Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

А. С. Сипин

О СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§1. Введение

Вероятностные представления решений краевых задач для уравнений в частных производных эллиптического и параболического типа хорошо известны. Их практическое использование для вычисления решений краевых задач и функционалов от этих решений связано с моделированием траекторий диффузионных процессов, что является весьма трудоемкой задачей. В алгоритмах статистического моделирования решений интегральных уравнений и уравнений в частных производных обычно используют представления этих решений в виде математических ожиданий функционалов на траекториях случайных блужданий. Подробное описание и примеры применения таких алгоритмов можно найти в монографиях [1, 2]. В данной работе рассматриваются новые алгоритмы статистического моделирования для решения краевых задач для оператора Лапласа в областях, часть границы которых плоская. На плоском участке границы задаётся условие Неймана, а на остальной части границы – условие Дирихле. Статистические оценки решения краевой задачи строятся на траекториях случайного блуждания, которое мы называем "блужданием по полусферам". Основу алгоритма, составляет формула среднего значения для дважды непрерывно дифференцируемой функции в полушаре. Алгоритм позволяет точно учесть нормальную производную решения на плоских границах.

§2. Функция Грина–Неймана для полушара

Пусть область T – половина шара радиуса ρ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n, n > 2$, S – её сферическая, H – плоская часть границы и x_0 является центром сферы. Будем считать, что S является открытым множеством, H – замкнутым. Для точки $x \in T$ определим x^* как

Ключевые слова: несмещенная оценка, краевые задачи, оператор Лапласа, метод Монте-Карло.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00271, 15-01-01698.

точку, симметричную x относительно сферы S. Пусть $\overline{x}$ и $\overline{x^*}$ – точки, симметричные x и x^* относительно плоскости H. Функция Грина $G(x,y)$ задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре строится методом отражений и имеет вид

$$G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{\rho^{n-2}}{|x-x_0|^{n-2}}\frac{1}{|x^*-y|^{n-2}}\right), \tag{2.1}$$

где σ_n – площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbf{R}^n$.

Определим функцию $\widetilde{G}(x,y)$ равенством

$$\widetilde{G}(x,y) = G(x,y) + G(\overline{x},y) \tag{2.2}$$

Справедлива очевидная лемма

Лемма 1. (1) *Функция $\widetilde{G}(x,y)$ гармоническая в $T\setminus\{x\}$ по переменной y;*

(2) $\widetilde{G}(x,y) = 0$ *для* $y \in S$;

(3) *Нормальная производная* $\partial\widetilde{G}(x,y)/\partial n_y = 0$ *для* $y \in H$

Доказательство. Действительно, функция $G(x,y)$ обладает первыми двумя свойствами, функция $G(\overline{x},y)$ – гармоническая в T и равна нулю на сфере. Функцию $\widetilde{G}(x,y)$ запишем в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(x,y) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n}\Big[\Big(&\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{1}{|\overline{x}-y|^{n-2}}\Big)\\ &- \frac{\rho^{n-2}}{|x-x_0|^{n-2}}\Big(\frac{1}{|x^*-y|^{n-2}} + \frac{1}{|\overline{x^*}-y|^{n-2}}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Вычислив нормальную производную фундаментального решения на H,

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \frac{(n-2)(x-y,n_y)}{|x-y|^n} = \frac{(n-2)(x-x_0,n_y)}{|x-y|^n},$$

находим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial n_y}\Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{1}{|\overline{x}-y|^{n-2}}\Big)\\ &\qquad = \frac{(n-2)(x-x_0,n_y)}{|x-y|^n} + \frac{(n-2)(\overline{x}-x_0,n_y)}{|\overline{x}-y|^n} = 0,\end{aligned}$$

так как $|x-y| = |\overline{x}-y|$ и $(x-x_0,n_y) = -(\overline{x}-x_0,n_y)$ при $y \in H$. $\square$

Из неотрицательности ядра Пуассона

$$p(x,y) = -\partial G(x,y)/\partial n_y$$

на сфере S и второй формулы Грина вытекает

Лемма 2. (1) *Для функции $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой в полушаре и имеющей непрерывные частные производные в замкнутом полушаре справедливо интегральное представление*

$$\begin{aligned} u(x) = &-\int\limits_S \frac{\partial \widetilde{G}(x,y)}{\partial n_y} u(y) d_y S \\ &+ \int\limits_H \widetilde{G}(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} d_y S - \int\limits_T \widetilde{G}(x,y) \Delta u(y) dy; \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2) *Функция $\widetilde{p}(x,y) = -\partial \widetilde{G}(x,y)/\partial n_y$ является плотностью вероятности по переменной $y \in S$.*

Моделирование переходной плотности $p(x,y)$ обсуждалось многими авторами (см., например, [3]). Для моделирования $\widetilde{p}(x,y)$ воспользуемся "принципом отражения".

Лемма 3. *Пусть D шар, T – его полушар. Если случайная точка $Y \in \partial D$ и имеет плотность распределения $p(x,y)$, то новая случайная точка $\widetilde{Y}$, совпадающая с Y при $Y \in S$ и равная $\overline{Y}$ в противоположном случае, распределена на S с плотностью $\widetilde{p}(x,y)$.*

Доказательство. Из формулы для ядра Пуассона

$$p(x,y) = \frac{\rho^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n \rho |x-y|^n}, \tag{2.4}$$

следует, что $p(x,y) = p(\overline{x}, \overline{y})$. Для любого борелевского подмножества B полусферы S

$$\begin{aligned} \int\limits_B \widetilde{p}(x,y) d_y S &= \int\limits_B p(x,y) d_y S + \int\limits_B p(\overline{x},y) d_y S \\ &= \int\limits_B p(x,y) d_y S + \int\limits_B p(x,\overline{y}) d_y S = \mathbf{P}(\{Y \in B\}) + \mathbf{P}(\{\overline{Y} \in B\}) \\ &= \mathbf{P}(\{\widetilde{Y} \in B\}). \quad \square \end{aligned}$$

Известно, что ядро Пуассона является плотностью распределения точки первого выхода на сферу для броуновского движения, стартующего из точки x в шаре D. Аналогичный результат для плотности $\widetilde{p}(x,y)$ дает

Лемма 4. *По переменной y функция $\widetilde{p}(x,y)$ является плотностью распределения точки первого выхода на полусферу для броуновского движения с отражением от плоской границы, стартующего из точки x в полушаре T.*

Доказательство. Пусть B – борелевское подмножество полусферы S и B^- – симметричное ему множество относительно H. Броуновское движение с отражением – это обычное броуновское движение, часть траектории которого, не лежащая в полупространстве, содержащем T, отражена относительно H. Следовательно, вероятность того, что точка его первого выхода на полусферу лежит в B совпадает с вероятностью того что точка первого выхода обычного броуновского движения на сферу лежит в $B \cup B^-$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\int\limits_B p(x,y)d_yS + \int\limits_{B^-} p(x,y)d_yS = \int\limits_B \widetilde{p}(x,y)d_yS. \qquad \square$$

§3. Случайное блуждание для решения смешанной краевой задачи

Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, Γ – ее граница, $\overline{D} = D \cup \Gamma$ – замыкание D. В данном разделе рассматривается алгоритм статистического моделирования, решающий для уравнения Пуассона $\Delta u(x) = -f(x)$ краевую задачу со смешанным граничным условием. А именно, пусть граница Γ области D состоит из двух частей Γ_1 и Γ_2. Требуется найти решение уравнения $u(x)$ по его значениям на Γ_1 и значениям нормальной производной на Γ_2. Интегральное представление (2.3) позволяет построить аналог хорошо известного *блуждания по сферам* в том случае, когда связные компоненты границы Γ_2 являются плоскими.

Определим в области D случайный процесс *блуждания по сферам с отражением от плоской границы* Γ_2. Для этого зададим параметр $\lambda (0 < \lambda < 1)$ и параметр $\mu (0 < \mu < 1/(1+\lambda))$, а каждой точке $x \in D$

сопоставим область $T(x) \subset D$. Область $T(x)$ является полушаром радиуса $\rho = \rho(x_0)$ с центром в некоторой точке $x_0 \in \Gamma_2$, лежащим в D и содержащим точку x, плоская граница которого $H \subset \overline{\Gamma}_2$. Кроме того, должны быть выполнены условия: $|x - x_0| \leqslant \lambda\rho$ и $\rho \geqslant \mu d_1(x)$, где $d_1(x)$ – расстояние от точки x до Γ_1. В противном случае, $T(x)$ является шаром максимального радиуса $d(x)$ с центром в точке x, лежащим в D. В первом случае, переход из точки x осуществляется в точку y , которая распределена с плотностью $\widetilde{p}(x, y)$ на полусфере. Во втором случае, точка y распределена равномерно на сфере максимального радиуса с центром в точке x. Очевидно, что в точках близких к границе Γ_2 будет происходить переход на полусферу, то есть будет осуществляться "отражение" от границы.

Будем считать, что Γ_1 – замкнутое множество, а Γ_2 – открытое. Точки границы Γ_1 будем считать поглощающими состояниями для *блуждания по сферам с отражением от плоской границы.* Для $x \in \Gamma_2$ переход осуществляется в точку y, распределенную равномерно на сферической границе S полушара $T(x)$ с центром в точке x и радиусом $\rho = d_1(x)$, равным расстоянию от x до Γ_1. В этом случае, для решения $u(x)$ вместо (2.3) используется представление

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \frac{2}{\sigma_n \rho^{n-1}} \int\limits_S u(y)\, d_y S \\ & + \frac{2}{\sigma_n (n-2)} \int\limits_H \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{\rho^{n-2}} \right) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, d_y S \\ & + \frac{2}{\sigma_n (n-2)} \int\limits_{T(x)} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{\rho^{n-2}} \right) f(y)\, dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Изучим поведение траекторий процесса.

Лемма 5. *Пусть область D такая, что для всякой непрерывной на Γ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_\Gamma \varphi(x)\, d_x S = 0,$$

существует гармоническая в области D функция, имеющая нормальную производную $\varphi(x)$. Пусть Γ_1 содержит замкнутое подмножество Γ_3, имеющее положительную площадь, и расстояние от которого до $\overline{\Gamma}_2$ положительно. Тогда блуждание по сферам с отражением от плоской границы сходится с вероятностью 1 к случайной точке $x_\infty \in \Gamma_1$.

Доказательство. При доказательстве аналогичной леммы в [1, лемма 20, с. 202] установлено, что существует гармоническая в области D функция $u(x)$, такая что $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 1$ при $x \in \Gamma_2$.

Пусть x_i – положение блуждания в момент времени i. Из уравнения (2.3) для построенной функции $u(x)$ следует, что последовательность случайных величин $u(x_i)$ является ограниченным супермартингалом, который сходится с вероятностью 1. Аналогичными свойствами обладает последовательность $u(x_i) + v_j(x_i)$ для любой координатной функции $v_j(x)$. Значит, последовательность x_i сходится с вероятностью 1 к некоторой точке x_∞. Если в процессе блуждания переход на сферу был бесконечное число раз, то на некоторой подпоследовательности i_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ выполняется равенство

$$d(x_{i_j}) = |x_{i_j+1} - x_{i_j}|.$$

Переходя в нем к пределу, получим $d(x_\infty) = 0$. Если $x_\infty \in \Gamma_2$, то существует $\rho_\infty > 0$, такое что полушар T радиуса ρ_∞ с центром в x_∞ лежит в D. Следовательно, из всех точек траектории, отстоящих от x_∞ на расстояние не более чем $\lambda\rho_\infty$ переход осуществлялся на полусферу. Таким образом, переход на сферу осуществляется конечное число раз. Полученное противоречие показывает, что $x_\infty \in \Gamma_1$.

Рассмотрим множество B траекторий , в которых, начиная с некоторого момента времени, блуждание происходит по полусферам. Пусть ρ_i – радиус полусферы, тогда $|x_{i+1} - x_i| \geqslant (1-\lambda)\rho_i$. Следовательно, для почти всех траекторий из множества B последовательность ρ_i стремится к нулю, а последовательнсть центров полусфер $x_{0,i}$ сходится к $x_\infty \in \overline{\Gamma}_2$. Пусть ρ_∞ – радиус полусферы с центром в точке x_∞. Если $x_\infty \in \Gamma_2$, то $\rho_\infty > 0$ и $\rho_i > \rho_\infty/2$ при $|x_\infty - x_{0,i}| < \rho_\infty/2$. Полученное противоречие показывает, что почти наверное все траектории сходятся к случайной точке $x_\infty \in \Gamma_1$. $\square$

§4. Построение несмещенной оценки решения смешанной краевой задачи

Полученные интегральные представления для полушара (2.3) и (3.5) и аналогичное (3.5) интегральное представление решения $u(x)$ в шаре $B(x)$ радиуса $d = d(x)$

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \frac{1}{\sigma_n d^{n-1}} \int\limits_S u(y)\, d_y S \\ & + \frac{1}{\sigma_n (n-2)} \int\limits_{B(x)} \Big(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{d^{n-2}} \Big) f(y)\, dy \end{aligned} \tag{4.6}$$

будем рассматривать как интегральное уравнение

$$u(x) = \int\limits_{\overline{D}} u(y)\, P(x, dy) + F_1(x) + F_2(x), \tag{4.7}$$

со стохастическим ядром $P(x, dy)$, определяемым переходными вероятностями описанного выше случайного блуждания. Уравнение (4.7) будем рассматривать в пространстве ограниченных на $\overline{D}$ функций. Функция $F_1(x)$, входящая в его правую часть выражается через интеграл от нормальной производной решения, а функция $F_2(x)$ – через интеграл от правой части уравнения Пуассона. В силу линейности уравнения $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_1(x)$ – решение уравнения Пуассона при $f(x) = 0$ и $\partial u(x)/\partial n = \varphi(x)$, а $u_2(x)$ – решение уравнения Пуассона с правой частью $f(x)$ и $\partial u(x)/\partial n = 0$.

Рассмотрим уравнение (4.7) с правой частью $F_2(x)$, которую представим в виде $F_2(x) = h_2(x)\mathbf{E} f(Y)$, где $h_2(x) > 0$, случайная величина Y имеет распределение, зависящее от x, а функция $f(y)$ является правой частью дифференциального уравнения Пуассона. Пусть $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ – траектория блуждания, стартующего из точки $x_0 = x$, а $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$ – поток σ–алгебр, порожденный блужданием. Пусть $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ – последовательность случайных величин, таких что

$$F_2(x_i) = h_2(x_i)\mathbf{E}_{x_i}(f(y_i) \mid \mathfrak{A}_i) \tag{4.8}$$

п.н. и $\mathfrak{B}_i$ – минимальная $\sigma-$алгебра, порожденная $\mathfrak{A}_i$ и последовательностью $\{y_j\}_{j=0}^{i}$, тогда последовательность случайных величин

$$\xi_i = \sum_{j=0}^{i-1} h_2(x_j) f(y_j) + u(x_i) \tag{4.9}$$

образует мартингал несмещенных оценок для $u_2(x)$.

Очевидным следствием результатов §5.2.2 книги [1] является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть уравнение Пуассона с правой частью $f(x) \equiv 1$ имеет в области D решение, непрерывное в $\overline{D}$ с нулевой нормальной производной на Γ_2, тогда мартингал оценок* (4.9) *– квадратично интегрируемый и* $\limsup \mathbb{E}_x \xi_i^2 < \infty$.

Таким образом, мартингал оценок (4.9) – равномерно интегрируемый и для любого конечного марковского момента τ случайная величина ξ_τ является несмещенной оценкой для $u_2(x)$ и имеет конечную дисперсию. Несмещенные оценки для $u_1(x)$ строятся и исследуются аналогично.

Выбирая в качестве момента остановки τ_δ – момент первого попадания блуждания в $\delta-$окрестность границы Γ_1, с учётом леммы 3 получаем несмещенную оценку ξ_{τ_δ} для $u_2(x)$ с конечной дисперсией. При практических вычислениях с использованием данной оценки, неизвестное значение $u_2(x_{\tau_\delta})$ заменяют на значение решения в точке границы, близкой к точке остановки блуждания. При этом получается незначительное смещение оценки, которое обычно определяют методами экстраполяции по параметру δ.

Для вычисления решения краевой задачи методом Монте-Карло с помощью построенной оценки необходимо доказать конечность математического ожидания времени первого попадания блуждания в δ – окрестность границы Γ_1. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть уравнение Пуассона с правой частью $f(x) \equiv 1$ имеет в области D неотрицательное решение $\widetilde{u}_2(x)$, непрерывное в $\overline{D}$, с нулевой нормальной производной на Γ_2, тогда при некоторой положительной постоянной c и всех $x \in D$, не лежащих в δ-окрестности Γ_1, выполнено неравенство $\mathbf{E}_x \tau_\delta \leqslant \widetilde{u}_2(x)/c\delta^2$.*

Доказательство. Вычисляя функцию $h_2(x)$, получаем равенства: $h_2(x) = d^2(x)/2n$, если выполняется переход из точки x на сферу;

$h_2(x) = (\rho^2(x_0) - |x - x_0|^2)/2n$, если выполняется переход из точки x на полусферу; $h_2(x) = d_1^2(x)/2n$, если выполняется переход из точки $x \in \Gamma_2$ на полусферу. Для точек x, лежащих вне δ – окрестности Γ_1, выполнены неравенства: $d_1(x) \geqslant \delta$, $(\rho^2(x_0) - |x - x_0|^2) \geqslant (1-\lambda^2)\mu^2 d_1^2(x)$. Оценим снизу величину $d(x)$ при переходе из точки x на сферу. Достаточно рассмотреть случай $d(x) < d_1(x)$. Тогда существует точка $x_0 \in \Gamma_2$, расстояние до которой от x равно $d(x)$. Рассмотрим полушар радиуса $\mu d_1(x)$ с центром в точке x_0. Если он не содержит точек множества Γ_1, то $d(x) \geqslant \lambda\mu d_1(x)$. В противном случае, выполнены неравенства $d_1(x) \leqslant d(x) + \mu d_1(x) < (1+\lambda)\mu d_1(x)$, то есть $\mu > 1/(1+\lambda)$, что противоречит выбору μ. Таким образом, существует такая постоянная c, что при всех $x \in D$ верно неравенство $h_2(x) > c d_1^2(x)$. Тогда, для несмещенной оценки ξ_{τ_δ} для $\widetilde{u}_2(x)$ верно неравенство $\xi_{\tau_\delta} \geqslant \tau_\delta c\delta^2$ и $\widetilde{u}_2(x) = \mathbf{E}_x \xi_{\tau_\delta} \geqslant c\delta^2 \mathbf{E}_x \tau_\delta$. □

Замечание. Аналогичным образом можно построить случайное блуждание для решения смешанной задачи для уравнения Лапласа вне области D. Применение формулы Пуассона для решения внешней задачи Дирихле для шара позволяет построить блуждание в ограниченной области.

Литература

1. С. М. Ермаков, А. С. Сипин, *Метод Монте-Карло и параметрическая разделимость алгоритмов*, С.-Петербург, СПбГУ, 2014.
2. К. К. Сабельфельд, *Методы Монте-Карло в краевых задачах*, Новосибирск, Наука, 1989.
3. S. M. Ermakov, V. V. Nekrutkin, A. S. Sipin, *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

Sipin A.S. On stochastic algorithms for solving boundary value problems for the Laplace operator.

The paper deals with the mixed boundary value problem for the Poisson equation. A random walk inside the domain are constructed and unbiased

estimator for the solution of the boundary value problem defined on its trajectories. The finiteness of the estimator variance proved. The possibility of practical realization of the estimator by Monte Carlo method studied.

Вологодский государственнй университет,
ул. Ленина 15, г.Вологда,
Вологодская область,160000, Россия
E-mail: cac1909@mail.ru

Поступило 7 декабря 2015 г.