в разделе 2.

Поскольку $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, то всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех P_{ij}, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i \otimes e_j) \in e_i R e_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)\colon\ \mathrm{Hom}(\Lambda, R) \simeq R \to \mathrm{Hom}(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

Предложение 3.2. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + t + 2$, $\dim \mathrm{Im}\, \delta^0 = 4k - 2$.

Доказательство. Утверждение о $\dim_K \mathrm{HH}^0(R)$ вытекает из [1, лемма IX.1.2], и тогда получаем

$$\dim \mathrm{Im}\, \delta^0 = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) - \dim_K \mathrm{Ker}\, \delta^0 = 4k - 2.$$

□

Дифференциал

$$\delta^1\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

после указанных выше отождествлений может быть описан следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$ имеем

$$\delta^1(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}
t_{00} &= \alpha \cdot r_{00} + r_{00} \cdot \alpha, \\
t_{10} &= \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^{k-1-i} \cdot r_{00} \cdot g^i + \sum_{i=0}^{k-1} b^{k-1-i} \cdot r_{10} \cdot \alpha g^i \\
&\quad - \eta \cdot r_{10} + \sum_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^{k-2-i} \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha g^i - r_{11} \cdot \beta, \\
t_{01} &= -\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} \cdot r_{00} \cdot \gamma b^i - \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^{k-2-i} \cdot r_{10} \cdot \alpha\gamma b^i
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^{k-1-i} \cdot r_{01} \cdot \beta^i + r_{01} \cdot \eta + \gamma \cdot r_{11},$$

$$t_{11} = r_{10} \cdot \gamma + \beta \cdot r_{01} - \sum_{i=0}^{t-2} \eta^i \cdot r_{11} \cdot \eta^{t-2-i}.$$

Предложение 3.3. (1) *Предположим, что p делит и k и t. Тогда пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.2}$$

$$\big(a^i + g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.3}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, b^i\big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{3.4}$$

$$\big(0, -\beta a^i, \gamma b^i, 0\big) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{3.5}$$

$$\big(2\alpha, -\beta a^{k-1}, \gamma b^{k-1}, 0\big), \ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{3.6}$$

$$\big(0, -\beta, \gamma, \eta^{t-2}\big), \ \big(0, -\beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^{t-1}\big). \tag{3.7}$$

(2) *Теперь предположим, что p не делит по крайней мере одно из чисел k и t. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо в множестве, указанном в части* (1), *элемент* $(0, -\beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^{t-1})$ *из* (3.7) *заменить на пару элементов*

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big), \ \big(0, -\beta\alpha g^{k-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0\big).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида (r_{00}, O_3) (соответственно вида $(0, r_{10}, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2, r_{01}, 0)$ или (O_3, r_{11})), где r_{ij} пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$ $(i, j \in \{0, 1\})$ стандартного базиса алгебры R (см. (2.2)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых выше случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. □

Следствие 3.4.

(а) $$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4k+1, & \textit{если } p \textit{ делит } k \textit{ и } t, \\ 4k+2 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(б) $$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+t-1, & \textit{если } p \textit{ делит } k \textit{ и } t, \\ 5k+t-2 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\text{(в)}\ \ \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+t+1, & \textit{если } p \textit{ делит } k \textit{ и } t, \\ k+t & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение (а) следует непосредственно из предложения 3.3, а тогда

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^1 = \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) - \dim_K \operatorname{Im} \delta^1$$

принимает указанные в п. (б) замечания. Наконец, утверждение (в) следует из (б) и предложения 3.2. □

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$

$$\delta^2(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{00} = &\alpha r_{00} - r_{00}\alpha, \\ t'_{00} = &\gamma\beta a^{k-1} r_{00} - r_{00}\gamma\beta a^{k-1} - \alpha\gamma r_{10} - \gamma r_{10}\alpha \\ &- r_{01}\beta\alpha - \alpha r_{01}\beta, \\ t_{11} = &r_{10}\gamma + \beta r_{01} + \eta r_{11} - r_{11}\eta. \end{aligned}$$

Предложение 3.5. *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned} &\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_2\big) \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\big(g^i - a^i, \mathrm{O}_2\big) \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\big(0, a^i + g^i, 0\big) \ \ \textit{для}\ \ 2 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\big(0, \alpha g^i, b^i\big) \ \ \textit{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\big(0, -a-g, \eta^{t-1}\big),\ \big(0, g^k, 0\big),\ \big(\mathrm{O}_2, b^k\big). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 3.3. □

Следствие 3.6.

(а) $\dim_K \operatorname{Im} \delta^2 = 4k - 2,$

(б) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^2 = 5k + t + 2,$

(в) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+t+1, & \textit{если } p \textit{ делит } k \textit{ и } t; \\ k+t & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$

Дифференциал

$$\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{00}, r'_{00} \in e_0Re_0$, $r_{11} \in e_1Re_1$

$$\delta^2(r_{00}, r'_{00}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t''_{00}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{00} =& \alpha r_{00} + r_{00}\alpha, \\ t'_{00} =& \gamma\beta a^{k-1} r_{00} + r_{00}\gamma\beta a^{k-1} - \alpha r'_{00} + r'_{00}\alpha, \\ t''_{00} =& \sum_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^i r'_{00} g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i r'_{00}\gamma\beta a^{k-1-i} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^i r_{11}\beta a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i r_{11}\beta\alpha g^{k-1-i}, \\ t_{11} =& \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i r'_{00}\gamma b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{t} \eta^i r_{11}\eta^{t-i} + \sum_{i=1}^{k-1} b^i r_{11} b^{k-i}. \end{aligned}$$

Теперь аналогично предыдущему описывается базис пространства $\operatorname{Im} \delta^3$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.7. (1) *Предположим, что p делит и k, и t. Тогда пространство* $\operatorname{Im} \delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\begin{aligned} &(\alpha g^i, \mathrm{O}_3) \ \ \textit{для} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(a^i + g^i, \mathrm{O}_3) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(0, \alpha g^i, \mathrm{O}_2) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(0, g^i - a^i, \mathrm{O}_2) \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &(a^k, \mathrm{O}_3), \ (\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, 0). \end{aligned}$$

(2) *Пусть теперь p делит k, но не делит t. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (1), *присоединить элемент* $\big(\mathrm{O}_3, \eta^t\big)$.

(3) *Пусть теперь p делит t, но не делит k. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (1), *присоединить элемент* $\big(\mathrm{O}_2, 2a^k, \eta^t\big)$.

(4) *Предположим, что p не делит ни k, ни t. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^3$ *надо к множеству, указанному в части* (2), *присоединить элемент* $\big(\mathrm{O}_2, a^k, 0\big)$.

Следствие 3.8.

$$(1)\ \dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} 4k-1, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t,\\ 4k, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t,\\ 4k+1, & \text{если } p \text{ не делит } k\cdot t;\end{cases}$$

$$(2)\ \dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 5k+t+1, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t,\\ 5k+t, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t,\\ 5k+t-1, & \text{если } p \text{ не делит } k\cdot t;\end{cases}$$

$$(3)\ \dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+3, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t,\\ k+t+2, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t,\\ k+t+1, & \text{если } p \text{ не делит } k\cdot t.\end{cases}$$

Доказательство. Утверждение о размерности группы $\mathrm{HH}^3(R)$ следует из соответствующего описания размерности $\operatorname{Ker}\delta^3$, а также из следствия 3.6. □

Аналогично предыдущему осуществляется описание ядра дифференциала

$$\delta^4\colon\ \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_5, R).$$

Используя вид дифференциала d_4 из бимодульной резольвенты, описанной в разделе 2 (см. (2.4)), легко приходим к описанию базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^4$.

Предложение 3.9. *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$(\alpha g^i, \mathrm{O}_5)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(a^i - g^i, \mathrm{O}_5)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(0, \alpha g^i, \mathrm{O}_4)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(0, a^i + g^i, \mathrm{O}_4)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, 0, -\gamma b^i, 0)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(\mathrm{O}_2, a^i - g^i, \mathrm{O}_3)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(\mathrm{O}_3, \beta a^i, -\gamma b^i, 0)$ *для* $1 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, 0)$ *для* $0 \leqslant i \leqslant k-1$;

$(0, -\alpha, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3)$, $(0, a^k, \mathrm{O}_4)$, $(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3)$, $(\mathrm{O}_3, \beta, -\gamma, 0)$.

Следствие 3.10.

(1) $\dim_K \operatorname{Im}\delta^4 = 8k-3$;

(2) $\dim_K \operatorname{Ker}\delta^4 = 5k+t+3$;

(3) $$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+t+4, & \text{если } p \text{ делит } k \text{ и } t, \\ k+t+3, & \text{если } p \text{ делит ровно одно из чисел } k \text{ и } t, \\ k+t+2, & \text{если } p \text{ не делит } k \cdot t. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 2.3. Из вида бимодульной резольвенты алгебры R, описанной в разделе 2, вытекает, что дифференциалы комплекса $X_\bullet$ описываются так: при $m \geqslant 2$

$$d_{2m}^{X_\bullet} = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha \end{pmatrix},$$

$$d_{2m+1}^{X_\bullet} = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} \\ 0 & -\alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha \end{pmatrix}.$$

Предложение 3.11. *При* $n \geqslant 4$ $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 4$; *при этом в качестве* K*-базиса пространства* $\mathrm{H}^{2m}(\mathcal{X}^\bullet)$ $(m \geqslant 2)$ *можно взять когомологические классы коциклов*

$$(e_0, 0),\ (\gamma\beta a^{k-1}, 0),\ (0, \alpha),\ (0, a^k), \tag{3.8}$$

а в качестве K-базиса пространства $\mathrm{H}^{2m+1}(\mathcal{X}^\bullet)$ $(m \geqslant 2)$ *можно взять когомологические классы коциклов*

$$\big(\alpha,0\big),\ \big(a^k,0\big),\ \big(0,e_0\big),\ \big(0,\gamma\beta a^{k-1}\big). \tag{3.9}$$

Доказательство. Прямыми вычислениями устанавливается, что при $m \geqslant 2$ в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов

$$\big(\alpha g^i,0\big)\ \text{ для }\ 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.10}$$

$$\big(a^i+g^i,0\big)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.11}$$

$$\big(0,\alpha g^i\big)\ \text{ для }\ 0\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.12}$$

$$\big(0,a^i-g^i\big)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{3.13}$$

$$(e_0,0),\ \big(\gamma\beta a^{k-1},0\big),\ \big(a^k,0\big),\ \big(0,a^k\big). \tag{3.14}$$

При этом, как легко заметить, в качестве базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$ можно взять множество, состоящее из элементов, которые получаются из элементов, указанных в (3.10)–(3.14), перестановкой их компонент.

Кроме того, в качестве базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$ (при $m\geqslant 2$) можно взять множество, состоящее из элементов, указанных в (3.10), (3.11), (3.13), а также из элементов

$$\big(\alpha g^i,0\big)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1\quad\text{и}\quad \big(a^k,0\big);$$

при этом для пространства $\operatorname{Im}\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(m \geqslant 2)$ в качестве базиса можно взять множество, состоящее из элементов, которые получаются из элементов, указанных выше, с помощью перестановки компонент. Отсюда следует описание когомологий комплекса $\mathcal{X}^\bullet$ (для степеней $n\geqslant 4$). □

Предложение 3.12. *Для любого* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) + 2.$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (2.7) после применения функтора $\operatorname{Hom}_\Lambda(\,-\,,R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0\to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4],R)\xrightarrow{\pi^*}\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet,R)\xrightarrow{\imath^*}\mathcal{X}^\bullet\to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots . \tag{3.15}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n - \dim_K \operatorname{Im} \Delta^{n-1}. \tag{3.16}$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (3.15).

Лемма 3.13. *Для* $n \geqslant 4$

$$\dim_K \operatorname{Ker} \Delta^n = 3,$$
$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 1.$$

Доказательство. Напомним, что связывающий гомоморфизм Δ^n строится следующим образом. Пусть $u \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$, и пусть

$$\widetilde{u} := (\mathrm{O}, u) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) \tag{3.17}$$

– доопределение u нулём на всё $Q_n = X_n \oplus Q_{n-4}$. Так как $\imath^*(\widetilde{u}) = u$, то существует $v \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ такой, что $\pi^*(v) = \delta^n(\widetilde{u})$, при этом v – коцикл, и тогда полагают $\Delta(\mathrm{cl}\, u) := \mathrm{cl}\, v$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle \delta^{n-4}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^n} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) & \xrightarrow{\imath^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

а) Предположим, что $n = 2m$ чётно ($n \geqslant 4$), и пусть $u \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$. Ввиду предложения 3.11 можем считать, что u – один из элементов, приведённых в (3.8). Пусть $\widetilde{u} := \big(u, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2m}, R)$ (и тогда $\imath^*(\widetilde{u}) = u$). Из вида матрицы дифференциала d^Q_{2m} сразу получаем, что для $u \in \{(e_0, 0), (\gamma\beta a^{k-1}, 0), (0, a^k)\}$ имеем $\delta^{2m}(\widetilde{u}) = 0$, и таким образом, $\Delta^{2m}(\mathrm{cl}\, u) = 0$ для указанных трёх значений u.

Пусть $u = (\alpha, 0)$. Тогда

$$\delta^{2m}(\widetilde{u}) = \big(\, \mathrm{O}_2, 2a^k, \mathrm{O}\,\big).$$

Таким образом, $\delta^{2m}(\widetilde{u}) = \pi^*\big(2a^k, \mathrm{O}\,\big)$, при этом ясно, что $(2m-3)$-коцикл $\big(2a^k, \mathrm{O}\,\big)$ из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$ не лежит в $\mathrm{Im}\,\delta^{2m-4}$. Следовательно, $\Delta^{2m}(\mathrm{cl}\,u) \neq 0$ для $u = (\alpha, 0)$.

б) Если же $n = 2m+1$ нечётно $(n > 4)$, то аналогично предыдущему получаем, что для u, принадлежащего множеству элементов из (3.9), $\Delta^{2m}(\mathrm{cl}\,u) \neq 0$ только для $u = (0, e_0)$. □

Из леммы 3.13 следует, что при $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n - \dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^{n-1} = 2,$$

и это, с учётом формулы (3.16), завершает доказательство предложения 3.12.

Таким образом, теорема 3.1 полностью доказана. □

Литература

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ при $c = 0$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 45–92.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 28–38.
7. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 67–104.
8. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* V. *Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 74–102.
9. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$.* — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 89–116.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21**, вып. 2 (2009), 1–51.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.

12. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 5–32.
13. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 1 (2006), 55–107.
14. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II.*Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
15. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
16. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
17. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 4 (2006), 39–82.
18. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class* A_n, II. — Algebras and Repr.Theory **5** (2002), 457–482.
19. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
20. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
21. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 210–246.
22. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
23. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
24. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
25. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
26. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 99–139.
27. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
28. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
29. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. VI. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 33–56.

30. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, вып. 5 (2007), 70–123.
31. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 119–151.
32. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups*, — Tsukuba J. Math. **31** (2007), 99–127.
33. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the semidihedral* 2*-groups.* — Algebra Colloq. **18**, No. 2 (2011), 241–258.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. VI. The family $SD(2\mathcal{B})_2$ in characteristic different from 2.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of semidihedral type contained in the family $SD(2\mathcal{B})_2$ (of the famous K. Erdmann's classification) over an algebraically closed field of characteristic $\neq 2$. In the calculation, we use the minimal projective bimodule resolution for algebras from the above family constructed in the previous paper by the author.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 8 декабря 2015 г.