Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

О. В. Русаков

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПСЕВДОПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОХОДА

Определим процесс случайного индекса $\psi(s)$, $s \geqslant 0$, как случайную пуассоновскую замену математического времени, то есть индекса, у последовательности случайных величин $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots,$

$$\psi(s) \stackrel{\triangle}{=} \xi_{\Pi(s)}, \qquad (\star)$$

где ведущий пуассоновский процесс $\Pi(s)$ с интенсивностью $\lambda > 0$ предполагается независимым от последовательности (ξ), которую мы называем формирующей. Для процесса случайного индекса используем сокращение ПСИ. Заметим, что процессы случайного индекса представляют собой пуассоновские субординаторы для последовательностей.

Процесс случайного индекса имеет кусочно-постоянные траектории, непрерывные справа, имеющие пределы слева, со скачками только в моменты скачков ведущего пуассоновского процесса, причем не обязательно во все.

Процессы случайного индекса рассмотрены в классической монографии У. Феллер [2, гл. X] в случае, когда формирующая последовательность – цепь Маркова. В этом случае они называются псевдопуассоновскими процессами. Отметим, что при условии марковости формирующей последовательности, псевдопуассоновский процесс является марковским с непрерывным временем. Таким образом, пуассоновская субординация для последовательностей позволяет вкладывать последние в непрерывное время, сохраняя марковское свойство.

Мы здесь рассмотрим суммы независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов, когда каждая формирующая последовательность состоит из независимых, одинаково распределенных

Ключевые слова: пуассоновские субординаторы для последовательностей, суммы псевдопуассоновских процессов, относительная компактность семейства распределений в пространстве Скорохода, сходимость к процессу Орнштейна–Уленбека в функциональном пространстве Скорохода.

случайных величин. В таком случае сумма уже двух независимых псевдопуассоновских процессов перестает быть марковским процессом, однако предел бесконечного числа слагаемых псевдопуассоновских процессов (при надлежащей нормировке) опять обретает свойство марковости, ибо предел – процесс Орнштейна–Уленбека – стационарный гауссовский марковский процесс. Сходимость конечномерных распределений здесь является прямым следствием центральной предельной теоремы для векторов. Определенную сложность представляет относительная компактность (плотность) семейства допредельных распределений, доказательство которой и составляет основное содержание данной работы.

Зафиксируем достаточно большое $N \in \mathbf{N}$. Рассмотрим сумму независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса (ψ_i) (независимых копий процесса $\psi(s)$), теперь уже заданных на конечном промежутке $[0, \Theta]$,

$$\Psi_N(s) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i(s), \quad s \in [0, \Theta]. \tag{1}$$

Формирующие последовательности процессов ψ_i обозначим, соответственно, $(\xi)(i) = \xi_0(i), \xi_1(i), \ldots,\ i = 1, \ldots, N$. Все случайные величины $(\xi_n(i))$ предполагаются совокупно независимыми по всем сочетаниям значений индексов $n \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, N$; одинаково распределенными, с нулевым средним и дисперсией $1/N$. Все ведущие пуассоновские процессы независимы в совокупности и не зависят от формирующих последовательностей.

Теорема 1. *Рассмотрим ломаные, построенные по значениям процесса $\Psi_N(s)$, как элементы пространства Скорохода $D_{[0,\Theta]}$, $\Theta < \infty$. Данное семейство случайных ломаных относительно компактно в $D_{[0,\Theta]}$.*

Доказательство. Зафиксируем точки $0 \leqslant v < u < s \leqslant \Theta$ на оси времени. Для доказательства относительной компактности семейства распределений, порожденных данными ломаными, воспользуемся следующим критерием из книги П. Биллингсли [1, с. 179]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\big\{|\Psi_N(u) - \Psi_N(v)| \geqslant \varepsilon, \quad |\Psi_N(s) - \Psi_N(u)| \geqslant \varepsilon\big\} \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{2\gamma}} \left|F(s) - F(v)\right|^{2\alpha} \end{aligned} \tag{2}$$

для некоторой непрерывной функции F, неубывающей на $[0,\Theta]$, при параметрах $\gamma \geqslant 0$, $\alpha > 1/2$, для любого положительного $\varepsilon < 1$.

Основная идея заключается в разбиении множества слагаемых, формирующих случайную функцию Ψ, на специальные подмножества, на которых возникает та или иная независимость, которая в последствии и обыгрывается.

Множество индексов суммирования $\{1,\dots,N\}$ в (1) разобьем на 4 случайных подмножества по принципу: были или нет скачки у ведущих пуассоновских процессах на интервалах времени $[v,u)$ и $[u,s]$. Как видно в дальнейшем, основную роль здесь играет следующее случайное множество

$$\mathcal{A} = \{i = i(\omega):\ \Pi_i(u-)(\omega) > \Pi_i(v)(\omega),\, \Pi_i(s)(\omega) > \Pi_i(u)(\omega)\}\,. \qquad (3)$$

Другими словами, множество $\mathcal{A}$ – это множество индексов для тех процессов ψ_i, у которых были замещения членов формирующих последовательностей и на интервале $[v,u)$, и на интервале $[u,s]$. Множество $\mathcal{A}$ измеримо относительно прямого произведения σ-алгебр, порожденных траекториями N независимых пуассоновских процессов до момента s включительно, $\bigotimes\limits_{i=1}^{N} \sigma\{\Pi_i(\leqslant s)\}$.

Аналогично определим множества:
$\mathcal{B}$ – это множество индексов тех процессов ψ_i, у которых были замещения членов формирующих последовательностей на интервале $[v,u)$, а на интервале $[u,s]$ – не было;
$\mathcal{C}$ – это множество индексов тех процессов ψ_i, у которых не было замещений членов формирующих последовательностей на интервале $[v,u)$, а на интервале $[u,s]$ – были;
$\mathcal{D}$ – это множество индексов тех процессов ψ_i, у которых не было замещений членов формирующих последовательностей ни на интервале $[v,u)$, ни на интервале $[u,s]$. Формально,

$$\mathcal{B} = \{i:\ \Pi_i(u-) > \Pi_i(v),\, \Pi_i(s) = \Pi_i(u)\}\,;$$
$$\mathcal{C} = \{i:\ \Pi_i(u-) = \Pi_i(v),\, \Pi_i(s) > \Pi_i(u)\}\,;$$
$$\mathcal{D} = \{i:\ \Pi_i(u-) = \Pi_i(v),\, \Pi_i(s) = \Pi_i(u)\}\,.$$

Заметим, что несмотря на то, что множества $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ случайны, в силу закона больших чисел для пуассоновских индикаторов их мощности асимптотически вырождены, то есть верна следующая эквивалентность при $N \to \infty$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\#\mathcal{A}}{N} & \sim & \left(1 - e^{-\lambda(u-v)}\right)\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right) \triangleq e_{\mathcal{A}}; \\ \frac{\#\mathcal{B}}{N} & \sim & \left(1 - e^{-\lambda(u-v)}\right) e^{-\lambda(s-u)} \triangleq e_{\mathcal{B}}; \\ \frac{\#\mathcal{C}}{N} & \sim & e^{-\lambda(u-v)}\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right) \triangleq e_{\mathcal{C}}; \\ \frac{\#\mathcal{D}}{N} & \sim & e^{-\lambda(u-v)}\, e^{-\lambda(s-u)} \triangleq e_{\mathcal{D}}. \end{array}$$

Очевидно, $\#\mathcal{A} + \#\mathcal{B} + \#\mathcal{C} + \#\mathcal{D} = N$ (знак $\#$ означает мощность множества).

Из данных эквивалентностей очевидно следуют равенства для математических ожиданий индикаторов того, что индекс ПСИ принадлежит тому или иному случайному множеству $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, или $\mathcal{D}$:

$$\mathbf{E}\, \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(i) = \mathbf{E}\, \mathbb{I}(i \in \mathcal{A}) = e_{\mathcal{A}}; \quad \mathbf{E}\, \mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i) = \mathbf{E}\, \mathbb{I}(i \in \mathcal{B}) = e_{\mathcal{B}};$$

$$\mathbf{E}\, \mathbb{I}_{\mathcal{C}}(i) = \mathbf{E}\, \mathbb{I}(i \in \mathcal{C}) = e_{\mathcal{C}}; \quad \mathbf{E}\, \mathbb{I}_{\mathcal{D}}(i) = \mathbf{E}\, \mathbb{I}(i \in \mathcal{D}) = e_{\mathcal{D}},$$

для всех $i = 1, \ldots, N$ для каждого из четырех типов индикаторов.

Также нам потребуются вторые моменты для мощностей случайных множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, и $\mathcal{D}$, которые нетрудно вычислить, применив данные математические ожидания для независимых одинаково распределенных индикаторов вида $\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(i)$, $i = 1, \ldots, N$, и для остальных множеств $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, соответственно.

Рассмотрим приращения $\big(\Psi_N(u) - \Psi_N(v)\big)$ и $\big(\Psi_N(s) - \Psi_N(u)\big)$ из критерия относительной компактности (2). Оговоримся, что случай, когда у ведущих пуассоновских процессов есть скачок на уровне u мы исключаем из рассмотрения по причине нулевой вероятности. Заметим, что данные приращения зависимы по причине одинаковых слагаемых из формирующих последовательностей на уровне u. Отметим, что на множествах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ одно из приращений нулевое, а на множестве $\mathcal{D}$ – оба. Также отметим, что оба из рассматриваемых приращений независимы на любых попарно непересекающихся множествах суммирования процессов ψ.

Введем обозначения

$$X_{\mathcal{F}} \triangleq \sum_{i \in \mathcal{F}} \big(\psi_i(u) - \psi_i(v)\big), \qquad \mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}.$$

В силу построения множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ приращения $X_{\mathcal{C}}$ и $X_{\mathcal{D}}$ принимают нулевые значения, поэтому $\Psi_N(u) - \Psi_N(v) = X_{\mathcal{A}} + X_{\mathcal{B}}$. Аналогично введем обозначения для интервала $[\,u, s\,]$

$$Z_{\mathcal{F}} \triangleq \sum_{i \in \mathcal{F}} \big(\psi_i(s) - \psi_i(u)\big), \qquad \mathcal{F} = \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}.$$

Приращения $Z_{\mathcal{B}}$ и $Z_{\mathcal{D}}$ принимают нулевые значения, поэтому верно равенство $\Psi_N(s) - \Psi_N(u) = Z_{\mathcal{A}} + Z_{\mathcal{C}}$. Тем самым, вероятность из левой части (2) удовлетворяет следующей цепочке оценок

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big\{|\Psi_N(u) - \Psi_N(v)| \geqslant \varepsilon,\ |\Psi_N(s) - \Psi_N(u)| \geqslant \varepsilon\big\} \\
&\quad = \mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{A}} + X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon,\ |Z_{\mathcal{A}} + Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon\big\} \\
&\quad \leqslant \mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{A}}| + |X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon,\ |Z_{\mathcal{A}}| + |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon\big\} \\
&\quad \leqslant\ \mathbf{P}\big\{\{|X_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2\},\ \{|Z_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{|Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2\}\big\} \\
&\quad \leqslant \mathbf{P}\{|X_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} + \mathbf{P}\{|Z_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} + \mathbf{P}\{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2, |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь последнее слагаемое содержит два зависимых события. Однако эти зависимые события обладают свойством условной независимости, при условии σ-алгебры, порожденной случайными множествами индексов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Более того, данные слагаемые содержат пары условно независимых событий, если фиксировать только мощности $\#\mathcal{B}$, $\#\mathcal{C}$.

Предварительно условимся, что сумма по пустому множеству индексов суммирования равна нулю, а произведение – единице. Оценим сначала последнюю вероятность в конце (4), используя формулу полной вероятности (полагая, что k, m – целые неотрицательные), и далее, неравенство Чебышева:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big\{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2,\ |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2\Big\} \\
&\quad = \sum_{(k,m):\, k+m \leqslant N} \mathbf{P}\Big\{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2, |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2;\ \{\#\mathcal{B} = k,\ \#\mathcal{C} = m\}\Big\} \\
&\qquad = \sum_{(k,m):\, k+m \leqslant N} \mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{k} \big(\xi_1(i) - \xi_0(i)\big)\Big| \geqslant \varepsilon/2, \\
&\qquad\quad \Big|\sum_{j=k+1}^{k+m} \big(\xi_1(j) - \xi_0(j)\big)\Big| \geqslant \varepsilon/2;\ \{\#\mathcal{B} = k,\ \#\mathcal{C} = m\}\Big\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{(k,m):\, k+m\leqslant N} \mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{k}\big(\xi_1(i)-\xi_0(i)\big)\Big| \geqslant \varepsilon/2\Big\}$$

$$\times\, \mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{j=k+1}^{k+m}\big(\xi_1(j)-\xi_0(j)\big)\Big| \geqslant \varepsilon/2;\Big\}\, \mathbf{P}\Big\{\#\mathcal{B}=k,\ \#\mathcal{C}=m\Big\}$$

$$\leqslant \sum_{(k,m):\, k+m\leqslant N} \frac{4\,k\,\mathbf{D}(\xi_1(1)-\xi_0(1))}{\varepsilon^2}\,\frac{4\,m\,\mathbf{D}(\xi_1(1)-\xi_0(1))}{\varepsilon^2}$$

$$\times\, \mathbf{P}\Big\{\#\mathcal{B}=k,\ \#\mathcal{C}=m\Big\}$$

$$= \frac{64}{N^2\,\varepsilon^4}\sum_{(k,m):\, k+m\leqslant N} k\,m\,\mathbf{P}\Big\{\#\mathcal{B}=k,\ \#\mathcal{C}=m\Big\} = \frac{64}{N^2\,\varepsilon^4}\,\mathbf{E}\{\#\mathcal{B}\,\#\mathcal{C}\}. \quad (5)$$

Таким образом, требуется оценить математическое ожидание произведения мощностей случайных множеств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Это нетрудно сделать, вычислив $\mathbf{E}\,(\#\mathcal{B})^2$, $\mathbf{E}\,(\#\mathcal{C})^2$ и $\mathbf{E}\,(\#\{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\})^2$.

Вычислим $\mathbf{E}\,(\#\mathcal{B})^2$, воспользовавшись тем, что ведущие пуассоновские процессы независимы, событие $\mathcal{B}$ определяется реализацией каждого из N пуассоновских процессов, а также обозначением $e_{\mathcal{B}}$,

$$\mathbf{E}\,(\#\mathcal{B})^2 = \mathbf{E}\,\Big(\sum_{i=1}^{N}\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i)\,\Big)^2 = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\,\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i) + \sum_{i\neq k}^{N}\mathbf{E}\,\{\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i)\,\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(k)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}\,\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i) + \sum_{i\neq k}^{N}\mathbf{E}\,\{\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(i)\}\,\mathbf{E}\,\{\mathbb{I}_{\mathcal{B}}(k)\} = N\,e_{\mathcal{B}} + N\,(N-1)\,e_{\mathcal{B}}^2.$$

Аналогично вычисляется

$$\mathbf{E}\,(\#\mathcal{C})^2 = N\,e_{\mathcal{C}} + N\,(N-1)\,e_{\mathcal{C}}^2.$$

Заметим, что множество $\{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\}$ – это множество тех ведущих пуассоновских процессов, что имеют скачки ровно на одном из двух интервалов $[v,u)$ и $[u,s]$, причем множества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ не пересекаются. Аналогично вычислим

$$\mathbf{E}\,(\#\{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\})^2 = \mathbf{E}\,(\#\mathcal{B}\,+\,\#\mathcal{C})^2 = N\,e_{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} + N\,(N-1)\,e_{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}}^2,$$

где

$$e_{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = \big(1-e^{-\lambda(u-v)}\big)\,e^{-\lambda(s-u)} + e^{-\lambda(u-v)}\,\big(1-e^{-\lambda(s-u)}\big).$$

Теперь просто вычисляется необходимое математическое ожидание произведения мощностей случайных множеств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$

$$2\,\mathbf{E}\,\{\#\mathcal{B}\,\#\mathcal{C}\} = \mathbf{E}\,(\#\mathcal{B} + \#\mathcal{C})^2 - \mathbf{E}\,(\#\mathcal{B})^2 - \mathbf{E}\,(\#\mathcal{C})^2$$

$$= N\,C(v;u;s) + N\,(N-1)\,2\left(1 - e^{-\lambda(u-v)}\right) e^{-\lambda(s-v)}\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right),$$

где константа $C(v;u;s)$ зависит только от временных отсечек $(v;u;s)$.

Подставляя полученную оценку для математического ожидания мощностей случайных множеств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в (5) получим оценку последней вероятности из правой части (4)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2,\ |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} \\ \leqslant \frac{64}{\varepsilon^4}\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right) e^{-\lambda(s-v)}\left(1 - e^{-\lambda(u-v)}\right) + \frac{C}{\varepsilon^4\,N},\end{aligned} \tag{6}$$

где константа C не зависит от ε и N. Оценим сверху $\exp\{-\lambda\,(s - v)\}$ единицей, и выберем достаточно большое N (чтобы избавиться от слагаемого $C/(\varepsilon^4\,N)$) в правой части (6), например, посредством оценки сверху $\exp\{-\lambda\,(s-v)\}$ единицей). Получим оценку

$$\mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{B}}| \geqslant \varepsilon/2,\ |Z_{\mathcal{C}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} \leqslant \frac{64}{\varepsilon^4}\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right)\left(1 - e^{-\lambda(u-v)}\right). \tag{7}$$

Остается оценить слагаемые $\mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\}$ и $\mathbf{P}\big\{|Z_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\}$ в конце неравенства (4). Их оценки, как мы увидим, имеют такой же вид, как оценка (7).

Рассмотрим события: $A_k = \{\omega : \#\mathcal{A}(\omega) = k\}$, при каждом $k = 0, 1, \ldots, N$. Очевидно, что эти события (A_k), $k = 0, 1, \ldots, N$, попарно несовместны и единственно возможны, потому имеет место следующее применение формулы полной вероятности (для удобства здесь $\epsilon = \varepsilon/2$) и дальнейшее использование условной независимости $X_{\mathcal{A}}$

$$\mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{A}}| \geqslant \epsilon\big\} = \sum_{k \leqslant N} \mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{k}(\zeta_i - \eta_i)\Big| \geqslant \epsilon\Big\}\mathbf{P}\{A_k\},$$

где последовательности (η_i) и (ζ_i), $i \in \mathbf{N}$, – суть некоторые независимые последовательности, каждая из которых состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение такое же, как у каждого члена формирующих последовательностей из формулировки данной теоремы, например, как у

$\xi_0(1)$. Далее воспользуемся неравенством Чебышева, учитывая, что $\mathbf{E}\,(\xi_0(1))^2 = 1/N$,

$$\sum_{k\leqslant N} \mathbf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{k}(\zeta_i-\eta_i)\Big| \geqslant \epsilon\Big\}\,\mathbf{P}\{A_k\} \leqslant \frac{2}{\epsilon^2}\sum_{k\leqslant N} k\,\mathbf{P}\{A_k\} = \frac{2}{\epsilon^2}\,\mathbf{E}\,\{\#\mathcal{A}\}. \quad (8)$$

Очевидно, что точно такая же оценка получается и для $\mathbf{P}\{|Z_{\mathcal{A}}| \geqslant \epsilon\}$. Остается заметить, что $\mathbf{E}\,\{\#\mathcal{A}\} = Ne_{\mathcal{A}}$, так как выше было отмечено, что $\mathbf{E}\,\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(i) = e_{\mathcal{A}}$, $i = 1, \ldots, N$.

В итоге получаем оценку с членом в правой части вида $e_{\mathcal{A}}$,

$$\mathbf{P}\big\{|X_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} + \mathbf{P}\big\{|Z_{\mathcal{A}}| \geqslant \varepsilon/2\big\} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\left(1-e^{-\lambda(u-v)}\right)\left(1-e^{-\lambda(s-u)}\right). \quad (9)$$

После комбинации (9) с (7) имеем для $0 < \varepsilon < 1$ следующую оценку

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big\{|\Psi_N(u) - \Psi_N(v)| \geqslant \varepsilon,\, |\Psi_N(s) - \Psi_N(u)| \geqslant \varepsilon\big\} \\ \leqslant \frac{68}{\varepsilon^4}\big(1 - e^{-\lambda(u-v)}\big)\left(1 - e^{-\lambda(s-u)}\right).\end{aligned} \quad (10)$$

Приведем правую часть к виду, который требует (2),

$$\begin{aligned}\big(1 - e^{-\lambda(u-v)}\big)\big(1 - e^{-\lambda(s-u)}\big) &\leqslant \lambda\,(u-v)\,\lambda\,(s-u) \\ &\leqslant \lambda^2\left(\frac{(u-v)+(s-u)}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{4}\,(s-v)^2.\end{aligned} \quad (11)$$

Здесь мы сначала воспользовались неравенством $1-e^{-x} \leqslant x$ при $x \geqslant 0$, затем неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

Собирая вместе оценки (10), (11), получаем при $0 < \varepsilon < 1$ неравенство (2), которое имеет необходимый вид

$$\mathbf{P}\big\{|\Psi_N(u) - \Psi_N(v)| \geqslant \varepsilon,\ |\Psi_N(s) - \Psi_N(u)| \geqslant \varepsilon\big\} \leqslant \frac{17\,\lambda^2}{\varepsilon^4}(s-v)^2 \quad (12)$$

с функцией $F(s) = \sqrt{17}\,\lambda\,s,\ s \in [0, \Theta]$, и параметрами $\gamma = 2$, $\alpha = 1$. Это основной случай в критерии из Биллингсли (2), см. доказательство этого критерия на с. 179.

Отметим, что при $\varepsilon \geqslant 1$ неравенство (12) останется таким же с единственной заменой ε^4 на ε^2. Также заметим, что если потребовать существование четвертого момента у членов формирующих последовательностей, то мы можем получить аналог неравенства (12) для всех положительных ε. $\square$

Следствие 1. *Рассмотрим ломаные, построенные по значениям процесса* $\Psi_N(s)$, $s \geqslant 0$, *как элементы пространства Скорохода* $D_{[0,\infty)}$. *Данное семейство случайных ломаных относительно компактно (плотно) в* $D_{[0,\infty)}$.

Доказательство данного следствия напрямую следует из построения пространства $D_{[0,\infty)}$, которое строится на основе пространств $D_{[0,\Theta]}$ для каждого конечного положительного Θ.

Утверждение 1. (**Автоковариация для сумм процессов случайного индекса**) *Рассмотрим в соответствии с определением* $(\star)$ *процесс случайного индекса* $\xi'_{\Pi(s)}$, $s \geqslant 0$, *для формирующей последовательности* $(\xi'_0, \xi'_1, \ldots)$, *состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.*

Для натурального N *рассмотрим сумму независимых одинаково распределенных ПСИ с независимыми ведущими пуассоновскими процессами, с независимыми одинаково распределенными формирующими последовательностями, состоящими (в свою очередь) из независимых одинаково распределенных случайных величин* $\Psi_N(s) = \sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(s)$, *когда* $\psi_i(s) = \xi_{\Pi_i(s)}(i)$ – i*-ая независимая копия для* $\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}$ *в обозначениях при нормировке на* $\sqrt{N}$: $\xi_0 = (1/\sqrt{N})\xi'_0$, $\xi_1 = (1/\sqrt{N})\xi'_1, \ldots$.

Для всякого натурального N, *для всяких неотрицательных* s, r *верно следующее равенство для ковариаций*

$$\operatorname{cov}\bigl(\Psi_N(r), \Psi_N(r+s)\bigr) = \exp\{-\lambda\, s\}. \tag{13}$$

Отметим, что правая часть равенства (13) не зависит от r, что показывает стационарность в широком смысле процесса $\Psi_N(s)$ при любом натуральном N.

Доказательство. Вычислим сначала ковариацию для одного слагаемого в $\Psi(s)$, воспользовавшись независимостью случайных величин (ξ_j), $j \geqslant 0$, и пуассоновского процесса $\Pi(s)$, тем что $\mathbf{E}\,\xi_j^2 = 1/N$, а также свойством независимости и однородности приращений пуассоновского процесса.

Для одного ПСИ очевидно следующее представление в форме бесконечной суммы случайных слагаемых, взвешенных индикаторами,

$$\xi_{\Pi(s)} \equiv \xi_{\Pi}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \, \mathbb{I}\{\Pi(s) = j\}. \tag{14}$$

Используя данное представление (14), имеем цепочку равенств

$$\operatorname{cov}\bigl(\xi_{\Pi(r)}, \xi_{\Pi(r+s)}\bigr) = \mathbf{E}\Bigl\{ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \, \mathbb{I}\{\Pi(r) = j\} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \, \mathbb{I}\{\Pi(r+s) = i\}\Bigr\}$$

$$= \mathbf{E}\Bigl\{ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^2 \, \mathbb{I}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\}\Bigr\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\,\{\xi_j^2\}\, \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\} = \frac{1}{N}\, \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s)\}$$

$$= \frac{1}{N}\, \mathbf{P}\{\Pi(0) = \Pi(s)\} = \frac{1}{N}\, \mathbf{P}\{\Pi(s) = 0\} = \frac{1}{N} \exp\{-\lambda\, s\}.$$

Так как случайные элементы $\xi_{\Pi_i(s)}(i)$ и $\xi_{\Pi_j(s)}(j)$ при разных индексах $i \neq j$ независимы и одинаково распределены, то дальнейшие вычисления элементарны,

$$\operatorname{cov}\bigl(\Psi_N(r), \Psi_N(r+s)\bigr) = \exp\{-\lambda\, s\}.$$

Утверждение 1 доказано. □

Рассмотрим $(\Psi_N(s))$, $N \in \mathbf{N}$, в соответствии с утверждением 1. Условия утверждения 1 дают возможность применения центральной предельной теоремы для векторов, следовательно, имеет место сходимость конечномерных распределений у $(\Psi_N(s))$, $s \geqslant 0$, $N \to \infty$. Относительная компактность доказана в теореме 1. Таким образом, верна следующая функциональная предельная теорема.

Теорема 2. *Последовательность кусочно-постоянных случайных функций $(\Psi_N(s))$, определенных в утверждении 1, сходится при $N \to \infty$ к процессу Орнштейна–Уленбека в пространстве Скорохода $D_{[0,\Theta]}$ для любого конечного положительного Θ, а также в пространстве Скорохода $D_{[0,\infty)}$.*

Полученный результат может найти применения в стохастической финансовой математике, в первую очередь, в моделях ставок, так как

процессы типа Орнштейна–Уленбека со времен пионерской работы О. Васичека [3] являются основными для описания динамики такого рода финансовых инструментов.

Автор выражает признательность А. Ю. Зайцеву за внимание к работе, замечания и ценные советы.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М., Наука 1977.
2. У. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, т. 2, М., Мир 1984.
3. O. Vasićek, *An equilibrium characterization of the term structure.* — J. Financial Economics **5** (1977), 177–188.

Rusakov O. V. Tightness of the sums of independent identically distributed pseudo-poissonian processes in the Skorokhod space.

We consider pseudo-poissonian process of the following simple type: it is a poissonian subordinator for a sequence of i.i.d. random variables with a finite variance. Next we consider sums of i.i.d. copies of such pseudo-poissonian process. For a family of the distributions of these random sums we prove the tightness (relative compactness) in the Skorokhod space. Under conditions of the Central Limit Theorem for vectors we obtain a weak convergence in the functional Skorokhod space of the examined sums to the Ornstein–Uhlenbeck process.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: 0virusakov@yahoo.co.uk

Поступило 7 декабря 2015 г.