Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

С. В. Востоков, В. В. Волков

ЯВНАЯ ФОРМА СИМВОЛА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ МНОГОЧЛЕННЫХ ФОРМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ЛОКАЛЬНОМ ПОЛЕ II

§1. Введение

Эта работа является прямым продолжением работы [1]. Сначала напомним её основные обозначения и результаты:

- $p \geqslant 3$ – простое число;
- ζ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1;
- K – n-мерное локальное поле, содержащее ζ, характеристика которого, отлична от характеристики его поля вычетов. Оно является конечным расширением поля $k\{\{t_1\}\}\{\{t_2\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}$, где k – конечное расширение $\mathbb{Q}_p$. Его кольцо целых относительно n-мерного нормирования обозначим $\mathcal{O}_K$.
- $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)} = K$ – поля вычетов многомерного поля K;
- c – единица локального поля K;
- T – подполе инерции в K ([8], Введение, 5°), с кольцом целых $\mathcal{O}_T$;
- $t_1, \dots t_{n-1}, \pi$ – локальные униформизующие поля K.
- $t_1, \dots t_{n-1}, t_n$ – формальные переменные им соответствующие. Мы будем пользоваться одинаковыми обозначениями для t_i в роли элементов K и в роли формальных переменных, которыми расширено базовое кольцо $\mathcal{O}_T$. Различие между этими случаями будет ясно как из контекста, так и из вида верхнего элемента (π или t_n). Отметим, что в поле K элементы $t_1, \dots, t_{n-1}$ являются независимыми переменными над $\mathcal{O}_T$, поэтому дополнительное переобозначение не особенно требуется.
- $\triangle$ – автоморфизм Фробениуса в $T/\mathbb{Q}_p$;
- tr – оператор следа в $T/\mathbb{Q}_p$;
- $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал $\mathcal{O}_K$;

Ключевые слова: формальные группы, символ Гильберта, многомерное локальное поле, K-группа Милнора.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00393-а.

- $\mathfrak{R}$ – мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля вычетов $K^{(0)}$ в кольце $\mathcal{O}_T$;
- $\widetilde{T}$ – пополнение максимального неразветвленного над T p-расширения;
- $F_c = X + Y + cXY$ – многочленная формальная группа;
- $F_c(\mathfrak{M})$ – формальный $\mathbb{Z}_p$-модуль на $\mathfrak{M}$, заданный формальной группой F_c;
- λ_c – логарифм формальной группы F_c,
- ξ – образующая ядра $[p^m]_c(X)$;
- d_i – оператор дифференцирования по t_i.
- ℓ_c, E_c – аналоги отображений Артина–Хассе для формального модуля $F_c(\mathfrak{M})$.
- $\mathcal{H}_\mathrm{m} = \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}((t_n))^*$ – формальная мультипликативная группа.
- $\mathcal{H}_\mathrm{c} = \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}[[t_n]]_1$ (т. е. ряды лексикографической степени не ниже $(1, 0, \dots, 0)$) – формальный модуль с действием группы F_c [аналог $F_c(\mathfrak{M})$].
- $\underline{c}$, $\underline{\zeta}$, $\underline{\xi}$ – фиксированные ряды из $\mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}[[t_n]]$ такие, что $\underline{c}\big|_{\dots,t_n=\pi} = c$, $\underline{\zeta}\big|_{\dots,t_n=\pi} = \zeta$, $\underline{\xi}\big|_{\dots,t_n=\pi} = \xi$.
- $s_c = [p^m]_c(\xi) = \underline{c}^{-1}s$, $s_{n-1,c} = [p^{n-1}]_c(\xi) = \underline{c}^{-1}s_{n-1}$, $u_c = s_c/s_{n-1,c} = s/s_{n-1} = u$ – вспомогательные ряды, где s, s_{n-1}, u определены так же, как в [8], Введение, 5°.
- $(\cdot,\cdot)_c$ – стандартное спаривание Гильберта на $K_n(K) \times F_c(\mathfrak{M})$.

В [1] были также введены вспомогательные функции:

$$\begin{aligned}
&\delta_i(\gamma) = \gamma^{-1}\mathrm{d}_i\gamma,\\
&\eta_i(\gamma) = t_i^{-1}(t_i\delta_i(\gamma)) = \delta_i(\gamma) - \mathrm{d}_i\ell(\gamma).
\end{aligned}$$

Обозначим также через $\mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]_0$ подкольцо соответствующего кольца, состоящее из рядов лексикографической степени не меньше $(0, \dots, 0)$. Подстановку в ряд $\beta(t_1, \dots, t_n)$ локальной системы образующих мы будем обозначать либо через $\beta(t_1, \dots, \pi)$, либо через $\beta|_{\dots,t_n=\pi}$. Все стандартные элементарные свойства введенных выше объектов приведены в работе [1], повторять их здесь мы не будем.

В этой же работе было построено спаривание:

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_c : K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}) \times \mathcal{H}_{\mathfrak{c}} &\to \mathcal{O}_T/p^m, \\ \alpha,\beta &\mapsto \operatorname{res}_X \Phi(\alpha,\beta)\,/s_c \mod p^m. \end{aligned}$$

Для ряда $\Phi(\alpha,\beta)$ было дано два эквивалентных определения, нам здесь понадобится лишь одно:

$$\Phi(\alpha,\beta) = \ell_c(\beta)D_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i+1}\ell(\alpha_i)D_i, \tag{1}$$

где $\alpha = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ и

$$D_i = \det\begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \dots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_1(\alpha_n) & \dots & \eta_n(\alpha_n) \\ \underline{c}^{-1}\mathrm{d}_1\frac{\triangle}{p}\underline{c}\lambda_c(\beta) & \dots & \underline{c}^{-1}\mathrm{d}_n\frac{\triangle}{p}\underline{c}\lambda_c(\beta) \end{vmatrix}.$$

Основными свойствами этого спаривания, проверенными в [1], являются:

- ***Аддитивность***

$$\begin{aligned} \langle\alpha_1\cdot\alpha_2,\beta\rangle_c &= \langle\alpha_1,\beta\rangle_c + \langle\alpha_2,\beta\rangle_c; \\ \langle\alpha,\beta_1 +_{F_c} \beta_2\rangle_c &= \langle\alpha,\beta_1\rangle_c + \langle\alpha,\beta_2\rangle_c; \\ \langle\alpha,[a]_c\beta\rangle_c &= a\,\langle\alpha,\beta\rangle_c\,, a\in\mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

- ***Символьное свойство***

$$\left\langle\{\dots,\alpha,\dots\},\underline{c}^{p^m-1}\alpha\right\rangle_c = 0.$$

Кроме того в силу свойств $K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})$ имеют место следующие утверждения:

- ***Соотношение Стейнберга***

$$\langle\{\dots,\alpha,\dots,1-\alpha,\dots\},\beta\rangle_c = 0;$$

- ***Кососимметричность***

$$\langle\{\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_k,\dots\},\beta\rangle_c = -\langle\{\dots,\alpha_k,\dots,\alpha_i,\dots\},\beta\rangle_c\,.$$

Введем также сразу спаривание:

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_c : K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}) \times \mathcal{H}_{\mathfrak{c}} \to \mathbb{Z}_p/p^m,$$
$$\alpha, \beta \mapsto \operatorname{tr}\, \langle\alpha,\beta\rangle_c\,.$$

В конечном счёте именно оно нам понадобится для построения спаривания на $K_n(K) \times F_c(\mathfrak{M})$, но некоторые свойства могут быть получены и без перехода к следу, поэтому они будут проделаны напрямую для спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$.

Мы также будем пользоваться тем фактом, что $K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})^{p^m}$ лежит в ядре спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ (в частности символы $\{\dots,\alpha^{p^m},\dots\}$ лежат в этом ядре).

Нам также понадобится удобная порождающая система в $K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})/K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})^{p^m}$. Аналогично [2], раздел 2, предложению 1 (пользуясь структурой $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \,/\, {\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}}^{p^m}$, по аналогии с [8], §1, 2°) можно получить следующее утверждение.

Предложение 1. *Элемент*

(1) $\{t_1,\dots,t_n\}$, *а также элементы вида*

(2) $\{t_1,\dots,t_{i-1},\varepsilon,t_{i+1}\dots,t_n\}$, *где* $\varepsilon \in \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]_0^*$,

образуют порождающую систему в $K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})/K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})^{p^m}$.

§2. Примарные элементы

Метод, предложенный в одномерном случае [12], мы сейчас перенесем на многомерное поле.

Как и в работах [3, 12], мы построим два типа p^m-примарных элементов. Напомним, что элемент $\omega \in K^*$ называется p^m-примарным относительно формальной группы F, если расширение $K(\frac{1}{[p^m]_F}\omega)/K$ неразветвлено.

Примарные элементы типа Хассе задаются с помощью следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $a \in \mathcal{O}_T$ *и* $A \in \mathcal{O}_{\widetilde{T}}$ *такие элементы, что* $A^{\triangle} - A = a$. *Тогда элемент* $H_c(a) = E_c(p^m A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi}))\big|_{t_n=\pi}$ *является* p^m*-примарным относительно формальной группы* F_c. *Более того,*

$$(\{t_1,t_2,\dots,t_{n-1},\pi\}, H_c(a))_c = [\operatorname{tr} a]_c\xi.$$

Доказательство. Пусть $\delta = \triangle^f \in \mathrm{Gal}(\widetilde{T}/T)$ – автоморфизм Фробениуса в расширении $\widetilde{T}/T$, где f – абсолютная степень инерции поля K. Тогда $A^{\triangle\delta} = A^{\triangle} + \mathrm{tr}\, a$. Далее из линейности функции E_c получаем:

$$E_c(A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi}))^{\delta} -_{F_c} E_c(A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi})) = E_c((A^{\triangle\delta} - A^{\triangle})\ell_c(\underline{\xi})) = E_c(\mathrm{tr}\, a \cdot \ell_c(\underline{\xi})) = [\mathrm{tr}\, a]_c \cdot \underline{\xi}.$$

Отсюда следует, что

$$H_c(a)^{\delta} -_{F_c} H_c(a) = E_c(p^m A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi})\big|_{t_n=\pi})^{\delta} -_{F_c} E_c(p^m A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi})\big|_{t_n=\pi}) = [tr_a \cdot p^m]\, \underline{\xi}\big|_{t_n=\pi} = 1,$$

значит $H_c(a) \in K$ (так как $\mathrm{Gal}(\widetilde{T}/T) = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ и полем стабилизации δ является поле K).

Кроме того, элемент $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \pi\}$ соответствует при автоморфизме Като некоторому продолжению автоморфизма Фробениуса δ в $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ (см. [13, теорема 2 (4)]), при этом:

$$\frac{1}{[p^m]_{F_c}} H_c(a)^{\delta} -_{F_c} \frac{1}{[p^m]_{F_c}} H_c(a) = E_c(A^{\triangle}\ell(\underline{\xi}))\Big|_{t_n=\pi}^{\delta} -_{F_c} E_c(A^{\triangle}\ell(\underline{\xi}))\Big|_{t_n=\pi} = [\mathrm{tr}\, a]_c \xi,$$

поэтому $(\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \pi\}, H_c(a))_c = [\mathrm{tr}\, a]_c \xi$. □

Следующая лемма позволяет записать этот примарный элемент в другом виде.

Лемма 2. *Пусть $a \in \mathcal{O}_T^*$, тогда элемент*

$$\upsilon_c(a) = E_c(p^m a \underline{c}^{-1} \log_c(\underline{\xi})))\big|_{t_n=\pi}$$

является p^m-примарным относительно группы F_c. Более того,

$$(\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \upsilon_c(a))_c = [\mathrm{tr}\, a]_c \xi.$$

Доказательство. Пусть $\log_c(X) = \log(1 + \underline{c}X)$.

Заметим, что

$$\underline{c}^{-1}\left(1 - \frac{\triangle}{p}\right)(A \log_c \underline{\xi}) = \underline{c}^{-1}\left(A \log_c \underline{\xi} - A^{\triangle}\frac{\triangle}{p}\log_c \underline{\xi}\right) = A\underline{c}^{-1}\log_c \underline{\xi} - A^{\triangle}\underline{c}^{-1}\log_c \underline{\xi} + A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi}) = A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi}) - a\underline{c}^{-1}\log_c \underline{\xi}. \quad (2)$$

Кроме того, из определения функции E_c получаем:

$$E_c\left(p^m \underline{c}^{-1}\left(1 - \frac{\triangle}{p}\right)(A \log_c \underline{\xi})\right) = \underline{c}^{-1}(\exp p^m A \log_c \underline{\xi} - 1). \quad (3)$$

Комбинируя соотношения 2 и 3 получаем:

$$E_c(p^m a\underline{c}^{-1}\log_c(\underline{\xi}))) = E_c(p^m A^{\triangle}\ell_c(\underline{\xi})) -_{F_c} \underline{c}^{-1}(\exp p^m A \log_c \underline{\xi} - 1).$$

Учитывая, что $(\exp p^m A \log_c \underline{\xi} - 1)\big|_{t_n=\pi} = 0$, получаем утверждение леммы. □

Следующая лемма вводит второй тип примарных элементов.

Лемма 3. *Пусть* $a \in \mathcal{O}_T^*$, *тогда элемент* $\omega_c(a) = E_c(as_c(t_n))|_{t_n=\pi}$ *является* p^m*-примарным относительно группы* F_c. *Более того,*

$$(\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \pi\}, \omega_c(a))_c = [\mathrm{tr}\, a]_c \xi.$$

Доказательство. Используя равенство $p^m \log_c(\underline{\xi}) = \log_c(s_c) = \log(1+s)$ и разложение логарифма в ряд, получаем, что:

$$E_c(p^m a\underline{c}^{-1}\log_c(\underline{\xi}))) = E_c(as_c) +_{F_c} \sum_{\substack{F_c\\ m=2}}^{\infty} E_c\left((-1)^{m-1}\underline{c}^{-1}\frac{(as)^m}{m}\right). \quad (4)$$

Далее рассуждение, аналогичное рассуждению из [12, предложение 6], приводит к требуемому результату. □

§3. Базис Гензеля формального модуля

Воспользуемся обозначениями и результатом работы [8, §1, 3°]. Из результата о порождающих элементах мультипликативной группы немедленно вытекает следующая лемма.

Лемма 4. *Элементы* $\varepsilon_{\theta,i} = -\theta c^{p^m-1} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n}$, *где* $\theta \in \mathfrak{R}$,

$$\mathrm{LCM}(i_1, \ldots, i_n, p) = 1, \quad 0 \leqslant i_n \leqslant pe_n'$$

и последний отличный от нуля индекс i_r *перед* i_n *должен быть положителен, если* $i_n = 0$, *и меньше* pe_r' *если* $i_n = pe_n'$, *вместе с элементом* $\omega_c(a)$, *где* $a \in \mathcal{O}_T$, $\mathrm{tr}\, a \equiv 1 \mod p^m$ *дают систему образующих формального модуля* $F_c(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Достаточно применить замену $x \to 1 + cx$ и заменить формальное сложение умножением, чтобы свести эту лемму к задаче о нахождении системы образующих в группе главных единиц, решенной в работе [8]. □

Лемма 5. *Для описанных выше элементов справедливо следующее*:

$$(\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \varepsilon_{\theta,i})_c = 0, \quad (\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \omega_c(a))_c = [\operatorname{tr} a]_c \xi. \tag{5}$$

Доказательство. Вторая часть утверждения уже доказана выше.

Первая же аналогична фундаментальному свойству классического мультипликативного спаривания Гильберта. А именно, заметим, что для спаривания Гильберта также выполнено символьное свойство:

$$(\{\dots, \alpha, \dots\}, c^{p^m-1}\alpha)_c = 0. \tag{6}$$

Действительно, рассмотрим $L = K(B)$, где B – решение уравнения $[p^m]_c(B) = c^{p^m-1}\alpha$. Здесь

$$[p^m]_c(X) = c^{-1}((1+cX)^{p^m} - 1) = d_1 X + d_2 X^2 + \dots + d_{p^m-1} X^{p^m-1} + c^{p^m-1} X^{p^m},$$

где $d_i \in \mathcal{O}_K$. Поэтому B будет решением уравнения

$$X^{p^m} + c^{1-p^m} d_{p^m-1} + \dots + p^m c^{1-p^m} X - \alpha = 0,$$

а α, таким образом, будет нормой в расширении L/K. Из этого следует, что символ $\{\dots, \alpha, \dots\}$ [так как остальные его элементы тоже принадлежат нижнему полю K] будет образом при отображении нормы $N_{L/K} : K_n(L) \to K_n(K)$. А значит, соответствующий автоморфизм $\sigma_{\{\dots,\alpha,\dots\}}$ действует тривиально на поле L, откуда получаем символьное свойство.

Определение и необходимые здесь базовые свойства норменного отображения групп Милнора описаны в [5, глава IX, §3].

Теперь пусть $\varepsilon_{\theta,i} = -\theta c^{p^m-1} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n}$ и пусть, скажем, i_j не кратен p. Тогда

$$\begin{aligned}(\{t_1, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \varepsilon_{\theta,i})_c^{i_j} &= (\{t_1, \dots, t_j^{i_j}, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \varepsilon_{\theta,i})_c = \\ &= (\{t_1, \dots, -\theta t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n}, \dots, t_{n-1}, \pi\}, \varepsilon_{\theta,i})_c = 0.\end{aligned}$$

Последний переход верен в силу символьного свойства, остальные следуют из аддитивности символа Гильберта и кососимметричности в группе Милнора. □

Получим теперь аналогичное тождество для формального спаривания. Аналог первого тождества будет следовать немедленно из символьного, которое уже доказано. Аналог второго даст нам следующая лемма.

Лемма 6. *Для произвольных элементов* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in K_n(\mathcal{H}_\mathfrak{m})$ *и* $a \in \mathcal{O}_T$ *имеет место следующее тождество*:

$$\langle\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, E_c(as_c)\rangle_c = (\deg \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n) \cdot a. \tag{7}$$

Доказательство. Разберем сначала простейшие случаи.

1. Пусть $\alpha = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle\{t_1, \ldots, t_n\}, E_c(as_c)\rangle_c &= \operatorname{res}_X(\ell_c(E_c(as_c))D_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i+1}\ell(t_i)D_i)/s_c \\ &= \operatorname{res}_X aD_{n+1} = \operatorname{res}_X a \cdot t_1^{-1} \ldots t_n^{-1} = a.\end{aligned}$$

2. Пусть $\alpha = \{t_1, \ldots, \varepsilon, \ldots, t_n\}$, где $\varepsilon \in \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]_0^*$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle\{t_1, \ldots, \varepsilon, \ldots, t_n\}, E_c(as_c)\rangle_c &= \operatorname{res}_X(\ell_c(E_c(as_c))D_{n+1} \\ &\quad + \sum_{j\neq i}^{n}(-1)^{n-j+1}\ell(t_j)D_j + (-1)^{n-i+1}\ell(\varepsilon)D_i)/s_c \\ &= \operatorname{res}_X aD_{n+1} - (-1)^{n-i}\ell(\varepsilon)D_i/s_c.\end{aligned}$$

Заметим, что $D_{n+1} = t_1^{-1} \ldots \varepsilon^{-1} \mathrm{d}_i\varepsilon \ldots t_n^{-1}$ и так, как ε имеет целые коэффициенты, то вычет $\operatorname{res}_X aD_{n+1}$ равен нулю. Вычисляя оставшийся определитель получаем:

$$D_i = t_1^{-1} \ldots \underline{c}^{-1} \mathrm{d}_i \frac{\triangle}{p} \underline{c}\lambda_c(E_c(as_c)) \ldots t_n^{-1}.$$

Далее, полностью повторяя рассуждение для одномерного случая (см. [12, доказательство предложения 8]), получаем, что

$$\mathrm{d}_i \frac{\triangle}{p} \underline{c}\lambda_c(E_c(as_c))/s \equiv 0 \mod p^m,$$

и заключаем требуемое:

$$\langle\{t_1, \ldots, \varepsilon, \ldots, t_n\}, E_c(as_c)\rangle_c = 0.$$

3. Обе части тождества (7) мультипликативны по α, поэтому утверждение леммы теперь следует из предложения 1. □

§4. Однозначность по второму аргументу

Лемма 7. *Пусть* $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ *— ряды такие, что* $\beta_1(t_1, t_2, \dots, \pi) = \beta_2(t_1, t_2, \dots, \pi)$, *тогда при любых* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$*:*

$$\langle\langle\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \beta_1\rangle\rangle_c = \langle\langle\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \beta_2\rangle\rangle_c\,. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично работе [8] замечаем, что $\beta_1 -_{F_c} \beta_2 = u_c \cdot \psi$ для некоторого ряда $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$. Далее повторяя рассуждения из работы [12] (см. раздел 5), получаем сравнения:

$$-\mathrm{res}_X(\ell(\alpha_i)\mathrm{d}_j \frac{\triangle}{p}\log(1+\underline{c}u\psi))/s \equiv \mathrm{res}_X \mathrm{d}_j \ell(\alpha_i)\left(\frac{\triangle}{p}\log(1+\underline{c}u\psi)\right)/s \mod p^m, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\triangle}{p}\log(1+\underline{c}u\psi)\right)/s \equiv \triangle(\log(1+\underline{c}u\psi)/s) \mod (p^m, \deg 0). \tag{10}$$

Вспомним теперь второе выражение для спаривания $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_c$:

$$\langle \alpha, u\psi\rangle_c = \mathrm{res}_X \Phi(\alpha, u\psi)/s_c = \mathrm{res}_X(\ell_c(u\psi)D_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i+1}\ell(\alpha_i)D_i)/s_c. \tag{11}$$

Рассмотрим слагаемое $\mathrm{res}_X((-1)^{n-i+1}\ell(\alpha_i)D_i/s_c)$. Деля последнюю строку D_i на s_c, применяя к разложению по этой строке соотношения (9) и собирая определитель назад, получим:

$$\mathrm{res}_X((-1)^{n-i+1}\ell(\alpha_i)D_i/s_c) = \mathrm{res}_X\left(\frac{\triangle}{p}\log(1+\underline{c}u\psi)\right)/s \cdot \widehat{D}_i, \text{ где}$$

$$\widehat{D}_i = \det \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \mathrm{d}_1(\ell(\alpha_i)) & \dots & \mathrm{d}_n(\ell(\alpha_n)) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \dots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_1(\alpha_n) & \dots & \eta_n(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \delta_1(\alpha_i) - \eta_1(\alpha_i) & \dots & \delta_n(\alpha_i) - \eta_n(\alpha_i) \\ \eta_1(\alpha_{i+1}) & \dots & \eta_n(\alpha_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_1(\alpha_n) & \dots & \eta_n(\alpha_n) \end{vmatrix} = \widetilde{D}_{i+1} - \widetilde{D}_i,$$

$$\widetilde{D}_i = \det \begin{vmatrix} \delta_1(\alpha_1) & \dots & \delta_n(\alpha_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1(\alpha_{i-1}) & \dots & \delta_n(\alpha_{i-1}) \\ \eta_1(\alpha_i) & \dots & \eta_n(\alpha_i) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_1(\alpha_n) & \dots & \eta_n(\alpha_n) \end{vmatrix}.$$

Теперь сворачивая сумму в (11), получаем:

$$\langle \alpha, u\psi \rangle_c = \mathrm{res}_X \left(\ell(1 + \underline{c}u\psi)D_{n+1} + \frac{\triangle}{p} \log(1 + \underline{c}u\psi)(\widetilde{D}_{n+1} - \widetilde{D}_1) \right) / s.$$

Воспользуемся теперь определением ℓ и заметим, что $D_{n+1} = \widetilde{D}_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, u\psi \rangle_c &= \mathrm{res}_X \left(\left(1 - \frac{\triangle}{p}\right) \log(1 + \underline{c}u\psi)D_{n+1} + \frac{\triangle}{p} \log(1 + \underline{c}u\psi)(\widetilde{D}_{n+1} - \widetilde{D}_1) \right) / s \\ &= \mathrm{res}_X \left(\log(1 + \underline{c}u\psi)D_{n+1} - \frac{\triangle}{p} \log(1 + \underline{c}u\psi)\widetilde{D}_1) \right) / s. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \widetilde{D_1} &= \det(\eta_j(\alpha_i))_{ij} = \det(t_j^{-1} \triangle (t_j \alpha_i^{-1} \mathrm{d}_j(\alpha_i)))_{ij} \\ &= t_1^{-1} \dots t_n^{-1} \triangle \det(t_j \delta_j(\alpha_i))_{ij} = t_1^{-1} \dots t_n^{-1} \cdot \triangle(t_1 \dots t_n D_{n+1}). \quad (12) \end{aligned}$$

Применяя далее соотношения (12) и (10) к уже полученному тождеству, выводим:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha, u\psi \rangle_c = \mathrm{res}_X t_1^{-1} \dots t_n^{-1} \cdot (1 - \triangle)(\log(1 + \underline{c}u\psi) \cdot t_1 \dots t_n D_{n+1}), \\ &\langle \alpha, u\psi \rangle_c = (1 - \triangle)d, \text{ где } d \in \mathcal{O}_T. \end{aligned}$$

Значит, tr $\langle \alpha, u\psi \rangle_c = 0$, что и требовалось. □

§5. Замена переменной

Лемма 8. *Рассмотрим ряды*

$$g_1, g_2, \dots, g_n \in O_T\{\{z_1\}\}\{\{z_2\}\}\dots\{\{z_{n-1}\}\}[[z_n]]$$

такие, что $\tau_i = g_i|_{z_1=t_1,\dots z_n=\pi}$ *образуют систему локальных параметров в* K. *Тогда для любых рядов* $\alpha \in K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})$, $\beta \in \mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$:

$$\langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle_{c,t} = \langle \alpha(g), \beta(g) \rangle_{c,z}\,.$$

В спаривании в правой части ряды и вычет рассматриваются от переменных z_i, *а соответствующие ряды* s'_m, u' *строятся с помощью разложения* ξ, ζ *и* c *в ряды по системе локальных образующих* τ_i *при замене переменных* $t_i \to g_i$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{c}$ ряд, получающийся разложением c в новой системе образующих τ_i при замене переменных $t_i \to g_i$.

Для начала рассмотрим случай $\alpha = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. В силу леммы 7 и леммы 4 ряд β можно заменить на формальную сумму базисных рядов вида: $-\theta c^{p^m-1} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^{i_n}$ и $E_c(as_c)$. Теперь проверим каждый из подслучаев отдельно:

$$\left\langle \{t_1, \dots, t_n\}, -\theta \underline{c}^{p^m-1} t_1^{i_1} t_2^{i_2} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^{i_n} \right\rangle_{c,t} = 0$$
$$= \left\langle \{g_1, \dots, g_n\}, -\theta \tilde{c}^{p^m-1} g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_{n-1}^{i_{n-1}} g_n^{i_n} \right\rangle_{c,z}$$

в силу символьного свойства [аналогично последней части доказательства (5)] и аддитивности спаривания. Во втором подслучае:

$$\langle \{t_1, \dots, t_n\}, E_c(as_c) \rangle_{c,t} = \langle \{g_1, \dots, g_n\}, E_c(as'_c) \rangle_{c,z}\,;$$

утверждение немедленно следует после применения к обеим частям тождества (7).

Далее рассмотрим элементы вида $\alpha = \{t_1, \dots, \varepsilon, \dots, t_n\}$, где $\varepsilon \in \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]_0^*$. Рассмотрим ряды $f = t_i \cdot \varepsilon$, $h = f(g_1, \dots, g_n)$ и элемент $t'_i = f|_{\dots,t_n=\pi}$. Обозначим также через $f_{t_i}^{-1}$ такой, ряд из $\mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]$ что $f_{t_i}^{-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, f) = t_i$. Тогда

$$\langle \{t_1, \dots, \varepsilon, \dots, t_n\}, \beta \rangle_{c,t} = \langle \{t_1, \dots, f, \dots, t_n\}, \beta \rangle_{c,t} - \langle \{t_1, \dots, t_i, \dots, t_n\}, \beta \rangle_{c,t}\,,$$
$$\langle \{g_1, \dots, \varepsilon(g), \dots, g_n\}, \beta \rangle_{c,z} = \langle \{g_1, \dots, f(g), \dots, g_n\}, \beta \rangle_{c,z} - \langle \{g_1, \dots, g_i, \dots, g_n\}, \beta \rangle_{c,z}\,.$$

В силу уже доказанного ранее нам надо проверить равенство:

$$\langle\langle\{t_1,\dots,f,\dots,t_n\},\beta\rangle\rangle_{c,t}=\langle\langle\{g_1,\dots,f(g),\dots,g_n\},\beta\rangle\rangle_{c,z}\,.$$

Однако обозначив $y_1=t_1,\dots,y_i=h,\dots y_n=y_n$ и дважды воспользовавшись уже доказанным, мы можем написать:

$$\begin{aligned}&\langle\langle\{t_1,\dots,f,\dots,t_n\},\beta\rangle\rangle_{c,t}\\ &\quad=\Big\langle\Big\langle\{y_1,\dots,y_i,\dots,y_n\},\beta(y_1,\dots,f_{t_i}^{-1}(y_1,\dots,y_n),\dots y_n)\Big\rangle\Big\rangle_{c,y}\\ &\quad=\Big\langle\Big\langle\{g_1,\dots,h,\dots,g_n\},\beta(g_1,\dots,f_{t_i}^{-1}(g_1,\dots,h,\dots,g_n),\dots g_n)\Big\rangle\Big\rangle_{c,z}\\ &\quad=\langle\langle\{g_1,\dots,f(g),\dots,g_n\},\beta(g)\rangle\rangle_{c,z}\,.\end{aligned}$$

Утверждение леммы теперь немедленно следует из предложения 1. □

§6. Спаривание на формальном модуле $F_c(\mathfrak{M})$

С помощью формального спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ зададим теперь числовое спаривание $\{\cdot,\cdot\}_c$.

Определение 1. *Введем спаривание*

$$\{\cdot,\cdot\}\colon K_n(K)\times F_c(\mathfrak{M})\to\langle\xi\rangle_c\,,$$
$$\{\alpha,\beta\}_c=\Big[\big\langle\big\langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\big\rangle\big\rangle_c\Big]_c(\xi).$$

Проверим теперь корректность этого определения.

Заметим, что независимость от разложения второго аргумента следует непосредственно из леммы 7. Независимость от выбора системы образующих следует из пункта 5. Проверим независимость от выбора разложения первого аргумента.

Лемма 9. *Пусть ряды α_1, $\alpha_2\in K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})$ таковы, что $\alpha_1|_{\dots,t_n=\pi}=\alpha_2|_{\dots,t_n=\pi}$. Тогда для любого ряда $\beta\in\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$*

$$\{\alpha_1,\beta\}_c=\{\alpha_2,\beta\}_c\,.$$

Доказательство. Достаточно проверить утверждение в случае, когда α_1 и α_2 элементарны в $K_n(\mathcal{H}_{\mathfrak{m}})$ и различаются лишь в одной координате, а именно: $\alpha_1=\{a_1,\dots,a_i,\dots,a_n\}$, $\alpha_2=\{a_1,\dots,a_i',\dots,a_n\}$.

В этом случае необходимо доказать, что для любого ряда $\beta\in\mathcal{H}_{\mathfrak{c}}$:

$$\langle\langle\{a_1,\dots,a_i/a_i',\dots,a_n\},\beta\rangle\rangle_c=0.$$

В силу кососимметричности спаривания достаточно разобраться со случаем $i = n$. Далее рассмотрим именно его. Рассмотрим ряд $g = t_n \cdot a_n/a'_n \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$. Для этого ряда $g(\pi) = \pi$. Применяя леммы 7 и 5 получаем:

$$\langle\langle\{a_1,\dots,t_n\},\beta\rangle\rangle_c = \langle\langle\{a_1,\dots,g\},\beta(g)\rangle\rangle_c = \langle\langle\{a_1,\dots,g\},\beta\rangle\rangle_c \\ = \langle\langle\{a_1,\dots,t_n\cdot a_n/a'_n\},\beta\rangle\rangle_c\,.$$

Сравнивая первое и последнее выражение в полученном равенстве получаем требуемое:

$$\langle\langle\{a_1,\dots,a_n/a'_n\},\beta\rangle\rangle_c = 0. \qquad \square$$

Теорема 1. *Для любых элементов $\alpha \in K_n(K)$ и $\beta \in F_c(\mathfrak{M})$ значения спариваний $\{\cdot,\cdot\}_c$ и $(\cdot,\cdot)_c$ совпадают*:

$$\{\alpha,\beta\}_c = (\alpha,\beta)_c.$$

Доказательство. Заметим, что из предложения 1 следует, что достаточно проверить это утверждение при $\alpha = \{t_1,\dots,\pi\}$ и

$$\alpha = \{t_1,\dots,t_{i-1},\varepsilon,t_{i+1}\dots,\pi\},$$

где $\varepsilon \in \mathcal{O}_T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{i-1}\}\}[[t_i]]_0^*$ (если $i = n$, то вместо t_n в последних скобках стоит π). Кроме того, можно написать $\varepsilon = t'_i/t_i$, и тогда

$$\{t_1,\dots,t_{i-1},\varepsilon,t_{i+1}\dots,\pi\} = \{t_1,\dots,t'_i\dots,\pi\} - \{t_1,\dots,t_i\dots,\pi\}.$$

Поэтому на самом деле достаточно проверить случай $\alpha = \{t_1,\dots,\pi\}$.

В этом случае из леммы 4 следует, что в качестве β можно рассматривать только $\varepsilon_{\theta,i}$ и $\omega_c(a)$. Однако из символьных свойств немедленно следует (см. (5)), что

$$\{\{t_1,\dots,\pi\},\varepsilon_{\theta,i}\}_c = 0 = (\{t_1,\dots,\pi\},\varepsilon_{\theta,i})_c.$$

А из (7) и (5) следует, что

$$\{\{t_1,\dots,\pi\},\omega_c(a)\}_c = [\operatorname{tr} a]_c(\xi) = (\{t_1,\dots,\pi\},\omega_c(a))_c.$$

Таким образом, построенное явное спаривание совпадает со спариванием Гильберта, или, другими словами, для спаривания Гильберта получена явная формула. $\square$

Литература

1. С. В. Востоков, В. В. Волков, М. В. Бондарко, *Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 53–60.
2. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов.* — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **165** (1984), 143–170.
3. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
4. И. Р. Шафаревич, *Общий закон взаимности.* — Матем. сб. **26 (68)**, No. 1 (1950), 113–146.
5. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions.* Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 2002.
6. F. Lorenz, S. Vostokov, *Honda groups and explicit pairings on the modules of Cartier curves.* — Contemp. Math. **300** (2002), 143–170.
7. С. В. Востоков, Ф. Лоренц, *Явная формула символа Гильберта для групп Хонды в многомерном локальном поле.* — Матем. сб. **194:2** (2003), 3–36.
8. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **49**, No. 2 (1985), 283–308.
9. С. В. Востоков, *Спаривание Гильберта в полном многомерном поле.* — Тр. МИАН, Наука, Физматлит, М., **208** (1995), 80–92.
10. Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в полном поле.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 5–34.
11. С. С. Афанасьева, Б. М. Беккер, С. В. Востоков, *Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина–Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 20–49.
12. С. В. Востоков, В. В. Волков, *Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей.* — Алгебра и анализ **26** (2014), No. 5, 125–141.
13. K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups* II. — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **27** (1980), 603–683.

Vostokov S. V., Volkov V. V. Explicit form of the Hilbert symbol on polynomial formal module for multidimensional local field II.

Current paper describes the explicit formula of the Hibert pairing between Milnor K-group of multidimensional local field and polynomial formal module. This formula generalizes similar results for one-dimensioinal case and multidimensional case of multiplicative group. A case of different characteristics of a field and its first residue field is considered.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: sergey vostokov@gmail.com,
vladvolkov239@gmail.com

Поступило 21 декабря 2015 г.