

Б. П. Харламов, О. В. Проурзин

ОБ ИНТЕРВАЛЕ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ
СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ
АЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Альтернирующий процесс восстановления $X(t)$ – это однородный ступенчатый полумарковский процесс с двумя состояниями (см., [3]), например, 0 и 1, и с полумарковской переходной функцией

$$F(t, 1 | 0) \equiv \mathbf{P}(\sigma_1 < t, X(\sigma_1) = 1 | X(0) = 0),$$

$$F(t, 0 | 1) \equiv \mathbf{P}(\sigma_1 < t, X(\sigma_1) = 0 | X(0) = 1),$$

где σ_1 – длина первого интервала постоянства (момент первого скачка). Кроме того без потери общности можно предположить, что

$$F(\infty, 1 | 0) = F(\infty, 0 | 1) = 1.$$

Для задания распределения процесса в целом нужно определить распределение начального состояния $X(0)$, например, $\mathbf{P}(X(0) = 0) = p$, $\mathbf{P}(X(0) = 1) = 1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$).

Назовём альтернирующим процессом восстановления общего вида процесс, у которого по сравнению с исходным однородным альтернирующим процессом восстановления изменено распределение длины первого интервала постоянства, а остальные интервалы постоянства имеют длины, определяемые исходными полумарковскими переходными вероятностями. Для краткости мы будем называть такой процесс альт-процессом.

Назовём альт-решёткой вырожденный альт-процесс, у которого функции распределения всех 0-интервалов и 1-интервалов вырождены до значений $I_{[z, \infty)}(t)$ и $I_{[w, \infty)}(t)$ соответственно, где $z, w > 0$ и I_A – индикатор множества A .

Ключевые слова: двойной отказ, правильная цепочка, обрывающейся полумарковский процесс, преобразование Лапласа, интегральное уравнение, экспоненциальное распределение, имитация, начальный сдвиг, гистограмма.

Хорошо известно явления “муар” для системы из двух альт-решёток с парами параметров (z_i, w_i) ($i = 1, 2$), когда при их наложении друг на друга получается новая, вообще говоря, не регулярная решётка $M(t)$ из 0-интервалов и 1-интервалов, определяемая равенством

$$M(t) = \max\{X(t), Y(t)\},$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ – значения первой и второй альт-решётки в момент t . Очевидно, что муар будет периодическим процессом тогда и только тогда, когда отношение $(z_1 + w_1)/(z_2 + w_2)$ – рациональное число. Вычисление длин последовательных интервалов постоянства у муара общего вида представляет собой довольно непростую задачу комбинаторики.

Наша задача состоит в исследовании случайного муара, точнее – системы двух независимых альт-процессов, которую можно рассматривать как результат функционирования технической системы, состоящей из двух агрегатов с чередующимися интервалами работы и ремонта, где отказ системы в целом наступает, когда оба агрегата находятся в нерабочем состоянии.

В этой статье мы рассмотрим распределение времени до первого отказа такой системы (так называемого времени безотказной работы) при различных начальных условиях (см. [1]).

Традиционный подход к этой простой, но практически важной задаче состоит в том, что с самого начала рассматривается марковское расширение системы двух независимых альт-процессов за счёт введения новых переменных $L_X(t)$ и $L_Y(t)$ – времён пребывания в состояниях $X(t)$ и $Y(t)$ с момента последнего скачка каждого из этих процессов до текущего момента t (см., например, [2]). Полученный при таком расширении марковский процесс имеет распределение простого вида при экспоненциальном распределении времён пребывания в каждом из двух состояний 0 и 1 (см., например, [4]).

Мы используем временную переменную только для состояния 1 (т.е. только для случая $X(t) = 1$ и $Y(t) = 1$). Это частичное расширение системы двух альт-процессов не превращает её в марковский процесс. Однако при этом возникает так называемый вложенный ступенчатый

полумарковский процесс с обрывом, который даёт возможность получить интегральные уравнения в терминах вероятностей этого процесса. Этот подход позволяет получить компактные формулы при экспоненциальных распределениях времени одних только рабочих интервалов.

Условные распределения для нерабочих интервалов в нашей модели могут быть произвольными, что больше соответствует практической ситуации, когда времена обслуживания и ремонта (нерабочие состояния) подчиняются регулярному графику.

1.1. Обозначения и определения. Пусть

$a_w(k)$ – рабочие интервалы первого агрегата, занумерованные по порядку с начала процесса $X(t)$ или в порядке их появления в описании некоторого события, f_w – плотности распределения длин этих интервалов.

$a_z(k)$ и f_z – интервалы ремонта первого агрегата и плотности распределения их длин;

$b_w(k)$ и g_w – интервалы работы второго агрегата и плотности распределения их длин;

$b_z(k)$ и g_z – интервалы ремонта второго агрегата и плотности распределения их длин.

Пусть $|a|$ обозначает длину интервала a , все интервалы считаются замкнутыми на левом конце и открытыми на правом.

Обозначим

$$H_{am} = \bigcup_{k=1}^m (a_z(k) \cup a_w(k)).$$

Таким образом, группа интервалов под этим изображением начинается с интервала $a_z(1)$ и заканчивается интервалом $a_w(m)$ при $m \geq 0$. Обозначим также

$$H_{am}^+ = H_{am} \cup a_z(m + 1).$$

Плотность распределения величины $|H_{am}|$ равна $f_z^{(m)} * f_w^{(m)}$, плотность распределения величины $|H_{am}^+|$ равна $f_z^{(m+1)} * f_w^{(m)}$, где $*$ – операция свёртки, и $f(t) = g(t) = 0$ при $t < 0$. Обозначим $f^{(n)}$ ($n \geq 0$) n -кратную свёртку функции f (с собой), $f^{(0)} = \delta_0$ (дельта-функция со скачком в нуле). Аналогичные формулы выводятся для $|H_{bm}|$ и $|H_{bm}^+|$.

§2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ АГРЕГАТОВ

2.1. Двумерный процесс. Рассмотрим два альтернирующих процесса восстановления, соответствующих двум параллельно функционирующими агрегатам (каналам) технической системы. Каждый процесс имеет два возможных состояния: рабочее w и нерабочее z , где состояние z соответствует интервалу ремонта после отказа или необходимого профилактического обслуживания. В точках разрыва процессы предполагаются непрерывными справа. Эти процессы предполагаются независимыми друг от друга до момента перекрывания нерабочих интервалов (т. н. “двойной отказ”), когда оба процесса в одно и то же время имеют состояние z . Дальнейшее поведение этих двух процессов нас пока не интересует. Не исключено, что в этот момент совершается перестройка процессов таким образом, что система начинает функционировать “как новая”, но может быть, из другого начального состояния.

Итак, пусть $X(t)$ и $Y(t)$ – два независимых альт-процесса с двумя состояниями w (работа) и z (ремонт). При фиксированных начальных значениях $X(0) = x$ и $Y(0) = y$ ($x, y \in \{z, w\}$) распределения \mathbf{P}_x^X и \mathbf{P}_y^Y этих процессов определяются плотностями распределения длин своих интервалов f_z , f_w и g_z , g_w соответственно. Совместное распределение \mathbf{P}_{xy} этих процессов (распределение пары (X, Y)) определяется условием независимости компонентов этой пары.

Для получения дальнейших результатов ключевую роль играет следующая теорема.

Теорема 1. Для двух независимых альт-процессов восстановления, каждый из которых имеет в качестве одного из своих состояний z и задан абсолютно непрерывными распределениями длин своих интервалов, с вероятностью 1 существует момент T , когда как первый, так и второй процессы находятся в состоянии z .

Доказательство легко вытекает из эргодичности расширенного полумарковского процесса с четырьмя состояниями. \square

Для дальнейших построений необходимо дать описание момента первого двойного отказа в терминах перекрывающихся w -интервалов.

2.2. Малая полумарковская цепь с обрывом. Слово “малая” мы противопоставляем слову “большая” цепь, которая возникает, если после каждого момента двойного отказа наступает перестройка двумерного процесса, после которой система начинает работать как новая. Пусть $\zeta \in \{zw, wz\}$. Наша задача состоит в нахождении \mathbf{P}_ζ -распределения момента двойного отказа (обозначим его T) и роли компонентов в момент двойного отказа (например, какой агрегат начал свой последний z -интервал до момента T). Для расчёта этих объектов оказалось удобным рассматривать условные вероятности относительно событий

- 1) $X(0) = z, Y(0) = w$ и $L_Y(0) = t_0$ (это означает, что интервал $b_w(1)$ начался в момент $-t_0$, так что реализовалось событие: $|b_w(1)| > t_0$),
или
- 2) $Y(0) = z, X(0) = w$ и $L_X(0) = t_0$ (реализовалось событие: $|a_w(1)| > t_0$),

Таким образом мы расширяем наш процесс, добавляя компонент времени, но только для w -интервалов обоих компонентов (в полученных ниже формулах используются $L_X(t), L_Y(t)$ только тогда, когда $X(t) = w, Y(t) = w$); в общем случае этот процесс задаётся семейством мер \mathbf{P}_{ζ, t_0} , которое переходит в исходное семейство при $t_0 = 0$.

Мы будем предполагать, что в начальный момент один агрегат работает, а другой нет, причём у неработающего агрегата ремонт начинается в момент $t = 0$, а у работающего агрегата начало текущего рабочего интервала произошло в момент $-t_0$, где $t_0 > 0$. Таким образом, в момент $t = 0$ реализуется одно из двух начальных состояний двумерного процесса $\zeta \in \{zw, wz\}$. Определение меры \mathbf{P}_{zw, t_0} опирается на структуру данного двумерного процесса, компоненты которого независимы до момента перестройки. Из двух мер компонентов процесса \mathbf{P}_z^X и \mathbf{P}_w^Y при допущении ненулевого начального члена $L_Y(0) > 0$ меняется только мера \mathbf{P}_w^Y . Она преобразуется в меру \mathbf{P}_{w, t_0}^Y , где

$$\mathbf{P}_{w, t_0}^Y(S) = \frac{\mathbf{P}_w^Y(\theta_{t_0}^{-1}S, |b_w(1)| > t_0)}{\mathbf{P}_z^Y(|b_w(1)| > t_0)} = \frac{1}{\overline{G}_w(t_0)} \mathbf{P}_w^Y(\theta_{t_0}^{-1}S, |b_w(1)| > t_0),$$

где S – любое измеримое подмножество из множества траекторий,

$$\overline{G}_w(t) = \int_t^\infty g_w(s) ds,$$

(аналогично определяется $\bar{F}_w(t)$); θ_t – оператор сдвига на множестве траекторий: для любой траектории ξ процесса

$$Y_s(\theta_t(\xi)) = Y_{t+s}(\xi) \quad (s, t \geq 0).$$

На множество $\{|b_w(1)| > t_0\}$ этот оператор преобразует альтернирующий процесс восстановления с распределением длины первого звена $\mathbf{P}_w^Y(|b_w(1)| < x) \equiv G_w(x)$ в альт-процесс с распределением длины первого звена $\mathbf{P}_w^Y(b_w(1) - t_0 < x) \equiv G_w(x + t_0)$. Распределения длин остальных звеньев процесса остаются неизменными.

Мера \mathbf{P}_{zw,t_0} определяется системой двух независимых альт-процессов с мерами \mathbf{P}_z^X и \mathbf{P}_{w,t_0}^Y . Мера \mathbf{P}_{wz,t_0} определяется аналогично.

Для вывода распределения состояния двумерного процесса в момент T мы используем дополнительную марковскую структуру внутри интервала безотказной работы. Распределения \mathbf{P}_{zw,t_0} , \mathbf{P}_{wz,t_0} при $t_0 > 0$ здесь играют роль технического приёма – образцов для построения переходных функций так называемой малой марковской цепи.

Рассмотрим двумерный процесс до момента двойного отказа. При любом начальном состоянии, когда один агрегат работает, а другой – нет, момент двойного отказа наступит, когда оба агрегата будут находиться в состоянии ремонта. Это значит, что до этого момента существует так называемая правильная цепочка перекрывающихся w -интервалов. А именно, пусть $a_w(k)$, $b_w(l)$ – два перекрывающихся w -интервала. Будем говорить, что $a_w(k)$ предшествует $b_w(l)$ или, что тоже самое, $b_w(l)$ следует за $a_w(k)$, и обозначать

$$a_w(k) \prec b_w(l),$$

если

$$a_w^s(k) \leq b_w^s(l) < a_w^f(k) \leq b_w^f(l),$$

где a^s означает начальную и a^f – конечную точки интервала a (то же для b). Будем говорить, что интервалы

$$(a_w(k_1), a_w(k_2), \dots, a_w(k_n)) \quad \text{и} \quad (b_w(l_1), b_w(l_2), \dots, b_w(l_n))$$

образуют правильную цепочку (последовательности (k_n) и (l_n) возвращаются), если

$$a_w(k_1) \prec b_w(l_1) \prec a_w(k_2) \prec b_w(l_2) \prec \dots \prec a_w(k_n) \prec b_w(l_n)$$

или

$$b_w(l_1) \prec a_w(k_1) \prec b_w(l_2) \prec a_w(k_2) \prec \dots \prec b_w(l_n) \prec a_w(k_n)$$

Обе цепочки могут быть продолжены ещё одним w -интервалом: первая – интервалом $a_w(k_{n+1})$, если $b_w(l_n) \prec a_w(k_{n+1})$, вторая – интервалом $b_w(l_{n+1})$, если $a_w(k_n) \prec b_w(l_{n+1})$.

Очевидно, что на каждом интервале безотказной работы правильная цепочка перекрывающихся w -интервалов (если она существует) определяется единственным образом.

При числе звеньев такой цепочки не меньше трёх (с учётом начального рабочего интервала) между любыми соседними парами одного и того же компонента образуется непустой промежуток:

$$a_w^s(k_{i+1}) - a_w^f(k_i) > 0, \quad \text{или} \quad b_w^s(l_{i+1}) - b_w^f(l_i) > 0.$$

Эти промежутки заполнены так называемыми максимальными однородными группами интервалов (назовём их H -группами), начинающимися и оканчивающимися z -интервалами. Число интервалов в такой H -группе случайно, т.е. это или

$$H_a^+ = H_{a\mu} \cup a_z(\mu + 1) \quad \text{или} \quad H_b^+ = H_{b\nu} \cup b_z(\nu + 1),$$

где $\mu \geq 0, \nu \geq 0$ – случайные целые числа. При этом обозначении

$$H_a \equiv H_{a\mu} \quad \text{и} \quad H_b \equiv H_{b\nu}$$

называются неполными H -группами. Распределения величин μ и ν будут определены позднее.

Поясним это словесное описание рисунком

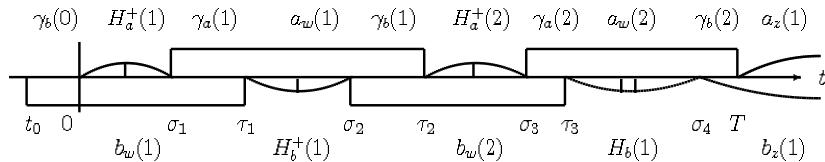


Рис. 1. Интервалы двухмерного процесса до первого двойного отказа

На рис. 1 интервалы 1-го компонента X изображены выше оси времени, а интервалы 2-го компонента Y – ниже. Рабочие интервалы изображены в виде прямоугольников. H -группы изображены в виде дуг с вертикальной чертой посередине. Неполная H -группа изображена в виде дуги с двумя вертикальными чертами. Интервалы ремонта,

не входящие в H -группы, изображены в виде дуг и пронумерованы отдельно. На рисунке изображена правильная цепочка интервалов:

$$b_w(1) \prec a_w(1) \prec b_w(2) \prec a_w(2)$$

и интервалы, занимаемые H -группами. Последний интервал в этой цепочке оканчивается внутри нерабочего интервала другого компонента, и, таким образом, вызывает двойной отказ двух процессов (точка T).

С правильной цепочкой интервалов связана так называемая малая полумарковская цепь с обрывом, составленная из H -групп и интервалов перекрывания рабочих интервалов. На рисунке это интервалы

$$\gamma_a(1) = (\sigma_1, \tau_1), \quad \gamma_b(1) = (\sigma_2, \tau_2), \quad \gamma_a(2) = (\sigma_3, \tau_3).$$

Очевидно, что $|\gamma_a(1)| = L_X(\tau_1)$, $|\gamma_b(1)| = L_Y(\tau_2)$ и так далее. Отсюда вытекает марковское свойство обоих компонент относительно точек τ_k и соответствующих γ . Для общего случая мы дополняем эту последовательность нулевым элементом — интервалом $\gamma_b(0) = (-t_0, 0)$. Вместе со следующими за ними H -группами они образуют ступенчатый полумарковский процесс с обрывом с переходами

$$(|\gamma_b(0)|, |H_a^+(1)|, |\gamma_a(1)|), \quad (|\gamma_a(1)|, |H_b^+(1)|, |\gamma_b(1)|), \\ (|\gamma_b(1)|, |H_a^+(2)|, |\gamma_a(2)|)$$

и так далее до момента обрыва. Для полноты картины мы добавляем к этой последовательности "переход выхода"

$$(|\gamma_a(2)|, |H_b(1)|, |\gamma_b(2)|),$$

где $|\gamma_b(2)| = T - \sigma_4$. Условная вероятность появления этого события больше нуля на каждом шаге малой марковской цепи. Именно по этой причине малая марковская цепь обрывается. У интервала выхода малой цепи может не быть той неполной H -группы, которая изображена на рисунке (когда неполная H -группа — пустое множество). В этом случае точка σ_4 становится на место τ_3 .

Итак, если $b_w^f(1) - t_0$ меньше конца первого нерабочего интервала первого компонента (входящего в H -группу), то при начальном состоянии двумерного процесса zw в конце первого рабочего интервала процесса $Y(t)$ заканчивается интервал безотказной работы системы, т.е. первый же шаг малой полумарковской цепи является выходом из цепи (число переходов цепи равно нулю).

2.3. Переходные вероятности малой полумарковской цепи.

Рассмотрим правильную цепочку w -интервалов

$$b_w(1) \prec a_w(1) \prec b_w(2) \prec a_w(2) \prec \dots$$

В каждый момент конца очередного интервала (например, $b_w(k)$) правильной цепочки у компонента цепи (в данном случае Y), содержащего этот интервал, начинается нерабочий интервал (здесь $b_z(k)$). Его начало – это момент марковской регенерации соответствующего альтернирующего процесса (здесь Y). У второго компонента (здесь X), по построению, в этот момент известно состояние (здесь рабочее) и длительность пребывания в этом состоянии (здесь – длина интервала перекрывания γ_{2k-1}), что является моментом марковской регенерации расширенного альтернирующего процесса (здесь $(X(t), L_X(t))$, у которого в любой момент t известно не только состояние (например, $X(t)$) но и время непрерывного пребывания в этом состоянии (функция $L_X(t)$)). Для независимых процессов этого достаточно, чтобы момент $b_w^f(k)$ был моментом марковской регенерации двумерного процесса. В этом состоит марковское свойство двумерного процесса с независимыми компонентами относительно таких моментов времени. С учётом времени пребывания в интервалах $H_a^+(k)$ ($H_b^+(k)$) мы получаем малую полумарковскую цепь – цепь с обрывом, так как на каждом шаге вероятность выхода из цепи больше нуля.

Марковская цепь, вложенная в малую полумарковскую цепь, имеет пространство состояний $\{wz, zw\} \times (0, \infty)$. Переходная функция на один шаг малой полумарковской цепи определяется плотностями $q_{zw,t_0}^{(1)}(wz, t)$, $q_{wz,t_0}^{(1)}(zw, t)$, где $t_0, t > 0$. Две другие формально возможные переходные плотности равны нулю. Поэтому в дальнейшем обозначаем

$$q_{zw,t_0}^{(1)}(wz, t) \equiv q_{zw,t_0}^{(1)}(t), \quad q_{wz,t_0}^{(1)}(zw, t) \equiv q_{zw,t_0}^{(1)}(t).$$

Представление этих переходных плотностей в терминах исходных плотностей мы получим из переходных функций малой полумарковской цепи, которые имеют вид

$$\mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_a^+(1)| < s, |\gamma_1| < t) \equiv \int_0^s \int_0^t D_{zw,t_0}^+(s_1, t_1) ds_1 dt_1,$$

$$\mathbf{P}_{wz,t_0}(|H_b^+(1)| < s, |\gamma_1| < t) \equiv \int_0^s \int_0^t D_{wz,t_0}^+(s_1, t_1) ds_1 dt_1,$$

где $D_{wz,t_0}^+(s, t)$ – некоторая двумерная субвероятностная плотность. Аналогично определяется плотность $D_{wz,t_0}^-(s, t)$.

Неполные H -группы определяют вероятности интервалов выхода. Для них также можно рассмотреть полумарковскую переходную функцию

$$\mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_a(1)| < s, |\gamma_1| < t) \equiv \int_0^s \int_0^t D_{zw,t_0}(s_1, t_1) ds_1 dt_1,$$

где $D_{zw,t_0}(s, t)$ – некоторая двумерная субвероятностная плотность, и так далее. Эти двумерные плотности используются при нахождении распределения длины интервала безотказной работы.

Обозначим

$$h_a(t) := \sum_{m=0}^{\infty} k_a^{(m)}(t), \quad k_a(t) := [f_z * f_w](t), \quad (t \geq 0),$$

$$h_b(t) := \sum_{m=0}^{\infty} k_b^{(m)}(t), \quad k_b(t) := [g_z * g_w](t), \quad (t \geq 0).$$

$$h_a^+(t) := [h_a * f_z](t), \quad h_b^+(t) := [h_b * g_z](t).$$

Очевидно, что каждое $k_a^{(m)}$, $k_b^{(m)}$ является плотностью вероятностного распределения. Однако h_a , h_b , h_a^+ и h_b^+ таковыми не являются. В типичном случае интегралы от этих функций по бесконечному интервалу расходятся.

Обозначим

$$g_{w,t_0}(t_0 + t) := \frac{g_w(t_0 + t)}{G_w(t_0)}, \quad f_{w,t_0}(t_0 + t) := \frac{f_w(t_0 + t)}{F_w(t_0)}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что длины интервалов работы имеют конечные математические ожидания:

$$\int_0^{\infty} t g_w(t) dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t f_w(t) dt < \infty.$$

Теорема 2. Справедливы представления

$$D_{zw,t_0}(s, t) = h_a(s) g_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{F}_z(t), \quad (1)$$

$$D_{zw,t_0}^+(s, t) = h_a^+(s) g_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{F}_w(t), \quad (2)$$

$$D_{wz,t_0}(s, t) = h_b(s) f_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{G}_z(t). \quad (3)$$

$$D_{wz,t_0}^+(s, t) = h_b^+(s) f_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{G}_w(t). \quad (4)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_a(1)| < s, |\gamma_1| < t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_{zw,t_0}(\mu = m, |H_{am}| < s, |\gamma_1| < t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_{zw,t_0} \left(|H_{am}| < |b_w(1)| - t_0 < |H_{am}| + |a_z(1)|, \right. \\ & \quad \left. |H_{am}| < s, |b_w(1)| - t_0 - |H_{am}| < t \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^s k_a^{(m)}(x) \int_0^t g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du dx. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами

$$\begin{aligned} \int_0^t g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du &\leq \frac{1}{\bar{G}_w(t_0)} \int_0^t g_w(t_0 + x + u) du \leq \frac{\bar{G}_w(x)}{\bar{G}_w(t_0)}, \\ \int_0^{\infty} \bar{G}_w(x) dx &= \int_0^{\infty} x g_w(x) dx < \infty \end{aligned}$$

и теоремой Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, мы получаем предыдущее выражение в виде

$$\int_0^s h_a(x) \int_0^t g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du dx.$$

Дифференцируя двойной интеграл по s и t , получаем двумерную плотность.

$$D_{zw,t_0}(s, t) = h_a(s) g_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{F}_z(t). \quad (5)$$

Из принципа симметрии следует

$$D_{wz,t_0}(s, t) = h_b(s) f_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{G}_z(t).$$

Аналогично доказываются вторая и четвёртая формулы. \square

Каждая полученная двумерная плотность открывает возможность получить плотности распределения отдельно для H -групп (неполных H -групп) и для $|\gamma|$. Это суть маргинальные одномерные плотности для каждой двумерной плотности, то есть плотности, полученные интегрированием по другому компоненту.

Нас в первую очередь интересуют плотности распределения длины H -групп H_a^+ и H_b^+ и неполных H -групп H_a и H_b . Обозначим эти плотности η_{zw}^+ , η_{wz}^+ , η_{zw} , η_{wz} соответственно. Отсюда

$$\eta_{zw}(x) = h_a(x) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du. \quad (6)$$

$$\eta_{zw}^+(x) = h_a^+(x) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_w(u) du. \quad (7)$$

$$\eta_{wz}(x) = h_b(x) \int_0^\infty f_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{G}_z(u) du, \quad (8)$$

$$\eta_{wz}^+(x) = h_b^+(x) \int_0^\infty f_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{G}_w(u) du. \quad (9)$$

Следствие 1.

$$\int_0^\infty (\eta_{zw}^+(x) + \eta_{zw}(x)) dx = 1,$$

$$\int_0^\infty (\eta_{wz}^+(x) + \eta_{wz}(x)) dx = 1,$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}_{zw,t_0}(X(|b_w(1)| - t_0) = z) + \mathbf{P}_{zw,t_0}(X(|b_w(1)| - t_0) = w) = 1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{zw,t_0}(X(|b_w(1)| - t_0) = z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_{am}| < |b_w(1)| - t_0 < |H_{am}| + |a_z|) \\ &= \int_0^\infty h_a(x) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty D_{zw}(x, u) du dx = \int_0^\infty \eta_{zw}(x) dx. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{zw,t_0}(X(|b_w(1)| - t_0) = w) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_{am}^+| < |b_w(1)| - t_0 < |H_{am}^+| + |a_w|) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^\infty [k_a^{(m)} * f_z](x) \mathbf{P}_{zw,t_0}(x < |b_w(1)| - t_0 < x + |a_w|) dx \\ &= \int_0^\infty h_a^+(x) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_w(u) du dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty D_{zw}^+(x, u) du dx = \int_0^\infty \eta_{zw}^+(x) dx, \end{aligned}$$

т.е. сумма вероятностей равна 1. Вторая сумма выводится аналогично.

□

Маргинальными плотностями являются также переходные функциями малой марковской цепи, а именно

$$q_{zw,t_0}^{(1)}(t) \equiv \int_0^\infty D_{zw,t_0}^+(s, t) ds = \bar{F}_w(t) \int_0^\infty h_a^+(s) g_{w,t_0}(t_0 + s + t) ds, \quad (10)$$

$$q_{wz,t_0}^{(1)}(t) \equiv \int_0^\infty D_{wz,t_0}^+(s, t) ds = \bar{G}_w(t) \int_0^\infty h_b^+(s) f_{w,t}(t_0 + s + t) ds. \quad (11)$$

При любом $k \geq 1, l \geq 1$ переход на $k + 1$ шагов определяется плотностями

$$q_{zw,t_0}^{(k+l)}(t) = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(k)}(s) q_{wz,s}^{(l)}(t) ds, \quad \text{если } k \text{ чётное} \quad (12)$$

$$q_{zw,t_0}^{(k+l)}(t) = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(k)}(s) q_{wz,s}^{(l)}(t) ds, \quad \text{если } k \text{ нечётное} \quad (13)$$

Итак, после каждого чётного перехода состояние процесса равно начальному. После каждого нечётного перехода состояние процесса меняется на противоположное (одно из двух, wz или zw). Переходы малой цепи продолжаются до интервала выхода, т.е. до тех пор, когда при попытке совершить очередной шаг происходит двойной отказ.

Возможны 2 основных варианта выхода: после чётного (включая 0) перехода и после нечётного перехода малой полумарковской цепи. Условная вероятность выхода на первом же шаге равна

$$p_{zw,t_0}^{(1)} \equiv \int_{\mathbb{R}_+^2} D_{zw,t_0}(s, t) ds dt = \int_0^\infty h_a(s) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{F}_z(t) dt ds,$$

$$p_{wz,t_0}^{(1)} \equiv \int_{\mathbb{R}_+^2} D_{wz,t_0}(s, t) ds dt = \int_0^\infty h_b(s) \int_0^\infty f_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{G}_z(t) dt ds,$$

Условная вероятность выхода после k переходов цепи имеет вид

$$p_{zw,t_0}^{(k+1)} = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(k)}(t) p_{zw,t}^{(1)} dt = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(1)}(t) p_{wz,t}^{(k)} dt, \quad \text{если } k \text{ чётное},$$

$$p_{zw,t_0}^{(k+1)} = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(k)}(t) p_{wz,t}^{(1)} dt = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(0)}(t) p_{wz,t}^{(k)} dt, \quad \text{если } k \text{ нечётное},$$

откуда

$$p_{zw,t_0}^{(k+1)} = \int_0^\infty q_{zw,t_0}^{(1)}(t) p_{wz,t}^{(k)} dt, \quad \text{при любом } k.$$

Аналогичные формулы при начальном состоянии (wz, t_0) выводятся из принципа симметрии.

2.4. Распределения длин интервалов перехода и выхода. Как было указано ранее, последовательность

$$|\gamma_b(0)|, |\gamma_a(1)|, |\gamma_b(1)|, |\gamma_a(2)|, \dots$$

является марковской цепью с обрывом. Добавление к каждой паре соседних состояний цепи случайной положительной переменной, зависящей только от этих двух соседних членов цепи, превращает марковскую цепь в полумарковскую цепь (процесс). Эта переменная обычно интерпретируется как время пребывания в первом состоянии пары до момента перехода во второе состояние. Условное распределение этой переменной зависит только от этих двух соседних членов цепи. В разобранном выше примере такими положительными условно независимыми переменными являются длины соответствующих H -групп.

Наша задача состоит в нахождении распределения длины интервала безотказной работы системы, равной длине объединения всех интервалов, составляющих максимальную правильную цепочку перекрывающихся рабочих интервалов от начального момента до момента двойного отказа. В примере Рис. 1 – это

$$T = |H_a^+(1)| + |\gamma_a(1)| + |H_b^+(1)| + |\gamma_b(1)| + |H_a^+(2)| + |\gamma_a(2)| + |H_b(1)| + |\gamma_b(2)|$$

Условное распределение пары $(|H_a^+(1)|, |\gamma_a(1)|)$ задаётся плотностью $D_{zw,t_0}^+(s, t)$; условное распределение пары $(|H_b^+(1)|, |\gamma_b(2)|)$ задаётся плотностью $D_{wz,t_0}^+(s, t)$ и т. д. Эти пары – случайные значения полумарковских переходов цепи.

Пусть $K_{zw,t_0}(x, t)$ – совместная плотность пары

$$(|H_a^+(1)| + |\gamma_a(1)|, |\gamma_a(1)|).$$

Тогда, очевидно, что $K_{zw,t_0}(x, t) = D_{zw,t_0}^+(x - t, t)$ – совместная плотность на диагонали $s = x - t$, когда второй аргумент равен t . Аналогично $K_{wz,t_0}(x, t) = D_{wz,t_0}^+(x - t, t)$.

Важно отметить, что благодаря полумарковскому свойству справедливо, что во-первых $|H_a^+(1)|, |H_b^+(1)|, \dots$ условно независимы при фиксированных $|\gamma_a(1)|, |\gamma_b(2)|, \dots$ и во-вторых суммы

$$|H_a^+(1)| + |\gamma_a(1)|, |H_b^+(1)| + |\gamma_b(2)|, \dots$$

также условно независимы при фиксированных $|\gamma_a(1)|, |\gamma_b(2)|, \dots$

Плотность распределения длительности выходного звена зависит от его начального значения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{zw,t_0}(|H_a(1)| < |b_w(1)| - t_0 < |H_a(1)| + |a_z|, |b_w(1)| - t_0 < s) \\ &= \int_0^\infty h_a(x) \int_{x+t_0}^{s+t_0} g_{w,t_0}(y) \bar{F}_z(y - t_0 - x) dy dx \\ &= \int_0^\infty h_a(x) \int_0^{s-x} g_{w,t_0}(t_0 + x + u) \bar{F}_z(u) du dx, \end{aligned}$$

откуда следует искомая плотность

$$V_{zw,t_0}(s) = \int_0^\infty D_{zw,t_0}(s, t) dt = h_a(s) \int_0^\infty g_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{F}_z(t) dt, \quad (14)$$

По симметрии получаем плотность

$$V_{wz,t_0}(s) = \int_0^\infty D_{wz,t_0}(s, t) dt = h_b(s) \int_0^\infty f_{w,t_0}(t_0 + s + t) \bar{G}_z(t) dt. \quad (15)$$

2.5. Распределение времени безотказной работы. Распределение T зависит от числа звеньев N малой полумарковской цепи.

Обозначим $S_{\zeta_0,t_0}^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_n)$ плотность совместного распределения n длин интервалов перехода и длины γ -интервала, входящего в n -й шаг переходного звена ($n \geq 0, \zeta_0 \in \{zw, wz\}$). Эта плотность определяется по индукции

$$\begin{aligned} S_{\zeta_0,t_0}^{(1)}(x_1, t_1) &= K_{\zeta_0,t_0}(x_1, t_1), \\ S_{\zeta_0,t_0}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_{n+1}, t_{n+1}) &= \int_0^\infty S_{\zeta_0,t_0}^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_n) K_{\zeta_n,t_n}(x_{n+1}, t_{n+1}) dt_n, \end{aligned}$$

где $(\zeta_n)_0^\infty$ – регулярная альтернирующая последовательность, составленная из zw и wz , так что, если $\zeta_0 = zw$, то $\zeta_n = zw$ при всех чётных n и $\zeta_n = wz$ при всех нечётных n , и аналогично при $\zeta_0 = wz$. Очевидно, что при $n \geq 2$

$$S_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_n) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} K_{\zeta_{k-1}, t_{k-1}}(x_k, t_k) dt_k.$$

Пользуясь этим обозначением, получаем при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\zeta_0, t_0}(N = n, T < t) \\ = \int_{\substack{n+1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} x_k < t}} \int_0^\infty S_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(x_1, \dots, x_n, t_n) V_{\zeta_n, t_n}(x_{n+1}) dt_n \prod_{k=1}^{n+1} dx_k, \end{aligned}$$

а также

$$\mathbf{P}_{\zeta_0, t_0}(N = 0, T < t) = \int_0^t V_{\zeta_0, t_0}(x) dx.$$

Обозначим

$$W_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{\zeta_0, t_0}(N = n, T < t) \quad (n \geq 0),$$

а также плотность распределения величины T

$$W_{\zeta_0, t_0}(t) = \sum_{n=0}^\infty W_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(t).$$

В дальнейшем будем обозначать преобразование Лапласа

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

где $\lambda \geq 0$ и f – интегрируемая функция, заданная на интервале $[0, \infty)$

Следующее свойство преобразования Лапласа легко доказывается по индукции.

Лемма 1. Для любого набора интегрируемых функций $(f_k)_1^\infty$, для которых существуют $\widehat{f}_k(\lambda)$ (лапласовы образы функций f_k), справедливо

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\sum_1^n x_i < t} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) dx_i \right) dt = \prod_{i=1}^n \widehat{f}_i(\lambda) \quad (n \geq 2). \quad (16)$$

Применим эту лемму для того, чтобы получить преобразование Лапласа для величины T . А именно, для любого $n \geq 0$ имеем

$$\widehat{W}_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \widehat{K}_{\zeta_{k-1}, t_{k-1}}(\lambda, t_k) \widehat{V}_{\zeta_{n-1}, t_{n-1}}(\lambda) \prod_{k=1}^{n-1} dt_k$$

В частности,

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\zeta_0, t_0}^{(0)}(\lambda) &= \widehat{V}_{\zeta_0, t_0}(\lambda), \\ \widehat{W}_{\zeta_0, t_0}^{(1)}(\lambda) &= \int_0^\infty \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(\lambda, t_1) \widehat{V}_{\zeta_1, t_1}(\lambda) dt_1, \end{aligned}$$

а также при $n \geq 2$

$$\widehat{W}_{\zeta_0, t_0}^{(n)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(\lambda, t_1) \widehat{K}_{\zeta_1, t_1}(\lambda, t_2) \widehat{W}_{\zeta_0, t_2}^{(n-2)}(\lambda) dt_1 dt_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\zeta_0, t_0}(\lambda) &= \widehat{V}_{\zeta_0, t_0}(\lambda) + \int_0^\infty \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(\lambda, t_1) \widehat{V}_{\zeta_1, t_1}(\lambda) dt_1 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(\lambda, t_1) \widehat{K}_{\zeta_1, t_1}(\lambda, t_2) \widehat{W}_{\zeta_0, t_2}(\lambda) dt_2 dt_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Мы получили интегральное уравнение относительно $\widehat{W}_{\zeta_0, t}(\lambda)$ как функции от t .

Используя известное соотношение

$$\mathbf{E}_{\zeta_0, t_0}(T) = - \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \widehat{W}_{\zeta_0, t_0}(\lambda) \right|_{\lambda=0}$$

и правило дифференцирования произведения, получаем

$$\mathbf{E}_{\zeta_0, t_0}(T) = \phi_{\zeta_0, t_0}(t) + \int_0^\infty \psi_{\zeta_0, t_0}(t) \mathbf{E}_{\zeta_0, t}(T) dt,$$

где

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_0, t_0}(t) &= \widehat{V}'_{\zeta_0, t_0}(0) + \int_0^\infty (\widehat{K}'_{\zeta_0, t_0}(0, t_1) \widehat{V}_{\zeta_1, t_1}(0) + \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(0, t_1) \widehat{V}'_{\zeta_1, t_1}(0)) dt_1 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} (\widehat{K}'_{\zeta_0, t_0}(0, t_1) \widehat{K}_{\zeta_1, t_1}(0, t_2) + \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(0, t_1) \widehat{K}'_{\zeta_1, t_1}(0, t_2)) dt_2 dt_1, \\ \psi_{\zeta_0, t_0}(t) &= \int_0^\infty \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(0, t_1) \widehat{K}_{\zeta_1, t_1}(0, t) dt_1, \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \widehat{V}_{\zeta_0, t_0}(0) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} D_{\zeta_0, t_0}(s, t) ds dt, \\ \widehat{V}'_{\zeta_0, t_0}(0) &= - \int_{\mathbb{R}_+^2} s D_{\zeta_0, t_0}(s, t) ds dt, \\ \widehat{K}_{\zeta_0, t_0}(0, t) &= \int_0^\infty D_{\zeta_0, t_0}^+(s, t) ds, \\ \widehat{K}'_{\zeta_0, t_0}(0, t) &= - \int_0^\infty s D_{\zeta_0, t_0}^+(s, t) ds - t \int_0^\infty D_{\zeta_0, t_0}^+(s, t) ds. \end{aligned}$$

2.6. Экспоненциальные распределения рабочих интервалов.

Пусть

$$f_w(x) = \alpha \exp(-\alpha x), \quad g_w(x) = \beta \exp(-\beta x).$$

Тогда все условные вероятности относительно фиксированных t_0 равны безусловным вероятностям при $t_0 = 0$, и мы можем освободиться

от второго нижнего индекса во всех вероятностях и математических ожиданиях, где он присутствует. Например,

$$\widehat{W}_{\zeta, t_0}(\lambda) = \widehat{W}_{\zeta, 0}(\lambda) = \widehat{W}_\zeta(\lambda).$$

Поэтому интегральное уравнение (17) превращается в линейное алгебраическое относительно неизвестной функции $\widehat{W}_\zeta(\lambda)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{\zeta_0}(\lambda) &= \widehat{V}_{\zeta_0}(\lambda) + \int_0^\infty \widehat{K}_{\zeta_0}(\lambda, t_1) \widehat{V}_{\zeta_1}(\lambda) dt_1 \\ &+ \widehat{W}_{\zeta_0}(\lambda) \int_{\mathbb{R}_+^2} \widehat{K}_{\zeta_0}(\lambda, t_1) \widehat{K}_{\zeta_1}(\lambda, t_2) dt_2 dt_1. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом

$$E_{\zeta_0}(T) \equiv -\widehat{W}'_{\zeta_0}(0) = \frac{A}{B},$$

где

$$A = -J_{\zeta_0} - J_{\zeta_1} C_{\zeta_0}^+ - C_{\zeta_1} J_{\zeta_0}^+ - \frac{C_{\zeta_0} + C_{\zeta_1} C_{\zeta_0}^+}{1 - C_{\zeta_0}^+ C_{\zeta_1}^+} (J_{\zeta_0}^+ C_{\zeta_1}^+ + C_{\zeta_0}^+ J_{\zeta_1}^+),$$

$$B = 1 - C_{\zeta_0}^+ C_{\zeta_1}^+,$$

а также

$$\begin{aligned} C_\zeta &\equiv \widehat{V}_\zeta(0) = \int_{\mathbb{R}_+^2} D_\zeta(s, t) ds dt, \\ J_\zeta &\equiv \widehat{V}'_\zeta(0) = - \int_{\mathbb{R}_+^2} s D_\zeta(s, t) ds dt, \\ C_\zeta^+ &\equiv \int_0^\infty \widehat{K}_\zeta(0, t) dt = \int_{\mathbb{R}_+^2} D_\zeta^+(s, t) ds dt, \\ J_\zeta^+ &\equiv \int_0^\infty \widehat{K}'_\zeta(0, t) dt = - \int_{\mathbb{R}_+^2} (s + t) D_\zeta^+(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Для завершения представления $E_{\zeta_0}(T)$ в исходных терминах нам осталось выразить эти четыре коэффициента в исходных терминах для каждого из двух значений $\zeta \in \{zw, wz\}$. Опуская громоздкие детали вывода, приведём формулы при начальном значении $\zeta_0 = zw$ ($\zeta_1 = wz$)

$$C_{zw} = \frac{(\alpha + \beta)(1 - \hat{f}_z(\beta))}{\alpha + \beta - \alpha \hat{f}_z(\beta)}, \quad (19)$$

$$J_{zw} = \alpha(1 - \hat{f}_z(\beta)) \left((\alpha + \beta) \frac{\partial(\hat{f}_z(\beta))}{\partial \beta} - \hat{f}_z(\beta) \right) (\alpha + \beta - \alpha \hat{f}_z(\beta))^{-2}, \quad (20)$$

$$C_{zw}^+ = \frac{\beta \hat{f}_z(\beta)}{\alpha + \beta - \alpha \hat{f}_z(\beta)}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J_{zw}^+ = -\beta & \left(\alpha(\hat{f}_z(\beta))^2 + (\alpha + \beta)^2 \frac{\partial(\hat{f}_z(\beta))}{\partial \beta} \right) \\ & \times (\alpha + \beta)^{-1} (\alpha + \beta - \alpha \hat{f}_z(\beta))^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Принцип симметрии, который мы используем при замене zw на wz , состоит в том, что в этих формулах совершается замена символов $(zw, wz, \alpha, \beta, \hat{f}_z, \hat{g}_z)$ на соответствующие символы из набора

$$(wz, zw, \beta, \alpha, \hat{g}_z, \hat{f}_z).$$

§3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ИМИТАЦИИ

Выведенные формулы для математического ожидания времени безотказной работы системы и их использование для получения значения этой величины в случае экспоненциального распределения длин рабочих интервалов показывают нетривиальность аналитического исследования случайного муара. Тем большую трудность представляет задача оптимизации случайного муара по какому-либо осмысленному критерию. В нашем случае таким критерием естественно выбрать само математическое ожидание. При нашей постановке задачи интересно вывести зависимость этой величины от контролируемого параметра — начального времененного сдвига t_0 . Очевидно, что в самом простом в вычислительном смысле варианте задачи, когда распределение длины рабочего интервала экспоненциально, задача оптимизации по начальному сдвигу теряет смысл. В общем случае для практических

расчётов целесообразно использовать метод непосредственной имитации компонентов двумерной системы независимых альт-процессов. Современная вычислительная техника достаточно легко справляется с этой задачей.

Нами была составлена программа такого численного исследования зависимости математического ожидания времени безотказной работы системы от основных её параметров. Ниже мы показываем один из результатов этого исследования.

Была произведена имитация процессов на компьютере с помощью генератора псевдослучайных чисел. При этом, предполагалось, что процессы симметричны, длины интервалов a_w, b_w распределены равномерно на интервале $(0, 1)$, а длины интервалов a_z, b_z распределены равномерно на интервале $(0, c)$ ($c > 0$). Ниже мы показываем гистограммы средне-арифметической оценки математического ожидания времени T как функции от $t_0 \in (0, 1)$ при двух вариантах величины $c : c < 1, c = 1, c > 1$.

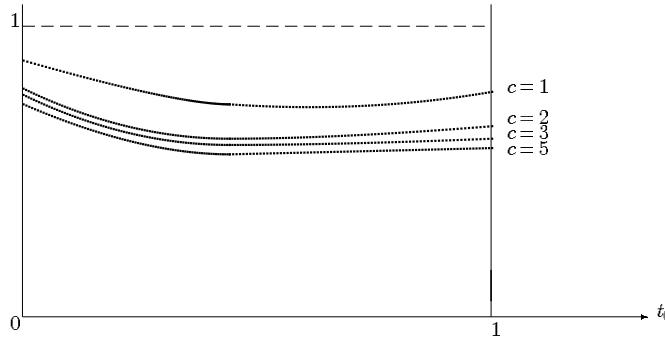


Рис. 2. Зависимость условного математического ожидания времени T от t_0

Были вычислены оценки математического ожидания первого момента двойного отказа системы при 100 различных значениях параметра t_0 (от 0 до 1 с шагом 0,01). Для расчета каждой оценки использовалось до 300 000 имитаций двух независимых альт-процессов до момента двойного отказа. Для такого объёма выборки гистограмма выглядит как гладкая кривая (см. Рис. 2). Исходя из этих результатов можно сделать вывод о том, что при некотором соотношении расположений длительностей рабочего и нерабочих интервалов минимум

$E_{\zeta, t_0} T$ достигается внутри интервала допустимых значений начального сдвига t_0 , а два локальных максимума сосредоточены на краях интервала. Мы полагаем, что этот эффект может иметь практическое значение при свободе выбора момента подключения резервного агрегата, когда основной агрегат ещё работает.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Герцбах, Х. Б. Кордонский, *Модели отказов*. М., 1966.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 2. Наука, М., 1973.
3. Д. Кокс, В. Смит, *Теория восстановления*. Сов. радио, М., 1967.
4. О. Н. Кукушкин, *Модель эксплуатационной надёжности разветвлённых технологических линий*. — Системные технологии, 4 (87) (2013), 174–179.

Harlamov B. P., Proursin O. V. On interval of faultless work for a system of two independent alternating renewal processes.

A system of two independent alternating renewal processes with states 0 and 1, and an initial shift t_0 of one process relative to another one is considered. An integral equation with respect to an expectation of time T (the first time when both processes have state 0) is derived. For deriving a method of so called minimal chains of overlapping 1-intervals is used. Such a chain generates some breaking semi-Markov process of intervals composing the interval $(0, T)$. A solution of the integral equation is obtained for the case when lengths of 1-intervals have exponential distributions and lengths of 0-intervals have distributions of common view. For more general distributions of 1-intervals the Monte Carlo method is applied when both processes are simulated numerically by computer. Histograms for estimates of the expectation of T as a function of t_0 are demonstrated.

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербург
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 12 октября 2015 г.