Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 443, 2016 г.

**А. С. Ананьевский**

# О НУЛЕВОЙ СТАБИЛЬНОЙ $\mathbb{A}^1$-ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ГЛАДКОГО ПРОЕКТИВНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В настоящей заметке доказывается, что нулевая стабильная $\mathbb{A}^1$-гомотопическая группа гладкого проективного многообразия допускает когомологическое описание как группа ориентированных 0-циклов. Аналогичный результат был получен в статье [1] с использованием линейной версии мотивной стабильной гомотопической категории. Приведенное нами доказательство основано на использовании двойственности Атьи, базовых свойств гомотопической $t$-структуры и свойств строго гомотопически инвариантных пучков.

В заметке свободно используется терминология мотивных гомотопических категорий, введенная в [4–7]. Базовое поле $k$ предполагается бесконечным и совершенным.

**Определение 1.** *Напомним, что гомотопическая $t$-структура на мотивной стабильной гомотопической категории $\mathcal{SH}(k)$ задается следующей парой полных подкатегорий:*

$$\mathcal{SH}(k)_{\geqslant 0} = \{A \in \mathcal{SH}(k) \mid \pi^{\mathbb{A}^1}_{m,n}(A) = 0 \quad \text{при } m < n\},$$

$$\mathcal{SH}(k)_{\leqslant 0} = \{A \in \mathcal{SH}(k) \mid \pi^{\mathbb{A}^1}_{m,n}(A) = 0 \quad \text{при } m > n\}.$$

*Сердцевиной гомотопической $t$-структуры называется категория $\mathcal{S} = \mathcal{SH}(k)_{\geqslant 0} \cap \mathcal{SH}(k)_{\leqslant 0}$, допускающая естественную структуру абелевой категории. Положим*

$$\mathcal{SH}(k)_{\geqslant n} = \mathcal{SH}(k)_{\geqslant 0}[n], \quad \mathcal{SH}(k)_{\leqslant n} = \mathcal{SH}(k)_{\leqslant 0}[n].$$

*Для любого объекта $A \in \mathcal{SH}(k)$ имеет место естественная фильтрация*

$$\ldots \to A_{\geqslant n} \to \ldots \to A_{\geqslant 1} \to A_{\geqslant 0} \to A_{\geqslant -1} \to \ldots \to A.$$

*Положим $H^t_n(A) = \operatorname{Cone}(A_{\geqslant n+1} \to A_{\geqslant n})[-n]$. Несложно видеть, что $H^t_n(A) \in \mathcal{S}$. Кроме того, для любой пары спектров $\mathcal{X}, A \in \mathcal{SH}(k)$*

*Ключевые слова*: $\mathbb{A}^1$-гомотопии, ориентированные циклы, мотивы.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант РНФ-14-11-00456).

*фильтрация порождает спектральную последовательность*

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, H^t_q(A)[p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, A[p-q]).$$

**Определение 2.** *Говорим, что спектр $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(k)$ имеет когомологическую размерность не больше $n$, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, A[m]) = 0$ для любых $m > n$, $A \in \mathcal{S}$.*

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(k)$ имеет когомологическую размерность не больше $n$. Тогда $\mathcal{X} \in {}^{\perp}(\mathcal{SH}(k)_{\geqslant n+1})$.*

**Доказательство.** Рассмотрим $A \in \mathcal{SH}(k)_{\geqslant n+1}$ и спектральную последовательность

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, H^t_q(A)[p]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, A[p-q]),$$

порожденную гомотопической $t$-структурой. Из условия леммы следует, что $E^2_{p,q} = 0$ при $p \geqslant n+1$ или $q < n$, в частности, справа от диагонали $p - q = 1$ на втором листе находятся нули. Следовательно, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathcal{X}, A) = 0$. □

**Лемма 4.** *Рассмотрим векторное расслоение $E$ ранга $n$ над гладким многообразием $X$ размерности $d$ и спектр $A \in \mathcal{S}$. Имеют место естественные изоморфизмы*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(E), A[m]) \cong \mathrm{H}^m_{\mathrm{Nis},X}(E, \pi^{\mathbb{A}^1}_{0,0}(A)) \\ &\quad \cong \mathrm{H}^{m-n+1}_{\mathrm{Nis},X}(\det E, \pi^{\mathbb{A}^1}_{n-1,n-1}(A)) \cong \mathrm{H}^{m-n}_{\mathrm{Nis}}(X, \pi^{\mathbb{A}^1}_{n,n}(A) \times_{\mathcal{O}^*} \det E).\end{aligned}$$

*Кроме того, спектр $\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(E)$ имеет когомологическую размерность не больше $n + d$.*

**Доказательство.** Первое из этих отождествлений стандартно. Второй и третий изоморфизмы, а также зануление старших когомологий следуют из свойств комплекса Кузена для строго гомотопически инвариантного пучка [5]. □

**Определение 5.** *Пусть $X$ – гладкое проективное многообразие. При помощи трюка Жуанолу [2] выберем гладкое аффинное многообразие $X'$ вместе с морфизмом $p\colon X' \to X$, снабжающим $X'$ структурой локально тривиального в топологии Зариского $\mathbb{A}^m$-расслоения. Поскольку $X'$ аффинно, то найдется некоторое векторное расслоение $E$ над $X'$ такое, что $p^*T_X \oplus E \cong \mathbb{1}^N_{X'}$. Положим*

$$\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X) = \Sigma^{-N}_{\mathrm{T}}\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(E).$$

*Полученный таким образом спектр с точностью до канонических изоморфизмов не зависит от произведенных выборов.*

**Лемма 6.** *Пусть $X$ – гладкое проективное многообразие. Тогда спектр $\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X)$ имеет когомологическую размерность не более* 0.

**Доказательство.** Для спектра $A \in \mathcal{S}$ по лемме 4 имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), A[m]) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^{-N}_{\mathrm{T}}\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(E), A[m])\\ \cong \mathrm{H}^{m+d}_{\mathrm{Nis}}(X', \pi^{\mathbb{A}^1}_{-d,-d}(A) \times_{\mathcal{O}^*} p^*\omega_X) &\cong \mathrm{H}^{m+d}_{\mathrm{Nis}}(X, \pi^{\mathbb{A}^1}_{-d,-d}(A) \times_{\mathcal{O}^*} \omega_X).\end{aligned}$$

Из свойств комплекса Кузена для строго гомотопически инвариантного пучка следует, что последняя группа равна нулю при $m > 0$. □

**Теорема 7.** *Пусть $X$ – гладкое проективное многообразие размерности $d$. Тогда имеет место естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}(\operatorname{Spec} k)_+, \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+) \cong \mathrm{H}^d_{\mathrm{Nis}}(X, \mathrm{K}^{\mathrm{MW}}_d \times_{\mathcal{O}^*} \omega_X).$$

**Доказательство.** Положим $\mathbb{S} = \Sigma^\infty_{\mathrm{T}}(\operatorname{Spec} k)_+$. Из двойственности Атьи в $\mathbb{A}^1$-гомотопическом контексте [3] следует, что

$$\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+, \mathbb{S})$$

и имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathbb{S}, \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+).$$

Треугольник

$$\mathbb{S}_{\geqslant 1} \to \mathbb{S} \to H^t_0(\mathbb{S})$$

индуцирует точную последовательность

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}_{\geqslant 1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S})\\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), H^t_0(\mathbb{S})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}_{\geqslant 1}[1]).\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbb{S}_{\geqslant 1}, \mathbb{S}_{\geqslant 1}[1] \in \mathcal{SH}_{\geqslant 1}(k)$, то леммы 3 и 4 влекут, что крайние члены обнуляются и

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), \mathbb{S}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty_{\mathrm{T}}\mathrm{Th}(-T_X), H^t_0(\mathbb{S})).$$

Последняя группа отождествляется с $\mathrm{H}^d_{\mathrm{Nis}}(X, \mathrm{K}^{\mathrm{MW}}_d \times_{\mathcal{O}^*} \omega_X)$ ввиду леммы 4 и вычисления Мореля $\pi^{\mathbb{A}^1}_{-d,-d}(\mathbb{S}) \cong \mathrm{K}^{\mathrm{MW}}_d$ [5], откуда и следует утверждение теоремы. □

## Литература


1. A. Asok, Ch. Haesemeyer, *The 0-th stable $\mathbb{A}^1$-homotopy sheaf and quadratic zero cycles.* arxiv:1108.3854v1.
2. J. P. Jouanolou, *Une suite exacte de Mayer–Vietoris en K–théorie algébrique.* — Lecture Notes in Math. No. 341, Springer-Verlag (1973), 293–316.
3. P. Hu, *On the Picard group of the stable $\mathbb{A}^1$-homotopy category.* — Topology **44**, No. 3 (2005), 609–640.
4. F. Morel, *An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory.* — In: Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lecture Notes, vol. XV, (Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste, 2004), 357–441.
5. F. Morel, *$\mathbb{A}^1$-algebraic topology over a field*, Lecture Notes in Math., 2052. Springer, Heidelberg, 2012.
6. F. Morel, V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes.* — Publ. Math. IHES **90** (1999), 45–143.
7. V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$-homotopy theory.* — Doc. Math., Extra **I** (1998), 579–604.



Ananyevskiy A. A. On the zeroth stable $\mathbb{A}^1$-homotopy group of a smooth projective variety.

The zeroth stable $\mathbb{A}^1$-homotopy group of a smooth projective variety is computed. This group is identified with the group of oriented zero-cycles on the variety. The proof heavily exploits properties of strictly homotopy invariant sheaves.



Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, д. 27
191023 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: alseang@gmail.com


Поступило 2 декабря 2015 г.