Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

М. М. Атаманова, А. Ю. Лузгарев

КУБИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НА ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУПП

§1. Введение

Алгебраические группы часто задаются как группы преобразований, сохраняющие некоторые полилинейные формы. Так, ортогональная
группа (скажем, над полем характеристики, отличной от 2) по определению является группой линейных преобразований, сохраняющих невырожденную квадратичную форму, или, что то же самое, сохраняющих соответствующую билинейную форму. Аналогично, симплектическая группа – это группа линейных преобразований, сохраняющих симплектическую билинейную форму.

В 1905 году Леонард Диксон построил инвариантную кубическую форму для группы типа E_6. Эта форма от двадцати семи переменных впоследствии изучалась в работах Клода Шевалле, Ганса Фрейденталя и многих других. Майкл Ашбахер доказал (см. [8]), что группа линейных преобразований 27-мерного пространства, сохраняющих эту форму, совпадает с односвязной группой Шевалле типа E_6 над произвольным полем (даже в случаях характеристик 2 и 3).

Еще раньше Леонард Диксон описал инвариантную форму четвертой степени для группы типа E_7. Эта форма действует на 56-мерном пространстве минимального представления односвязной группы Шевалле типа E_7. Также известно, что на этом пространстве есть инвариантная симплектическая форма. Брюс Куперстейн ([10], см. также [9]) показал, что группа линейных преобразований, сохраняющих обе этих формы, совпадает с группой Шевалле типа E_7 для случая поля характеристики, отличной от 2. В работе [7] снято ограничение на характеристику за счет перехода от биквадратной формы к *несимметричной* четырехлинейной.

Ключевые слова: группы Шевалле, исключительные группы, полилинейные инварианты, системы корней.

Работа второго автора поддержана проектом Российского Научного Фонда 14-11-00297 “Разложение унипотентов в редуктивных группах”.

Изучение минимальных представлений групп типов E_6 и E_7 облегчается тем, что эти представления являются *микровесовыми*. У группы типа E_8, в то же время, вообще нет микровесовых представлений. Ее минимальное представление – присоединенное. Поэтому представляет интерес рассмотрение присоединенных представлений исключительных групп и заданных на них инвариантных полилинейных форм.

Описанные выше полилинейные формы тесно связаны с уравнениями на орбиту вектора старшего веса. Хорошо известно (см. [11]), что орбита вектора старшего веса в любом представлении задается квадратичными уравнениями. Продифференцируем инвариантную трилинейную форму для группы типа E_6 по каждой координате: мы получим набор из 27 квадратичных многочленов. Оказывается, эти многочлены в точности выделяют орбиту вектора старшего веса (над алгебраически замкнутым полем). Аналогично, вторые частные производные четырехлинейной инвариантной формы для группы типа E_7 являются поляризациями квадратичных многочленов, задающих орбиту вектора старшего веса минимального представления этой группы (впрочем, здесь возникают тонкости, связанные с наличием симплектической формы на пространстве 56-мерного представления).

Уравнения на орбиту вектора старшего веса в присоединенных представлениях групп типа E_6, E_7, E_8 описаны в статье [12]. Они разбиваются на три типа, которые в [12] названы “уравнения для угла $\pi/2$”, “уравнения для угла $2\pi/3$” и “уравнения для угла π”. В настоящей работе, являющейся развитием дипломной работы первого автора, выполненной под руководством второго автора, строятся кубические формы на пространстве присоединенного представления группы Шевалле типа E_7, частные производные которых по любой переменной являются линейными комбинациями уравнений первых двух типов. Таким образом, разнообразные $\pi/2$- и $2\pi/3$-уравнения компактным образом представлены в сравнительно небольшом наборе кубических форм. Несложно показать, что на самом деле разнообразные частные производные этих форм дают *все* $\pi/2$- и $2\pi/3$-уравнения на орбиту вектора старшего веса. При построении форм выявляются дополнительные комбинаторные структуры на системах корней, дополняющие определенные Вавиловым *максимальные квадраты* (см. [3, 4]); мы верим, что эти структуры (названные ниже *сериями*) сыграют роль и в дальнейшем развитии геометрических методов работы с исключительными группами в присоединенных представлениях.

§2. Основные обозначения

В работах [13–17] можно найти множество деталей, относящихся к группам Шевалле над кольцами, и дальнейшие ссылки на литературу. В этом разделе мы лишь зафиксируем основные обозначения.

Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – фундаментальная система в Φ (ее элементы называются *простыми* корнями). Мы всегда используем ту же нумерацию простых корней, что в [1]. Для $\alpha \in \Phi$ мы имеем $\alpha = \sum\limits_{s=1}^{l} m_s(\alpha)\alpha_s$.

Пусть $G = G(\Phi, R)$ – односвязная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом R с 1. Мы будем работать с присоединенным представлением $G(\Phi, R)$, которое дает нам неприводимое действие $G(\Phi, R)$ на свободном R-модуле V ранга $|\Phi| + l$. Обозначим через Λ множество весов нашего представления *с кратностями.* То есть $\Lambda = \Lambda^* \sqcup \Delta$, где $\Lambda^* = \Phi$ – множество ненулевых весов, а $\Delta = \{0_1, \dots, 0_l\}$ – множество нулевых весов. Мы фиксируем допустимый базис $e^\lambda, \lambda \in \Lambda$ в V. Тогда вектор $v \in V$ может быть единственным образом представлен как

$$v = \sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda e^\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi} v_\alpha e^\alpha + \sum_{i=1}^{l} \hat{v}_i \hat{e}^i.$$

Мы часто будем писать просто $v = (v_\lambda)$.

Множество корней системы Φ является подмножеством эвклидова пространства E со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Мы будем также пользоваться произведением $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ для $\alpha, \beta \in E$ (для $\alpha, \beta \in \Phi$ получаем число Картана). Мы будем рассматривать лишь системы корней с *простыми связями*, что означает что все корни имеют длину 1. Поэтому $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi$. Обозначим за $\angle(\alpha, \beta)$ угол между $\alpha, \beta \in E$.

В нашей работе мы сконцентрируемся на случаях $\Phi = \mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$; последние два раздела, содержащие конструкции кубических форм, посвящены случаю $\Phi = \mathsf{E}_7$. Однако, многие предварительные леммы верны и для $\Phi = \mathsf{D}_l$; иногда мы будем давать пояснения, касающиеся и этого случая.

Структурные константы $N_{\alpha,\beta}, \alpha, \beta \in \Phi$, простой комплексной алгебры Ли типа Φ детально описаны в [2], и далее мы используем приведенные там тождества без явных ссылок. Заметим, что в нашем случае $N_{\alpha,\beta} = 0$ или ± 1.

Пусть $k = l-1, 4, 5, 7$ для $\Phi = \mathsf{D}_l, \mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$ соответственно.

Определение 1. *Множество корней* $\Omega = \{\beta_i\}, i = 1, \dots, k, -k, \dots, -1$, *такие что* $\angle(\beta_i, \beta_{-i}) = \pi/2$ *для* $i = 1, \dots, k$ *и* $\angle(\beta_i, \beta_j) = \pi/3$ *для* $i \neq \pm j$, *называется* максимальным квадратом.

Вообще, набор корней $\{\beta_i\}$, удовлетворяющий указанным требованиям на углы, называется *квадратом*; максимальный такой набор содержит в точности $2k$ корней. Далее в тексте речь будет идти только о таких квадратах, поэтому слово "максимальный" будет опускаться.

Сумма корней $\beta_i + \beta_{-i}$ не зависит от i, поэтому она общая для всего квадрата Ω. Обозначим этот вектор за $\sigma(\Omega)$.

Обратно, по любой паре ортогональных корней $\alpha, \beta \in \Phi$ можно восстановить единственный квадрат, содержащий эту пару, взяв все пары корней с той же суммой. Этот квадрат мы будем обозначать через $\Omega(\alpha, \beta)$. Занумеруем его элементы как в определении 1: пусть $\Omega(\alpha, \beta) = \{\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{-k}, \dots, \beta_{-1}\}$, причем $\beta_1 = \alpha$, $\beta_{-1} = \beta$. Рассмотрим следующие многочлены в $\mathbb{Z}[\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}, \{\widehat{x}_s\}_{s=1}^l]$:

$$f^{\pi/2}_{\alpha,\beta} = x_\alpha x_\beta - \sum_{i\geqslant 2} N_{\alpha,-\beta_i} N_{\beta,-\beta_{-i}} x_{\beta_i} x_{\beta_{-i}};$$

$$f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta} = \sum_{i\neq\pm1} N_{\alpha,-\beta_i} x_{\alpha-\beta_i} x_{\beta_i} - x_\alpha \sum_{s=1}^{l} \langle\beta, \alpha_s\rangle \widehat{x}_s;$$

$$f^{\pi}_{\alpha,\beta} = \sum_{i\neq\pm1} (x_{\alpha-\beta_i} x_{\beta_i-\alpha} - x_{-\beta_i} x_{\beta_i}) - \sum_{s=1}^{l} \langle\alpha, \alpha_s\rangle \widehat{x}_s \cdot \sum_{s=1}^{l} \langle\beta, \alpha_s\rangle \widehat{x}_s.$$

Пусть теперь $v = (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in V$ – вектор из *орбиты вектора старшего веса*, то есть, $v \in G\cdot e^\rho$, где ρ – максимальный корень системы Φ (это в точности старший вес присоединенного представления). В [12] показано, что координаты вектора v удовлетворяют равенствам $f^{\pi/2}_{\alpha,\beta}(v) = 0$, $f^{2\pi/3}_{\alpha,\beta}(v) = 0$ и $f^{\pi}_{\alpha,\beta}(v) = 0$.

§3. Комбинаторные леммы

Напомним, что группа Вейля $W = W(\Phi)$ действует на корнях отражением:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \langle\alpha, \beta\rangle\alpha.$$

Так как мы рассматриваем только приведенные кристаллографические системы корней с простыми связями, то $\langle\alpha, \beta\rangle$ может равняться только 2, -2, 1, -1, 0. Угол $\angle(\alpha,\beta)$ равен при этом 0, π, $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/2$ соответственно. Отсюда видно, что $\angle(\alpha,\beta)=\pi/3$ равносильно тому, что $\alpha-\beta\in\Phi$, а $\angle(\alpha,\beta)=2\pi/3$ равносильно тому, что $\alpha+\beta\in\Phi$.

Рассмотрим квадрат Ω и отразим множество его корней относительно произвольного корня $\alpha\in\Phi$.

Определение 2. *Отражением квадрата Ω относительно корня α назовем множество $S_\alpha(\Omega)=\{s_\alpha(\gamma)\mid\gamma\in\Omega\}$.*

Лемма 1. *Множество $S_\alpha(\Omega)$ является квадратом. Более того, если $\alpha\in\Omega$, то $\sigma(S_\alpha(\Omega))=\sigma(\Omega)-2\alpha$.*

Доказательство. Пусть $\Omega=\{\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{-k},\dots,\beta_{-1}\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha=\beta_1$. По определению квадрата, β_1 ортогонален β_{-1}, а с остальными β_i образует угол $\pi/3$. Значит, отражение подействует следующим образом:

$$(\beta_1,\ \beta_{-1})\mapsto(-\beta_1,\beta_{-1}),$$
$$(\beta_i,\beta_{-i})\mapsto(\beta_i-\beta_1,\beta_{-i}-\beta_1)\ \text{для любого}\ i\neq\pm1.$$

Заметим, что сумма у всех получившихся пар совпадает и равна $\sigma(\Omega)-2\alpha$, а пара $(-\beta_1,\beta_{-1})$ ортогональна. □

Заметим также, что (в обозначениях доказательства леммы 1)

$$\beta_i+\beta_{-i}-2\beta_1=\beta_1+\beta_{-1}-2\beta_1=\beta_{-1}-\beta_1.$$

Рассмотрим произвольный квадрат

$$\Omega=\{\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{-k},\dots,\beta_{-1}\}.$$

Будем обозначать через $-\Omega$, квадрат, состоящий из противоположных корней.

Определение 3. *Множество квадратов, полученное при отражении квадрата Ω относительно всех его корней, вместе с $\pm\Omega$, называется* серией *и обозначается через $s(\Omega)=\{S_\alpha(\Omega)\mid\alpha\in\Omega\}\cup\{\pm\Omega\}$.*

Как мы увидим ниже, серия, как множество корней, замкнута относительно отражений. Зададим на множестве всех квадратов бинарное отношение $\sim$: будем говорить, что $\Omega\sim\Omega'$, если $\Omega'\in s(\Omega)$. Мы покажем, что $\sim$ является отношением эквивалентности, и потому множество всех квадратов разбивается в несвязное объединение серий. Прежде чем это доказать, изобразим графически серию.

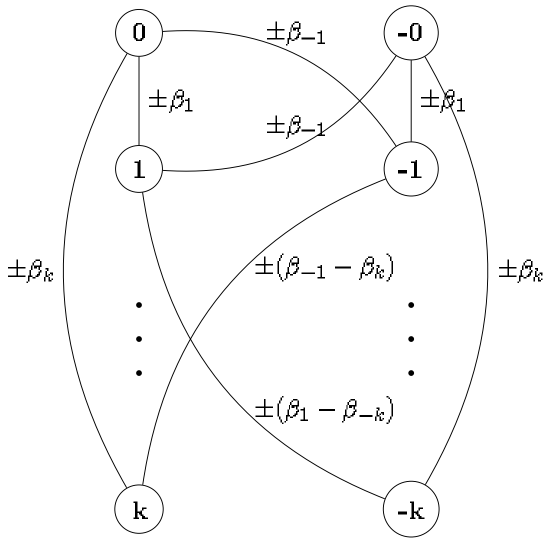
Нарисуем по серии граф, состоящий из помеченных вершин и помеченных ребер. Вершины будут соответствовать квадратам из серии, а ребра – отражениям. То есть, один квадрат переходит в другой отражением относительно корня, которым помечено ребро, соединяющее эти квадраты. Для сохранения симметрии мы будем помечать каждое ребро не корнем, а *парой* противоположных корней (два противоположных корня задают одно и то же отражение).

По определению серии, количество вершин в полученном графе равно $2(k+1)$. Занумеруем их символами $-\mathbf{k}$, $\ldots$, $-\mathbf{1}$, $-\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\ldots$, $\mathbf{k}$, которые будут соответствовать квадратам

$$S_{\beta_{-k}}(\Omega), \ldots, S_{\beta_{-1}}(\Omega),\ -\Omega,\ \Omega,\ S_{\beta_1}(\Omega), \ldots, S_{\beta_k}(\Omega).$$

Заметим, что $\mathbf{i}, -\mathbf{i}$ соответствуют противоположным квадратам, так как $S_{\beta_{-i}}(\Omega) = -S_{\beta_i}(\Omega)$.

Две ненулевые вершины $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$ такие, что $\mathbf{i} \neq \pm\mathbf{j}$, соединим ребром с пометкой $\pm(\beta_i - \beta_j)$. Ребро $(\mathbf{0}, \mathbf{i})$ пометим $\pm\beta_i$, а $(-\mathbf{0}, \mathbf{i})$ пометим $\pm\beta_{-i}$.



В полученном графе не соединены только вершины, соответствующие противоположным квадратам.

Лемма 2. *Каждое ребро соединяет квадраты, получающиеся друг из друга отражением относительно пометки на этом ребре.*

Доказательство. Так как отражение идемпотентно, то достаточно доказать утверждение для одного (любого) направления каждого ребра.

Рассмотрим произвольное ребро. Если оно выходит из $\mathbf{0}$, то утверждение верно по определению серии.

Посмотрим на произвольное ребро из $-\mathbf{0}$. Не умаляя общности, можно рассматривать ребро $(-\mathbf{0}, \mathbf{1})$. В квадрате $\mathbf{1}$ есть ортогональная пара $(-\beta_1, \beta_{-1})$, что при отражении относительно β_{-1} переходит в $(-\beta_1, -\beta_{-1})$. А эта пара лежит в квадрате $-\mathbf{0}$.

Наконец, рассмотрим ребро, соединяющее ненулевые вершины, например, $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$. В квадрате $\mathbf{1}$ есть ортогональная пара $(\beta_2-\beta_1, \beta_{-2}-\beta_1)$, а в квадрате $\mathbf{2}$ есть ортогональная пара $(\beta_1 - \beta_2, \beta_{-1} - \beta_2)$. Заметим, что вторые корни в этих парах совпадают $\beta_{-2}-\beta_1 = \beta_{-1}-\beta_2$, так как $\beta_1+\beta_{-1} = \beta_2+\beta_{-2}$. Таким образом, первая пара переходит во вторую при отражении относительно $\beta_1 - \beta_2$. И, так как квадрат задается ортогональной парой, то квадрат $\mathbf{1}$ весь переходит в квадрат $\mathbf{2}$. □

Следствие 1.

1. *Любые два непротивоположных квадрата из серии пересекаются ровно по одному корню.*
2. *Любые две серии либо не имеют общих квадратов, либо совпадают.*
3. *Пометки на ребрах, выходящих из одной вершины, с нужным знаком, являются в точности корнями квадрата в этой вершине.*
4. *Любой корень либо не встречается в серии, либо встречается ровно два раза.*

Доказательство. Рассмотрим ребро, соединяющее два непротивоположных квадрата. Пусть на нем написано $\pm\alpha$. Из доказательства леммы 2 видно, что корень, отвечающий пометке на ребре с "+" входит в квадрат, соответствующий одному концу ребра, а с "$-$" в другой. И ортогональные к ним корни совпадают. Все остальные корни из одного квадрата образуют угол $\pi/3$ с α, а из другого – угол $2\pi/3$ с α, и значит, не совпадают. Это доказывает первое утверждение. Остальные утверждения легко следуют из доказанного и из доказательства леммы 2. □

Лемма 3. *Серия замкнута относительно отражения квадратов корнями из серии.*

Доказательство. В силу построенного графа, достаточно рассмотреть только отражения квадрата относительно корней, не входящих в этот квадрат. Рассмотрим квадрат **1** и его отражение относительно β_2. В **1** есть ортогональная пара $(-\beta_1, \beta_{-1})$. Отразив ее относительно β_2, получаем $(-\beta_1 + \beta_2, \beta_{-1} - \beta_2)$. Заметим, что сумма корней в паре сохранилась. То есть весь квадрат перейдет при таком отражении в себя. Мы рассмотрели конкретный пример, но в силу симметричности картинки этого достаточно. □

Поскольку квадрат задается двумя ортогональными корнями α, β, то в некоторых удобных для нас случаях серию, содержащую квадрат Ω с $\sigma(\Omega) = \alpha + \beta$, будем обозначать через $s(\alpha, \beta)$ вместо $s(\Omega)$. Также, иногда мы будем воспринимать это множество как множество квадратов, а иногда как множество корней, участвующих в этих квадратах. Однако, из контекста всегда будет понятно, что имеется в виду.

Посмотрим на серию как на множество корней (объединение всех квадратов, входящих в эту серию). Заметим, что по построению серия замкнута относительно отражений относительно своих элементов и конечна. Значит, это система корней. Определить ее тип можно несложным вычислением (с использованием транзитивности действия группы Вейля на сериях). Получаем следующую лемму.

Лемма 4. *Если* $\Phi = \mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$*, то множество корней, входящих в любую серию, является системой корней типа* $\mathsf{D}_5, \mathsf{D}_6, \mathsf{D}_8$*, соответственно.*

Нетрудно понять, что $\mathsf{D}_5, \mathsf{D}_6, \mathsf{D}_8$ – это максимальные подсистемы типа D в $\mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8$.

В случае $\Phi = \mathsf{D}_l$ ситуация несколько сложнее: дело в том, что пары ортогональных корней в D_l образуют *две орбиты* относительно действия группы Вейля. Эти орбиты дают два типа квадратов: "длинные" (в которых $2l - 2$ элемента) и "короткие" (в которых 6 элементов). Уравнения на орбиту вектора старшего веса, приведенные в [12], параметризуются "длинными" квадратами. В случае $l = 4$ ситуация еще усложняется совпадением размеров этих квадратов $(2 \cdot 4 - 2 = 6)$, что объясняется наличием тройственности. Построение серий в случае $\Phi = \mathsf{D}_l$ и доказанные выше леммы остаются верными лишь для "длинных" квадратов.

Далее мы будем обозначать через ρ максимальный корень в E_8. Систему E_7 будем рассматривать как множество корней в E_8 с нулевым коэффициентом при простом корне α_8, а систему E_6 – как множество корней с нулевыми коэффициентами при α_8 и α_7.

Будем называть *типом* вектора из E его координату при α_8. Таким образом, максимальный корень, например, имеет тип 2. Заметим, что тип корня $\lambda \in \Phi$ может быть равен только $0, \pm 1, \pm 2$ – когда $\lambda \in \mathsf{E}_7$, $\lambda \notin \mathsf{E}_7 \cup \{\pm\rho\}$, $\lambda = \pm\rho$, соответственно. Множество всех корней E_8 типа i мы будем обозначать через $\mathsf{E}_8^{(i)}$. Будем называть *типом* квадрата Ω тип вектора $\sigma(\Omega)$.

Лемма 5. *Тип квадрата в* E_8 *может равняться только* $0, \pm 1, \pm 2$.

Доказательство. Так как σ это сумма двух корней, то из рассуждения выше следует, что коэффициент может принимать целочисленные значения от -4 до 4. Значения $\pm 3, \pm 4$, можно добиться только используя $\pm\rho$. Но тогда в квадрате будет не больше двух корней. □

Из леммы 1 следует, что типы квадратов из одной серии имеют одинаковую четность. Таким образом, все серии можно разделить на *четные* и *нечетные*.

Будем говорить, что серия s из E_8 *содержит серию из* E_7, если после пересечения каждого квадрата из s с E_7 (и исключения пустых пересечений) получится серия из E_7. Легко заметить, что такая серия четная, так как в нее входят квадраты типа 0. Серию, полученную при ограничении, будем обозначать через $s|_{\mathsf{E}_7}$. Аналогично, будем говорить, что квадрат *лежит в* E_7, если его пересечение с E_7 является квадратом из E_7. Заметим, что по построению, серия, содержащая квадрат из E_7, содержит серию из E_7.

Лемма 6. *Пусть s – произвольная серия из E_8. Серия s содержит серию из E_7 тогда и только тогда, когда $\rho \in s$.*

Доказательство. Пусть $\rho \in s$, тогда серия s четна. Рассмотрим квадрат $\Omega \in s$, который содержит ρ. Он имеет тип $2 + 0 = 2$. Значит, остальные ортогональные пары этого квадрата имеют тип $1 + 1$. Отразим квадрат Ω относительно какого-нибудь его корня типа 1. Тогда одна пара ортогональных корней перейдет в $1 + (-1)$, а остальные в $0 + 0$. Полученные пары корней типа $0 + 0$ составляют квадрат из E_7, и потому s содержит серию из E_7.

Обратно, пусть s содержит серию из E_7. Рассмотрим квадрат Ω из E_7, содержащийся в серии s, он типа 0. Пар типа $0 + 0$ в нем $2(k-1)$, рассмотрим оставшиеся две пары. Так как сумма типов корней в этих парах равна 0, то они могут быть только либо $2+(-2)$, либо $1+(-1)$. Но типы 2, -2 могут быть только у корней ρ, $-\rho$, а они не ортогональные. Значит, оставшиеся две пары имеют тип $1+(-1)$. Тогда, отразив эти две пары относительно корня типа -1, получим следующие суммы: $2+0$, $1+1$. Мы нашли в s корень типа 2 – это и есть ρ. □

Пусть s – серия в E_8, содержащая серию из E_7. Заметим, что парный корень с ρ в этой серии лежит в E_7. Обратно, каждому корню из E_7 можно сопоставить множество ортогональных к нему корней в E_7; оказывается, это множество образует серию.

Лемма 7. *Пусть α – произвольный корень из E_7, тогда*

$$\{\gamma \in \mathsf{E}_7 \mid \gamma \perp \alpha\} = \{\gamma \in \mathsf{E}_7 \mid \gamma \in s(\rho,\alpha)|_{\mathsf{E}_7}\}.$$

Доказательство. Пусть $\beta \in s(\rho,\alpha)|_{\mathsf{E}_7}$ не ортогонален α. Заметим, что $\rho \perp \beta$, так как $\rho \perp \mathsf{E}_7$. Отразим $\Omega(\rho,\alpha)$ относительно β, тогда получится квадрат, содержащий ρ, и не равный при этом $\Omega(\rho,\pm\alpha)$. Но в серии каждый корень встречается ровно два раза – противоречие. Количество корней в нашей серии равно количеству корней в D_6, то есть 60. Количество ортогональных корней к данному в E_7 такое же, значит, эти множества совпадают. □

Таким образом, серии в E_7 параметризуются парами противоположных корней в E_7: паре $\pm\alpha \in \mathsf{E}_7$ сопоставляется серия $s(\rho,\alpha)|_{\mathsf{E}_7}$, а серии s – единственный (с точностью до знака) корень в E_7, ортогональный всем корням из s. Это в точности соответствие между корнями E_7 (с точностью до знака) и (ортогональными им) подсистемами типа D_6 в E_7.

§4. $\pi/2$-формы

Далее везде $\Phi = \mathsf{E}_7$. Обозначим через A множество всех (неупорядоченных) троек попарно ортогональных корней $\alpha,\beta,\gamma \in \mathsf{E}_7$ таких, что корни α,β,γ,ρ порождают в E_8 подсистему корней типа D_4. Заметим, что тогда $\alpha+\beta+\gamma+\rho = 2\delta$, где $\delta \in \mathsf{E}_8$ – корень типа 1. Обратно, для корня $\delta \in \mathsf{E}_8^{(1)}$ обозначим через A_δ множество троек попарно ортогональных корней $\alpha,\beta,\gamma \in \mathsf{E}_7$ таких, что $\alpha+\beta+\gamma+\rho = 2\delta$. Тогда

$$A = \bigcup_{\delta \in \mathsf{E}_8^{(1)}} A_\delta.$$

Поскольку подгруппа $W(\mathsf{E}_7)$ в $W(\mathsf{E}_8)$ транзитивно действует на $\mathsf{E}_8^{(1)}$, все множества A_δ равномощны; нетрудно проверить, что они содержат по 45 слагаемых. Для этого, например, достаточно посмотреть на $\delta = \alpha_8$. Тогда A_δ состоит из троек попарно ортогональных корней $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{E}_7$ таких, что $\alpha + \beta + \gamma = -\genfrac{}{}{0pt}{}{2465430}{3}$. Коэффициент при α_7 у любого корня из E_7 может быть равен лишь 0 или ± 1. Поэтому у α, β, γ коэффициент при α_7 равен -1. Это означает, что α, β, γ можно рассматривать как тройку попарно ортогональных весов минимального представления E_6, возникающего из стандартного вложения $\mathsf{E}_6 \leqslant \mathsf{E}_7$ и действия на множестве корней из E_7 вида $-\genfrac{}{}{0pt}{}{*****1}{*}$. Такие тройки хорошо изучены; они обычно называются *триадами*, известно, что их 45 штук (см., например, [6]). На минимальном представлении E_6 имеется (единственная с точностью до скалярного множителя) инвариантная кубическая форма; она состоит из слагаемых вида $x_\alpha x_\beta x_\gamma$, где $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ пробегает все триады, взятых с определенными знаками. Положим $c_{\alpha\beta\gamma}$ равным знаку при $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ (для некоторого выбора знаков в такой кубической форме).

Теперь из соображений симметрии относительно действия группы Вейля такие же рассуждения можно провести для любого корня $\delta \in \mathsf{E}_8^{(1)}$: A_δ будет состоять из троек попарно ортогональных весов минимального представления E_6, возникающего из *какого-то* вложения систем корней $\mathsf{E}_6 \to \mathsf{E}_7$. Поэтому $|A_\delta| = 45$ и можно выбрать знак $c_{\alpha\beta\gamma}$ некоторым образом для всех троек $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in A_\delta$.

Таким образом, для каждого из пятидесяти шести корней $\delta \in \mathsf{E}_8^{(1)}$ мы построили некоторую кубическую форму

$$F_\delta^{\pi/2} = \sum_{\{\alpha,\beta,\gamma\} \in A_\delta} c_{\alpha\beta\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma \in \mathbb{Z}[\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathsf{E}_7}].$$

которая, разумеется, совпадает с инвариантной кубической формой на минимальном представлении E_6 при каком-то вложении систем корней $\mathsf{E}_6 \to \mathsf{E}_7$ и согласованном вложении весов этого минимального представления в E_7.

Теорема 1. *Пусть F – линейная комбинация кубических форм вида $F_\delta^{\pi/2}$ с произвольными скалярными коэффициентами. Тогда для любого $\alpha \in \mathsf{E}_7$ формальная производная $\partial F / \partial x_\alpha$ является линейной комбинацией $\pi/2$-уравнений, построенных по квадратам из серии $s(\rho, \alpha)|_{\mathsf{E}_7}$.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [6] или [5]), что производные инвариантной кубической формы на минимальном представлении группы типа E_6 дают в точности квадратные уравнения на этом представлении. А именно, каждая такая производная $\partial F_\delta^{\pi/2}/\partial x_\alpha$ является суммой пяти квадратичных мономов, соответствующих парам ортогональных весов с одинаковой суммой $2\delta - \rho - \alpha$. Выберем какую-нибудь пару таких весов (β, γ). Полученная сумма – это в точности пять слагаемых в многочлене $f_{\beta,\gamma}^{\pi/2}$. Осталось заметить, что знаки при слагаемых в $\pi/2$-многочлене согласованы со знаками в производной, поскольку известно, что орбита вектора старшего веса удовлетворяет обоим этим многочленам (см. [12] и [5]). □

§5. $2\pi/3$-формы

Определение 4. *Тройку корней $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{E}_7$ назовем* $2\pi/3$-тройкой, *если ее корни можно переименовать так, что $\angle(\alpha, \beta) = \angle(\alpha, \gamma) = \pi/2$ и $\angle(\beta, \gamma) = 2\pi/3$. Множество всех $2\pi/3$-троек в E_7 обозначим через Υ.*

Заметим, что если $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — $2\pi/3$-тройка такая, что $\angle(\beta, \gamma) = 2\pi/3$, то $\beta + \gamma \in \mathsf{E}_7$ и $\alpha \perp \beta + \gamma$. По паре ортогональных корней $\alpha, \beta + \gamma$ можно однозначно построить максимальный квадрат Ω, содержащий эту пару, и $\sigma(\Omega) = \alpha + \beta + \gamma$. Обратно, для произвольного максимального квадрата Ω в E_7 можно рассмотреть множество $\Upsilon(\Omega)$ всех $2\pi/3$-троек α, β, γ таких, что $\alpha + \beta + \gamma = \sigma(\Omega)$. Поэтому

$$\Upsilon = \bigcup_{\Omega \in \mathrm{M}(\mathsf{E}_7)} \Upsilon(\Omega),$$

где $\mathrm{M}(\mathsf{E}_7)$ обозначает множество всех максимальных квадратов в E_7. Заметим, что $|\,\mathrm{M}(\mathsf{E}_7)| = 756$. Соображения симметрии снова показывают, что все максимальные квадраты (и все множества $\Upsilon(\Omega)$) переводятся друг в друга действием группы Вейля $W(\mathsf{E}_7)$.

Для каждой тройки $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \Upsilon(\Omega)$ мы можем (после переименования корней) считать, что $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ и $\angle(\beta, \gamma) = 2\pi/3$. По лемме 7 существует единственный (с точностью до знака) корень τ, ортогональный всем α из троек $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \Upsilon(\Omega)$. Выберем из двух таких противоположных корней какой-нибудь один корень τ. Тогда $\tau \perp (\beta + \gamma)$; одно из выражений $\langle \tau, \beta \rangle$, $\langle \tau, \gamma \rangle$ равно 1, а другое равно -1. Поменяв при необходимости местами β и γ, мы можем добиться того, что $\langle\tau,\beta\rangle = 1$ и $\langle\tau,\gamma\rangle = -1$ для всех троек α,β,γ из $\Upsilon(\Omega)$. Отныне мы можем считать, что $\Upsilon(\Omega)$ состоит из *упорядоченных* $2\pi/3$-троек (α,β,γ) таких, что $\angle(\beta,\gamma) = 2\pi/3$ и $\langle\tau,\beta\rangle = 1$.

Зафиксируем произвольную тройку $(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0) \in \Upsilon(\Omega)$. Для корней $\alpha,\delta \in \Omega$ таких, что $\alpha \perp \delta$, положим

$$c_{\alpha,\delta} = \begin{cases} N_{\alpha_0,-\alpha} N_{\beta_0+\gamma_0,-\delta}, & \text{если } \alpha \neq \alpha_0 \text{ и } \alpha \neq \beta_0+\gamma_0; \\ -1, & \text{если } \alpha = \alpha_0 \text{ или } \alpha = \beta_0+\gamma_0. \end{cases}$$

Определим теперь кубическую форму

$$F_\Omega^{2\pi/3} = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Upsilon(\Omega)} c_{\alpha,\beta+\gamma} N_{\beta,\gamma} x_\alpha x_\beta x_\gamma - \sum_{\substack{\{\alpha,\delta\}\subseteq\Omega,\\ \alpha\perp\delta}} c_{\alpha,\delta} x_\alpha x_\delta \sum_{s=1}^{l} \langle\tau,\alpha_s\rangle \widehat{x}_s.$$

Теорема 2. *Пусть F – линейная комбинация кубических форм вида $F_\Omega^{2\pi/3}$ с произвольными скалярными коэффициентами. Тогда для любого $\alpha \in \mathsf{E}_7$ формальная производная F по любой из переменных x_α, $\widehat{x}_s$ является линейной комбинацией $\pi/2$-уравнений и $2\pi/3$-уравнений.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $F = F_\Omega^{2\pi/3}$ при некотором фиксированном максимальном квадрате Ω. Заметим, что производные по переменным, соответствующим корням, не входящим в тройки из $\Upsilon(\Omega)$, равны нулю. Рассмотрим некоторую $2\pi/3$-тройку $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ из $\Upsilon(\Omega)$ (напомним, что по нашим соглашениям $\angle(\beta_1,\gamma_1) = 2\pi/3$).

Посмотрим сначала на производную $\partial F/\partial x_{\alpha_1}$. Для простоты будем сначала считать, что $\alpha_1 \neq \alpha_0$ и $\alpha_1 \neq \beta_0+\gamma_0$. Нетрудно видеть, что тогда производная равна $N_{\alpha_0,-\alpha_1} N_{\beta_0+\gamma_0,-\beta_1-\gamma_1} f^{2\pi/3}_{\beta_1+\gamma_1,\tau}$. Действительно, нужно лишь заметить, что есть ровно один корень $\delta_1 \in \Omega$, ортогональный α_1 (а именно, $\delta_1 = \beta_1+\gamma_1$), и поэтому слагаемые в $\partial F/\partial x_{\alpha_1}$, содержащие переменные вида $\widehat{x}_s$, выглядят так:

$$N_{\alpha_0,-\alpha_1} N_{\beta_0+\gamma_0,-\beta_1+\gamma_1} x_{\beta_1+\gamma_1} \sum_{s=1}^{l} \langle\tau,\alpha_s\rangle \widehat{x}_s.$$

Случаи $\alpha_1 = \alpha_0$ и $\alpha_1 = \beta_0+\gamma_0$ рассматриваются аналогично.

Теперь продифференцируем $F_\Omega^{2\pi/3}$ по переменной x_{β_1}. Для каждой $2\pi/3$-тройки (α,β,γ) из $\Upsilon(\Omega)$ заметим, что

$$\begin{aligned} N_{\alpha_0,-\alpha}N_{\beta_0+\gamma_0,-\beta-\gamma}N_{\beta,\gamma} &= -N_{\alpha_0,-\alpha}N_{-\beta_0,-\gamma_0,\beta+\gamma}N_{\beta,\gamma} \\ &= -N_{\alpha_0,-\alpha}N_{-\beta_0-\gamma_0+\beta,\gamma}N_{-\beta_0-\gamma_0,\beta} \\ &= -N_{\alpha_0,-\alpha}N_{\beta_0+\gamma_0-\beta,-\gamma}N_{-\beta_0-\gamma_0,\beta}. \end{aligned}$$

Пусть теперь в этой тройке $\beta=\beta_1$. Тогда третий множитель в полученном произведении постоянен, так что после дифференцирования остается сумма слагаемых вида $N_{\alpha_0,-\alpha}N_{\beta_0+\gamma_0-\beta,-\gamma}x_\alpha x_\gamma$ по всем ортогональным парам α,γ с фиксированной суммой $\alpha+\gamma=\sigma(\Omega)-\beta_1$, и еще одно слагаемое вида $-N_{\beta_1,\gamma}x_{\alpha_0}x_{\beta_0+\gamma_0-\beta_1}$, Осталось заметить, что $N_{\beta_1,\gamma}=N_{-\beta_0-\gamma_0,\beta_1}$. В итоге $\partial F/\partial x_{\beta_1}$ равно $N_{-\beta_0-\gamma_0,\beta_1}f^{\pi/2}_{\alpha_0,\beta_0+\gamma_0-\beta_1}$.

Наконец, осталось рассмотреть производную $\partial F/\partial\widehat{x}_s$ для $s=1,\dots,l$; нетрудно видеть, что она равна $\langle\tau,\alpha_s\rangle f^{\pi/2}_{\alpha_0,\delta_0}$ (поскольку коэффициенты $c_{\alpha,\delta}$ – это в точности знаки, использованные при определении $f^{\pi/2}$; см. [12, с. 3]) $\square$

Литература

1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI, М., Мир, 1972.
2. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и анализ **19**, No. 4 (2007), 34–68.
3. Н. А. Вавилов, *Нумерология квадратных уравнений.* — Алгебра и анализ **20**, No. 5 (2008), 9–40.
4. Н. А. Вавилов, *Еще немного исключительной нумерологии.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 22–31.
5. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 35–62.
6. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
7. А. Ю. Лузгарев, *Не зависящие от характеристики инварианты четвертой степени для* $G(\mathsf{E}_7,R)$. — Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия (2013), No. 1, 43–50.
8. M. Aschbacher, *The 27-dimensional module for* E_6. I – IV. — Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990) 45–84; J. Algebra **191** (1991), 23–39.
9. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. Dedicata **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
10. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7. I. *A four form for* E_7. — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), , 361–389.

11. W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector.* — Proc. Amer. Math. Soc. **84**, No. 4 (1982), 605–608.
12. A. Luzgarev, *Equations determining the orbit of the highest weight vector in the adjoint representation*, `arXiv:1401.0849v1 [math.AG]`.
13. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.
14. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.
15. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — In: Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 219–335.
16. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
17. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45**, No. 1 (1996), 73–113.

Atamanova M. M., Luzgarev A. Yu. Cubic forms on adjoint representations of exceptional groups.

We construct cubic forms on adjoint representation of the Chevalley group of type E_7, whose partial derivatives are linear combinations of equations on the orbit of the highest weight vector. In order to describe the forms we introduce new combinatorial notions related to maximal squares in root systems of exceptional types.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `mariya_atm@mail.ru`
E-mail: `mahalex@gmail.com`

Поступило 30 ноября 2015 г.