

Е. Ю. Воронецкий

О НОРМАЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ПОДГРУППЫ В $\mathrm{Sp}(2, A)$

В настоящей статье доказывается нормальность элементарной подгруппы $\mathrm{Eр}(2, A)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2, A)$, где A – кольцо с инволюцией, удовлетворяющее естественным ограничениям на ранг, формулируемым в терминах существования системы ортогональных идемпотентов.

Этот результат является первым шагом, необходимым для решения задачи описания подгрупп в $\mathrm{Sp}(2, A)$, нормализуемых $\mathrm{Eр}(2, A)$. Сама задача была поставлена в статье Николая Вавилова и Виктора Петрова [1], проблема 2 (см. также обзор [2, проблема 19]). Кроме того, доказываемый результат служит обобщением результата Вячеслава Копейко [3] и Джованни Таддеи [14] о нормальности элементарной симплектической группы $\mathrm{Eр}(2l, R)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2l, R)$, где $l \geq 3$ и R – коммутативное кольцо. А именно, их результат является частным случаем нашего при $A = M(l, R)$, $l \geq 3$, где инволюция на A задаётся транспонированием.

Вопрос о нормальности элементарной подгруппы в группе точек редуктивной алгебраической группы над коммутативным кольцом был одним из важнейших для алгебраической K -теории. Мы ограничимся ссылками на несколько ключевых работ и обзоров по этой теме, в которых можно найти более подробную историю и дальнейшие ссылки.

Первым общим результатом о нормальности была теорема Андрея Суслина, относившаяся к случаю группы $\mathrm{GL}(n, R)$, $n \geq 3$, R – коммутативное кольцо, [13]. Вскоре А. Суслин и В. Копейко обобщили этот результат на симплектический и ортогональный случаи [5], посвящённые полной линейной и ортогональной группам. Чуть более слабый результат был получен Дж. Таддеи [14]. В дальнейшем эти результаты (теоремы о нормальности элементарной подгруппы) были обобщены на обобщённые унитарные группы [6, 16], также подробное изложение этих результатов можно найти в [8]. В работе [12] предложены новые элементарные доказательства, основанные на методе разложения унипотентов.

Ключевые слова: симплектическая группа, элементарная подгруппа.

При помощи локализационных методов теоремы о нормальности (и даже более сильные результаты) были получены в контексте групп Шевалле [9, 15]. Наиболее общий известный сегодня результат собственно о нормальности элементарной подгруппы – это теорема В. Петрова и А. Ставровой [4], в которой установлена нормальность $E(R)$ для любой достаточно изотропной редуктивной группы. Вопрос о нормальности элементарной подгруппы теснейшим образом связан с вопросом центральности K_2 , где в самое последнее время был получен значительный прогресс.

Точная формулировка результата, доказываемого в этой статье, приведена в конце §1 (теорема 1), после введения определений. В §2 доказываются коммутационные соотношения в $\mathrm{Sp}(2, A)$ и некоторые следствия из них, а §3 посвящён доказательству теоремы 1.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем предполагать, что все рассматриваемые кольца ассоциативные и имеют единицу. Под инволюцией в кольце R мы понимаем анти-автоморфизм порядка 2. Через $M(n, R)$ будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над кольцом R , через $\mathrm{GL}(n, R)$ – группу обратимых матриц размера $n \times n$ над кольцом R . Другими словами, $\mathrm{GL}(n, R) = M(n, R)^*$, где через R^* обозначена группа обратимых элементов кольца R .

Для кольца R с инволюцией $r \mapsto \bar{r}$ положим $\mathrm{H}(R) = \{r \in R \mid r = \bar{r}\}$ и $\mathrm{AH}(R) = \{r \in R \mid r + \bar{r} = 0\}$ – множества эрмитовых и антиэрмитовых элементов, для идеала $I \triangleleft R$ с $\bar{I} = I$ аналогично определим $\mathrm{H}(I)$ и $\mathrm{AH}(I)$. Для произвольного кольца R через $\mathrm{C}(R)$ обозначим его центр, это же обозначение будем использовать для центра группы. Через $\mathrm{N}_G(H)$ и $\mathrm{C}_G(H)$ будем обозначать нормализатор и централизатор подгруппы H в группе G соответственно.

Зафиксируем кольцо A с инволюцией $a \mapsto \bar{a}$. Будем рассматривать его как подкольцо в $R = M(2, A)$ (вложение $A \hookrightarrow R$ задаётся стандартным образом, $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$). Распространим инволюцию на R , положив

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

при $a, b, c, d \in A$.

Лемма 1. *Операция $g \mapsto \bar{g}$, $g \in \mathrm{GL}(2, A) = R^*$, является инволюцией.*

Доказательство. Ясно, что отображение $g \mapsto \bar{g}$ аддитивно и удовлетворяет тождеству $\overline{\bar{g}} = g$. Так как $\bar{1} = 1$, то осталось проверить, что $\overline{gg'} = \overline{g'g}$:

$$\begin{aligned} \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} &= \overline{\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}} \\ &= \overline{\begin{pmatrix} \overline{cb'} + \overline{dd'} & \overline{-ab' - bd'} \\ \overline{-ca' - dc'} & \overline{aa' + bc'} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} \overline{d'd} + \overline{b'c} & \overline{-d'b - b'a} \\ \overline{-c'd} - \overline{a'c} & \overline{c'b + a'a} \end{pmatrix}} \\ &= \overline{\begin{pmatrix} \overline{d'} & \overline{-b'} \\ \overline{-c'} & \overline{a'} \end{pmatrix}} \cdot \overline{\begin{pmatrix} \overline{d} & \overline{-b} \\ \overline{-c} & \overline{a} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}} \cdot \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}. \quad \square \end{aligned}$$

Теперь определим группу

$$\text{Sp}(R) = \text{Sp}(2, A) = \{g \in \text{GL}(2, A) \mid g^{-1} = \bar{g}\}.$$

То, что $\text{Sp}(R)$ является группой, следует из предыдущей леммы и из $\overline{\bar{g}h} = \overline{hg} = 1$ при условии, что $gh = hg = 1$. Положим

$$\text{GSp}(R) = \text{GSp}(2, A) = \{g \in R^* \mid g\bar{g} = \bar{g}g \in \mathbb{C}(R)\}.$$

Ясно, что это подгруппа в R^* , содержащая $\text{Sp}(R)$.

С этого момента будем предполагать выполнение следующих условий:

- (1) Найдётся полный набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ попарно ортогональных самосопряжённых идемпотентов в A при некотором $n \geq 3$. Иными словами, $\sum_{i=1}^n e_i = 1$, $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bar{e}_i = e_i$. Этот набор $\{e_i\}_{i=1}^n$ мы зафиксируем вместе с кольцом A .
- (2) Каждый из элементов e_i порождает A как двусторонний идеал, то есть для каждого e_i найдутся $\{a_k\}_{k=1}^{m_i}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{m_i}$ из A , удовлетворяющие соотношению $1 = \sum_{k=1}^{m_i} a_k e_i b_k$.

Положим $E_i = \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $0 < i \leq n$ и $E_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{-i} \end{pmatrix}$ при $-n \leq i < 0$. Ясно, что это тоже попарно ортогональные идемпотенты с суммой 1, причём $\bar{E}_i = E_{-i}$. Кроме того, все эти элементы порождают R как двусторонний идеал. Определим элементарные трансвекции

$$\begin{aligned} T_{i,j}(a) &= 1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} \text{ при } a \in R, i \neq \pm j; \\ T_i(a) &= 1 + E_i a E_{-i} \text{ при } a \in \text{AH}(R). \end{aligned}$$

Ясно, что $\overline{T_{i,j}(a)} = T_{i,j}(a)^{-1} = T_{-j,-i}(\bar{a}) = T_{i,j}(-a)$ и $\overline{T_i(b)} = T_i(b)^{-1} = T_i(-b)$ при условии, что $i \neq \pm j$ и $a \in R, b \in \text{АН}(R)$.

Определим теперь элементарную симплектическую группу

$$\text{Ер}(R) = \text{Ер}(2, A) = \langle T_{i,j}(a), T_i(b) \mid i \neq \pm j, a \in R, b \in \text{АН}(R) \rangle \leq R^*.$$

Заметим, что это подгруппа в $\text{Sp}(R)$.

Для самосопряжённого двустороннего идеала $I \triangleleft R$ (то есть $\bar{I} = I$) также определим $\text{Sp}(I) = \text{Sp}(R) \cap (1 + I)$, $\text{Ер}(I) = \langle T_{i,j}(a), T_i(b) \mid a \in I, b \in \text{АН}(I) \rangle$.

Введём также операцию транспонирования на кольце R , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$. Эта операция является инволюцией R , коммутирующей со стандартной инволюцией $r \mapsto \bar{r}$, а также сохраняет $\text{GSp}(R)$, $\text{Sp}(R)$ и $\text{Ер}(R)$.

В качестве основного примера такого кольца A будем рассматривать кольцо $A = M(n, B)$ для коммутативного кольца B , где инволюция на A является транспонированием и e_i являются стандартными матричными единицами с номерами (i, i) (то есть e_i – матрица, содержащая нули во всех позициях, кроме (i, i) , в которой она содержит 1).

Зафиксируем индекс $1 \leq m \leq n$. Будем говорить, что R удовлетворяет условиям стабильности, если выполнены следующие два условия:

- (1) Если для некоторого $u \in A$ выполнено $Aue_m = Ae_m$, то найдётся $a \in Ae_m$ такое, что $e_m a = 0$ и $A(1 - e_m + a)ue_m = Ae_m$ (аналог неравенства на стабильный ранг B в случае $A = M(n, B)$).
- (2) Если для некоторых $u_1, u_2 \in A$ выполнено $Au_1e_m + Au_2e_m = Ae_m$, то найдётся $a = \bar{a} \in A$ такое, что $A(u_1 + au_2)e_m = Ae_m$ (аналог неравенства на Λ -стабильный ранг для матричного кольца над кольцом с форменным параметром, см. также [16]).

Эти условия будем называть первым и вторым условиями стабильности соответственно.

Нашей целью является доказательство следующего факта.

Теорема 1. *В предыдущих обозначениях пусть для любого максимального идеала M в $\text{Н}(C(R))$ существует такое мультипликативное подмножество $S \subseteq \text{Н}(C(R)) \setminus M$, что $S^{-1}R$ удовлетворяет условиям стабильности. Тогда $\text{Ер}(R)$ нормальна в $\text{GSp}(R)$.*

§2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ПОДГРУППА

Лемма 2. *Выполнены следующие соотношения:*

- (1) $T_{i,j}(a)T_{i,j}(b) = T_{i,j}(a+b)$, $T_i(c)T_i(d) = T_i(c+d)$ при $i \neq \pm j$, $a, b \in R$, $c, d \in \text{AH}(R)$;
- (2) $[T_{i,j}(a), T_{k,l}(b)] = 1$, если $i \neq \pm j$, $k \neq \pm l$, $a, b \in R$ и, кроме того, $k \neq j, -i$ вместе с $l \neq i, -j$;
- (3) $[T_{i,j}(a), T_k(b)] = 1$, если $i \neq \pm j$, $a \in R$, $b \in \text{AH}(R)$ и $k \neq j, -i$;
- (4) $[T_i(a), T_j(b)] = 1$, если $a, b \in \text{AH}(R)$ и $j \neq -i$;
- (5) $[T_{i,j}(a), T_{j,k}(b)] = T_{i,k}(aE_jb)$, если $i \neq \pm j$, $j \neq \pm k$, $k \neq \pm i$ и $a, b \in R$;
- (6) $[T_{i,j}(a), T_{j,-i}(b)] = T_i(aE_jb - \bar{b}E_{-j}\bar{a})$, если $i \neq \pm j$ и $a, b \in R$;
- (7) $[T_{i,j}(a), T_j(b)] = T_{i,-j}(aE_jb)T_i(aE_jbE_{-j}\bar{a})$, если $i \neq \pm j$, $a \in R$ и $b \in \text{AH}(R)$.

Доказательство.

(1) Ясно.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad [T_{i,j}(a), T_{k,l}(b)] &= T_{i,j}(a)T_{k,l}(b)T_{i,j}(-a)T_{k,l}(-b) \\
 &= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i})(1 + E_k b E_l - E_{-l} \bar{b} E_{-k}) \\
 &\quad \times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i})(1 - E_k b E_l + E_{-l} \bar{b} E_{-k}) \\
 &= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_k b E_l - E_{-l} \bar{b} E_{-k}) \\
 &\quad \times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i} - E_k b E_l + E_{-l} \bar{b} E_{-k}) = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad [T_{i,j}(a), T_k(b)] &= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i})(1 + E_k b E_{-k}) \\
 &\quad \times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i})(1 - E_k b E_{-k}) \\
 &= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_k b E_{-k}) \\
 &\quad \times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i} - E_k b E_{-k}) = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad [T_i(a), T_j(b)] &= (1 + E_i a E_{-i})(1 + E_j b E_{-j})(1 - E_i a E_{-i})(1 - E_j b E_{-j}) \\
 &= (1 + E_i a E_{-i} + E_j b E_{-j})(1 - E_i a E_{-i} - E_j b E_{-j}) = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & [T_{i,j}(a), T_{j,k}(b)] \\
&= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_j b E_k - E_{-k} \bar{b} E_{-j} + E_i a E_j b E_k) \\
&\times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i} - E_j b E_k + E_{-k} \bar{b} E_{-j} + E_i a E_j b E_k) \\
&= 1 + E_i a E_j b E_k - E_{-k} \bar{b} E_{-j} \bar{a} E_{-i} = T_{i,k}(a E_j b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad & [T_{i,j}(a), T_{j,-i}(b)] \\
&= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_j b E_{-i} - E_i \bar{b} E_{-j} + E_i a E_j b E_{-i}) \\
&\times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i} - E_j b E_{-i} + E_i \bar{b} E_{-j} + E_i a E_j b E_{-i}) \\
&= 1 + E_i a E_j b E_{-i} - E_i \bar{b} E_{-j} \bar{a} E_{-i} = T_i(a E_j b - \bar{b} E_{-j} \bar{a}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad & [T_{i,j}(a), T_j(b)] \\
&= (1 + E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_j b E_{-j} + E_i a E_j b E_{-j}) \\
&\times (1 - E_i a E_j + E_{-j} \bar{a} E_{-i} - E_j b E_{-j} + E_i a E_j b E_{-j}) \\
&= 1 + E_i a E_j b E_{-j} + E_j b E_{-j} \bar{a} E_{-i} + E_i a E_j b E_{-j} \bar{a} E_{-i} \\
&= T_{i,-j}(a E_j b) T_i(a E_j b E_{-j} \bar{a}). \quad \square
\end{aligned}$$

Так как E_i порождают R как идеал, то найдутся $\{\alpha_{i,r} \in R\}_{r=1}^{n_i}$ и $\{\beta_{i,r} \in R\}_{r=1}^{n_i}$ такие, что $1 = \sum_{r=1}^{n_i} \alpha_{i,r} E_i \beta_{i,r}$. Зафиксируем эти элементы для всех i и, не умаляя общности, будем считать, что $n_{-i} = n_i$, $\alpha_{-i,r} = \bar{\beta}_{i,r}$ и $\beta_{-i,r} = \bar{\alpha}_{i,r}$.

Лемма 3. Если $I = \bar{I} \triangleleft R$, то выполнено $\text{Er}(I) \leq [\text{Er}(I), \text{Er}(R)]$. В частности, $\text{Er}(R)$ совершенна.

Доказательство. Если $\pm i$, $\pm j$ и $\pm k$ различны, то

$$T_{i,k}(a) = \prod_{r=1}^{n_j} T_{i,k}(a \alpha_{j,r} E_j \beta_{j,r}) = \prod_{r=1}^{n_j} [T_{i,j}(a \alpha_{j,r}), T_{j,k}(\beta_{j,r})] \in [\text{Er}(I), \text{Er}(R)]$$

для любого $a \in I$. Кроме того, при $a \in \mathrm{AH}(I)$ и различных $\pm i, \pm j$ верно

$$\begin{aligned}
 T_i(a) &= \prod_{r=1}^{n_j} (T_i(\alpha_{j,r} E_j \beta_{j,r} a \alpha_{-j,r} E_{-j} \beta_{-j,r}) \\
 &\quad \times \prod_{s=r+1}^{n_j} (T_i(\alpha_{j,r} E_j \beta_{j,r} a \alpha_{-j,s} E_{-j} \beta_{-j,s} + \alpha_{j,s} E_j \beta_{j,s} a \alpha_{-j,r} E_{-j} \beta_{-j,r})) \\
 &= \prod_{r=1}^{n_j} ([T_{i,j}(\alpha_{j,r}), T_j(\beta_{j,r} a \alpha_{-j,r})] T_{i,-j}(-\alpha_{j,r} E_j \beta_{j,r} a \alpha_{-j,r}) \\
 &\quad \times \prod_{s=r+1}^{n_j} [T_{i,j}(\alpha_{j,r}), T_{j,-i}(\beta_{j,r} a \alpha_{-j,s} E_{-j} \beta_{-j,s})]) \in [\mathrm{Ep}(R), \mathrm{Ep}(I)]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Лемма 4. $N_{R^*}(\mathrm{Ep}(R)) \leq \mathrm{GSp}(R) \leq N_{R^*}(\mathrm{Sp}(R))$.

Доказательство. Правое включение ясно, так как при $g \in \mathrm{GSp}(R)$ и $h \in \mathrm{Sp}(R)$ верно ${}^g h \bar{g} h = ghg^{-1} \bar{g}^{-1} \bar{h} \bar{g} = gh \bar{h} g^{-1} \bar{g}^{-1} \bar{g} = 1$ и аналогично для ${}^g \bar{h} g h$. Если $g \in N_{R^*}(\mathrm{Ep}(R))$, то для любого $h \in \mathrm{Ep}(R)$ имеем ${}^g h g h = 1$, то есть $ghg^{-1} \bar{g}^{-1} \bar{h} \bar{g} = 1$, откуда $[g, h] = 1$. Поэтому достаточно доказать, что $C_{R^*}(\mathrm{Ep}(R)) = C(R)^*$ (если $gg \in C(R)^*$, то $gg = gggg^{-1} = gg^{-1}gg = gg$, этим мы будем пользоваться и в дальнейшем).

Пусть $g \in C_{R^*}(\mathrm{Ep}(R))$ и докажем, что g коммутирует со всеми $a \in R$. Тогда $gT_{i,j}(a) = T_{i,j}(a)g$ при $a \in R$, $i \neq \pm j$. Другими словами, $g(E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i}) = (E_i a E_j - E_{-j} \bar{a} E_{-i})g$ и $E_k g E_i a E_j = 0$ при $k \neq i, -j$. Отсюда вытекает, что $E_k g E_i = 0$ и, следовательно, $g = \sum_i E_i g E_i$.

Кроме того, из равенства $E_i g E_i a E_j = E_i a E_j g E_j$ следует, что g коммутирует с $E_i a E_j$ при $i \neq \pm j$. Отсюда, в силу $E_i a E_{\pm i} = \sum_{r=1}^{n_j} E_i a \alpha_{j,r} E_j \cdot E_j \beta_{j,r} E_{\pm i}$, g коммутирует и с $E_i a E_{\pm i}$. Наконец, g коммутирует с a , так как $a = \sum_{i,j} E_i a E_j$. \square

Как следствие из доказательства, получаем $N_{R^*}(\mathrm{Sp}(R)) = \mathrm{GSp}(R)$.

Заметим, что $A^i = (1 - e_i)A(1 - e_i)$ является кольцом (роль единицы играет $1 - e_i$) с инволюцией (полученной сужением инволюции кольца A). Это позволяет построить кольцо $R^i = (1 - E_i - E_{-i})R(1 - E_i - E_{-i})$ с инволюцией и вложение $\iota: \mathrm{Sp}(R^i) \rightarrow \mathrm{Sp}(R)$ по формуле $g \mapsto g + E_i + E_{-i}$.

Лемма 5. *Это корректно определённый гомоморфизм.*

Доказательство. Проверим сначала, что образ $\text{Sp}(R^i)$ действительно содержится в $\text{Sp}(R)$. Для $g \in \text{Sp}(R^i)$ имеем $\iota(g)\iota(g) = (g + E_i + E_{-i})(\bar{g} + E_i + E_{-i}) = g\bar{g} + E_i + E_{-i} = 1$.

Осталось проверить, что произведение переходит в произведение. Действительно, если $g, h \in \text{Sp}(R^i)$, то

$$\iota(g)\iota(h) = (g + E_i + E_{-i})(h + E_i + E_{-i}) = gh + E_i + E_{-i} = \iota(gh). \quad \square$$

Так как ι инъективно, то $\text{Sp}(R^i)$ будем отождествлять с её образом в $\text{Sp}(R)$.

Лемма 6. $\text{GSp}(R) = \text{Sp}(R)\text{D}(R)$, где $\text{D}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a = \bar{a}, b = \bar{b} \in \mathbb{C}(A)^* \right\}$.

Доказательство. Пусть $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GSp}(R)$, $g\bar{g} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$. Ясно, что $h \in \text{D}(R)$ и $gh^{-1} \in \text{Sp}(R)$, так как $gh^{-1}\overline{gh^{-1}} = g \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \bar{g} = 1$. Поэтому $\text{GSp}(R) \subseteq \text{Sp}(R)\text{D}(R)$, обратное включение очевидно. \square

Лемма 7. Для всех $a \in \mathbb{H}(A)$ матрица $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ лежит в $\text{Er}(R)$. Для всех $a \in (1 - e_i)Ae_i$ (или $e_iA(1 - e_i)$) матрица $\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\bar{a} \end{pmatrix}$ лежит в $\text{Er}(R)$.

Доказательство. Если $a \in \mathbb{H}(A)$, то

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i>0} \left(T_i \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \prod_{j>i} T_{i,-j} \left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \in \text{Er}(R),$$

так как все сомножители коммутируют.

Аналогично, если $a \in (1 - e_i)Ae_i$ (или, что то же самое, $a \in Ae_i$ и $e_ia = 0$), то

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-\bar{a} \end{pmatrix} = \prod_{j>0, j \neq i} T_{j,i} \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \text{Er}(R). \quad \square$$

Лемма 8. Пусть $a \in I$, где $I = \bar{I} \trianglelefteq R$, $aE_i = aE_{-i} = a\bar{a} = 0$. Тогда $1 + E_ia - \bar{a}E_{-i} \in \text{Er}(I)$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $i > 0$. Заметим, что при данных предположениях $1 + E_ia - \bar{a}E_{-i} \in \text{Sp}(I)$. Рассмотрим произведение (в порядке убывания j)

$$g = \prod_{j \neq \pm i} T_{i,j}(a) = 1 + E_ia - \bar{a}E_{-i} - \sum_{j>0, j \neq \pm i} E_iaE_j\bar{a}E_{-i}.$$

Так как $g(1+E_ia-\bar{a}E_{-i})^{-1} = g(1-E_ia+\bar{a}E_{-i}) = 1 - \sum_{j>0, j \neq \pm i} E_iaE_j\bar{a}E_{-i}$,
то по лемме 7 получаем $g(1+E_ia-\bar{a}E_{-i}) \in \mathrm{Er}(R)$. \square

Лемма 9. *Группа $D(R)$ нормализует $\mathrm{Er}(I)$.*

Доказательство. Пусть $g \in D(R)$, тогда $g = \sum_i E_igE_i$ и $g\bar{g} = \bar{g}g = s \in \mathrm{H}(C(R))$. Нетрудно видеть, что для $a \in I$ выполнено

$$\begin{aligned} {}^gT_{i,j}(a) &= 1 + gE_iaE_jg^{-1} - gE_{-j}\bar{a}E_{-i}g^{-1} = \\ &= 1 + E_igag^{-1}E_j - E_{-j}s\bar{g}^{-1}\bar{a}gs^{-1}E_{-i} = T_{i,j}({}^ga) \end{aligned}$$

и аналогично, для $b \in \mathrm{AH}(I)$, ${}^gT_i(b) = T_i({}^gb)$. \square

§3. НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ПОДГРУППЫ

Лемма 10. *Пусть R удовлетворяет условиям стабильности и для некоторого столбца $v = \begin{pmatrix} v_1e_m \\ v_2e_m \end{pmatrix}$ при $v_1, v_2 \in A$ верно $Av_1e_m + Av_2e_m = Ae_m$. Тогда найдётся $g \in \mathrm{Er}(R)$ такое, что $gv \in \begin{pmatrix} e_m \\ Ae_m \end{pmatrix}$.*

Доказательство. Будем последовательно заменять v на столбцы вида gv при $g \in \mathrm{Er}(R)$. Из второго условия стабильности с помощью леммы 7 следует, что v можно заменить на столбец такого же вида, но с $Av_1e_m = Ae_m$, умножением на элементарную матрицу. В свою очередь, из первого условия стабильности получается, что найдётся $a \in Ae_m$, удовлетворяющее $e_ma = 0$ и $A(1-e_m+a)v_1e_m = Ae_m$. Поэтому, заменяя v на $\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} v$, получим столбец с $A(1-e_m)v_1e_m = Ae_m$ (при этом $\begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \in \mathrm{Er}(R)$ по лемме 7, эта же лемма используется и дальше).

Иными словами, найдётся $b \in A$, для которого $be_m = 0$ и $e_m = bv_1e_m$. Тогда, заменяя v на $\begin{pmatrix} 1+(e_m-e_mv_1e_m)b & 0 \\ 0 & 1-\bar{b}(e_m-e_m\bar{v}_1e_m) \end{pmatrix} v$, получим столбец с $e_mv_1e_m = e_m$. Умножив его на $\begin{pmatrix} 1+(e_m-v_1e_m) & 0 \\ 0 & 1-(e_m-e_m\bar{v}_1) \end{pmatrix}$ слева, получим требуемое. \square

Лемма 11. *Если R удовлетворяет условиям стабильности, то группа $\mathrm{Er}(R)$ нормальна в $\mathrm{GSp}(R)$. Более того, $\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(R^m)\mathrm{Er}(R)$.*

Доказательство. Ясно, что из второго утверждения следует первое, так как $D(R)$ нормализует $\mathrm{Er}(R)$ по лемме 9. Пусть $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(R)$. В силу предыдущей леммы можно считать, что $ae_m = e_m$.

Заменяя g на $\prod_{0 < i \neq m} T_{-i,m} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \right) g$, получим $ce_m = e_m ce_m$. Так как $g \in \text{Sp}(R)$, то $\bar{c}a = \bar{a}c$, откуда $e_m \bar{c}e_m = e_m ce_m$. Поэтому, заменяя g на $T_{-m} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e_m ce_m & 0 \end{pmatrix} \right) g$, окончательно получаем $ce_m = 0$.

Добьёмся теперь выполнения равенств $e_m a = 0$ и $e_m b = 0$. Для того, чтобы получить $e_m a = 0$, достаточно заменить g на $g \prod_{0 < i \neq m} T_{m,i} \left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

После этого заменим g на $g \prod_{0 < i \neq m} T_{m,-i} \left(\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, это даст равенство $e_m b = e_m be_m$. Так как $g \in \text{Sp}(R)$, то $a\bar{b} = \bar{b}a$, откуда $e_m \bar{b}e_m = e_m be_m$. Поэтому после замены g на $g T_m \left(\begin{pmatrix} 0 & -e_m be_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ получаем требуемое. Нетрудно проверить, что из равенств $g\bar{g} = g\bar{g} = 1$ теперь вытекает, что $g \in \text{Sp}(R^m)$. \square

Лемма 12. Для всех i и всех $c \in \mathbb{H}(C(R))$ выполнено $[\text{Sp}(R^i), \text{Er}(Rc^4)]$

$\leq \text{Er}(Rc)$. В частности, $\text{Sp}(R^i) \text{Er}(R) = \text{Er}(R) \text{Sp}(R^i)$ является группой.

Доказательство. Зафиксируем $g = a + E_i + E_{-i} \in \text{Sp}(R^i)$. Ясно, что при $x \in \text{AH}(Rc)$

$$\begin{aligned} {}^g T_i(x) &= (a + E_i + E_{-i})(1 + E_i x E_{-i})(\bar{a} + E_i + E_{-i}) \\ &= a\bar{a} + E_i + E_{-i} + E_i x E_{-i} = 1 + E_i x E_{-i} = T_i(x) \in \text{Er}(Rc). \end{aligned}$$

Кроме того, при $j \neq \pm i$ и $x \in Rc$

$$\begin{aligned} {}^g T_{i,j}(x) &= (a + E_i + E_{-i})(1 + E_i x E_j - E_{-j} \bar{x} E_{-i})(\bar{a} + E_i + E_{-i}) \\ &= 1 + E_i x E_j \bar{a} - a E_{-j} \bar{x} E_{-i}. \end{aligned}$$

Так как $x E_j \bar{a} E_i = x E_j \bar{a} E_{-i} = 0$, то по лемме 8 имеем ${}^g T_{i,j}(x) \in \text{Er}(Rc)$.

Пусть теперь $i \neq \pm j$, $j \neq \pm k$, $k \neq \pm i$. Для $x \in R$ заметим, что

$${}^g T_{j,k}(xc^4) = \prod_{r=1}^{n_i} [{}^g T_{j,i}(xc^2 \alpha_{i,r}), {}^g T_{i,k}(x^2 \beta_{j,r})] \in \text{Er}(Rc),$$

а для $x \in \text{AH}(R)$ – что

$${}^g T_j(xc^4) = \prod_{r=1}^{n_i} ([{}^g T_{j,i}(a_{i,r}c), {}^g T_i(\beta_{i,r}c^2 x \alpha_{-i,r})] {}^g T_{j,-i}(-\alpha_{i,r} E_i \beta_{i,r} x c^3 \alpha_{-i,r}) \\ \times \prod_{s=r+1}^{n_i} [{}^g T_{j,i}(\alpha_{i,r}c), {}^g T_{i,-j}(\beta_{i,r} x c^3 \alpha_{-i,s} E_{-i} \beta_{-i,s})]) \in \text{Er}(Rc),$$

откуда следует требуемое. \square

Лемма 13. Пусть $c \in \text{H}(C(R))$, g – элементарная трансвекция. Тогда верно ${}^g \text{Er}(Rc^4) \leq \text{Er}(Rc)$.

Доказательство. Докажем, что ${}^g T_{i,j}(Rc^4), {}^g T_i(\text{AH}(R)c^4) \leq \text{Er}(Rc)$. В случае ${}^g T_{i,j}(Rc^4)$ нетривиальным случаем является только $g = T_{j,i}(x)$, тогда при $k \neq \pm i, \pm j$

$${}^g T_{i,j}(ac^4) = \prod_{r=1}^{n_k} [{}^g T_{i,k}(a\alpha_{k,r}c^2), {}^g T_{k,j}(\beta_{k,r}c^2)] \\ = \prod_{r=1}^{n_k} [T_{j,k}(xa\alpha_{k,r}c^2)T_{i,k}(a\alpha_{k,r}c^2), T_{k,j}(\beta_{k,r}c^2x)^{-1}T_{k,j}(\beta_{k,r}c^2)],$$

что принадлежит $\text{Er}(Rc)$.

Аналогично, для ${}^g T_i(\text{AH}(R)c^4)$ достаточно рассмотреть $g = T_{-i}(x)$, тогда при $j \neq \pm i$

$${}^g T_i(ac^4) = \prod_{r=1}^{n_j} ([{}^g T_{i,j}(c\alpha_{j,r}), {}^g T_j(c^2 \beta_{j,r} a \alpha_{-j,r})] {}^g T_{i,-j}(-c^3 \alpha_{j,r} E_j \beta_{j,r} a \alpha_{-j,r}) \\ \times \prod_{s=r+1}^{n_j} [{}^g T_{i,j}(c\alpha_{j,r}), {}^g T_{j,-i}(c^3 \beta_{j,r} a \alpha_{-j,s} E_{-j} \beta_{-j,s})]) \in \text{Er}(Rc). \quad \square$$

Лемма 14. Пусть $S \subseteq \text{H}(C(R))$ – мультипликативное подмножество, $g \in \text{Sp}(R)$, $1 \leq m \leq n$. Предположим, что

$$\Psi(g) \in \text{Er}(S^{-1}R) \text{Sp}(S^{-1}R^m), \quad \text{где } \Psi: R \rightarrow S^{-1}R.$$

Тогда найдётся $s \in S$ такое, что ${}^g \text{Er}(Rs) \leq \text{Er}(R)$.

Доказательство. Докажем, что для всех $i \neq \pm j$ существует $s \in S$ такое, что ${}^g T_{i,j}(Rs) \leq \text{Er}(R)$ (аналогичным образом получается, что

для всех i существует $s \in S$, для которого ${}^g T_i(\text{АН}(R)s) \leq \text{Ер}(R)$. Тогда в качестве искомого s можно взять произведение этих s по всем i, j . Пусть $R' = R[x, y]$, где x коммутирует с $C(R)$ (в случае T_i – ещё и $x = -\bar{x}$), $y = \bar{y}$ коммутирует с R и x . По условию $\Psi(g) = g_1 g_2$, где $g_1 \in \text{Ер}(S^{-1}R)$ и $g_2 \in \text{Sp}(S^{-1}R^m)$, найдётся такое N , что g_1 является произведением N элементарных трансвекций из $\text{Ер}(S^{-1}R)$. Пусть $h(y) = {}^g T_{i,j}(xy^{4^{N+1}})$.

По леммам 12 и 13 $\Psi(h(y)) \in \text{Ер}(S^{-1}R'y)$. Это означает, что $\Psi(h(y))$ является произведением конечного числа элементарных трансвекций вида $T_{k,l}(ay)$, где $a \in S^{-1}R'$ (а также $T_k(ay)$ при $a \in \text{АН}(S^{-1}R')$). Пусть $s_1 \in S$ – общий знаменатель всех таких a , тогда $\Psi(h(s_1y)) \in \Psi(\text{Ер}(yR'))$. Это означает, что

$$\Psi(h(s_1y)) = \Psi(h'(y)), \quad \text{где } h'(y) \in \text{Ер}(yR').$$

Но тогда нетрудно видеть, что найдётся $s_2 \in S$, для которого $h(s_1s_2y) = h'(s_2y)$. Окончательно,

$${}^g T_{i,j}(x(s_1s_2)^{4^{N+1}}) = h(s_1s_2) = h'(s_2) \in \text{Ер}(R').$$

Ясно, что $s = (s_1s_2)^{4^{N+1}}$ подходит. \square

Теорема 1. Пусть для любого максимального идеала $M \triangleleft \text{Н}(C(R))$ существует мультипликативное подмножество $S \subseteq \text{Н}(C(R)) \setminus M$ такое, что $S^{-1}R$ удовлетворяет условиям стабильности. Тогда $\text{Ер}(R)$ нормальна в $\text{GSp}(R)$.

Доказательство. Так как $D(R)$ нормализует $\text{Ер}(R)$ по лемме 9, то достаточно доказать, что $\text{Ер}(R) \leq \text{Sp}(R)$. Зафиксируем $g \in \text{Sp}(R)$ и пусть $I = \{c \in \text{Н}(C(R)) \mid {}^g \text{Ер}(cR) \subseteq \text{Ер}(R)\}$. Ясно, что I является идеалом в C . Кроме того, I не может содержаться ни в одном максимальном идеале C (так как он содержит по одному элементу из каждого мультипликативного подмножества S из условия в силу лемм 11 и 14). Поэтому ${}^g \text{Ер}(R) \subseteq \text{Ер}(R)$. \square

Как следствие (из теоремы и леммы 4) получаем, что $N_{R^*}(\text{Ер}(R)) = N_{R^*}(\text{Sp}(R)) = \text{GSp}(R)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах $\text{Ер}(2l, R)$* . — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 72–114.

2. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Подгруппы полупростых групп*. — Вестник СамГУ **3** (2008), 51–95.
3. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов*. — Матем. сб. **106(148)**, No. 1(5) (1978), 94–107.
4. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах*. — Алгебра и анализ **20**, No. 4 (2008), 160–188.
5. А. А. Суслин, В. И. Копейко, *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
6. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of Hyperbolic Unitary Groups I: Elementary Subgroups*. — Algebra Colloq. **7**, No. 2 (2000), 159–196.
7. D. Costa, G. Keller, *Radix Redux: normal subgroups of symplectic groups*. — J. reine angew. Math. **427** (1992), 51–105.
8. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on the K-theory of rings*. — J. K-Theory **4** (2009), 1–65.
9. R. Hazrat, N. Vavilov, *K_1 of Chevalley groups are nilpotent*. — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
10. A. Lavrenov, *Another presentation for symplectic Steinberg groups*. — J. Pure Appl. Algebra **219:9** (2015), 3755–3780.
11. V. A. Petrov, *Overgroups of Unitary Groups*. — K-Theory **29** (2003), 147–174.
12. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations*. — K-Theory **19** (2000), 109–153.
13. A. A. Suslin, *Algebraic K-theory*. — J. Sov. Math. **28** No. 6 (1985), 870–923.
14. G. Taddei, *Invariance du sous-groupe symplectique élémentaire dans le groupe symplectique sur un anneau*. — C. R. Acad. Sci Paris, Sér I **295**, No. 2 (1982), 47–50.
15. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau*. — Contemp. Math. Part II **55** (1986), 693–710.
16. L. N. Vaserstein, H. You, *Normal subgroups of classical groups over rings*. — J. Pure Appl. Algebra **105**, No. 1 (1995), 93–106.

Voronetsky E. Yu. Normality of elementary subgroup in $\mathrm{Sp}(2, A)$.

Let A be a ring with involution (associative, with identity), e_1, \dots, e_n be a full system of hermitian idempotents in A such that every e_i generates A as a two-sided ideal. This paper proves normality of the elementary subgroup in $\mathrm{Sp}(2, A)$ if $n \geq 3$ and A satisfies an analog of local stable rank condition.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Voronetcki iEgor@yandex.ru

Поступило 8 декабря 2015 г.