Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

Л. В. Розовский

О СООТНОШЕНИИ СКОРОСТИ РОСТА МОМЕНТОВ И СЕМИИНВАРИАНТОВ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

1. Введение и результаты. Пусть случайная величина ξ имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2 < \infty$.

В монографии [1] в контексте исследования вероятностей больших уклонений случайной величины ξ широко используется следующее моментное условие:

существуют постоянные $\gamma \geqslant 0$ *и* $H > 0$, *такие что*

$$|\mathbf{E}\,\xi^k| \leqslant (k!)^{1+\gamma}\, H^{k-2}\,\sigma^k, \quad k = 3, 4, \dots. \tag{1}$$

Условие (1) при $\gamma > 0$ является обобщением известного моментного условия Бернштейна и равносильно предположению о том, что при некоторой постоянной $a > 0$

$$\mathbf{E}\,\exp\left(a\,|\xi|^{1/(1+\gamma)}\right) < \infty. \tag{2}$$

Выражаясь точнее, из (1) следует (2) при любом $a < 1/(\sigma H)$, а из (2) вытекает, что

$$\beta_k = \mathbf{E}\,|\xi|^k \leqslant A\,(k!)^{1+\gamma}\, H^{k-2}\,\sigma^k, \quad k = 3, 4, \dots,$$

где A – некоторая положительная постоянная, а $H = \left(\frac{1+\gamma}{a}\right)^{1+\gamma}/\sigma$.

Для проверки этих утверждений можно применить, соответственно, неравенства

$$\beta_{k/(1+\gamma)} \leqslant \beta_k^{1/(1+\gamma)} \quad \text{и} \quad \exp\left(a\,|x|^{1/(1+\gamma)}\right) \geqslant \left(\frac{a\,e}{(1+\gamma)\,k}\right)^{(1+\gamma)\,k} |x|^k,$$

а также формулу Стирлинга.

Отметим также, что в силу неравенства $\beta_k^2 \leqslant \beta_{k-1}\,\beta_{k+1}$ условие (1) наиболее информативно лишь при четных k.

В [1, лемма 3.1] было доказано, что если условие (1) справедливо при некотором $H \geqslant 1$, то для семиинварианта k-го порядка γ_k случайной величины ξ верна оценка

$$|\gamma_k| \leqslant (k!)^{1+\gamma}\,(2H)^{k-2}\,\sigma^k, \quad k = 3, 4, \dots. \tag{3}$$

Ключевые слова: момент, семиинвариант, условие Бернштейна.
Работа поддержана грантом НШ 2504.2014.1 и грантом РФФИ 13-01-00256а.

Нашей основной целью является обобщение и уточнение этого результата.

Теорема 1. *Пусть целое $K \geqslant 4$ таково, что $\mathbf{E}\,|\xi|^K < \infty$, а положительные постоянные g_k, $k = 2, \dots, K$, при некотором $B > 0$ удовлетворяют условию*

$$g_m\, g_l \leqslant B\, g_{m+l}, \quad 2 \leqslant l \leqslant m \leqslant K - l. \tag{4}$$

Если при некоторой постоянной $H > 0$

$$|\mathbf{E}\,\xi^k| \leqslant k!\, g_k\, H^{k-2}\, \sigma^k, \quad k = 2, 3, \dots, K, \tag{5}$$

то

$$|\gamma_k| \leqslant k!\, g_k\, (C\, H)^{k-2}\, \sigma^k, \quad k = 3, 4, \dots, K, \tag{6}$$

где $C = (1 + \sqrt{1 + 4B/H^2})/2$.

Отметим, что из (5) при четных k следует $k!\, g_k\, H^{k-2} \geqslant 1$.

Замечание 1. Условие (4) выполняется при $B = 1$, если $g_m = e^{u_m}$, где последовательность u_m/m, $m \geqslant 2$, не убывает (и может быть отрицательной, как в случае $g_m = m^{-\gamma}$ или $e^{-\gamma m}$, $\gamma > 0$).

Если $g_m = (m!)^\gamma$, $\gamma \geqslant 0$, то (4) имеет место при $B = 6^{-\gamma}$ и, следовательно,

$$C = C_\gamma = (1 + \sqrt{1 + 4/(6^\gamma\, H^2)})/2.$$

Таким образом, если выполнено условие (1), то

$$|\gamma_k| \leqslant (k!)^{1+\gamma}\, (C_\gamma\, H)^{k-2}\, \sigma^k, \quad k = 3, 4, \dots,$$

и эта оценка заведомо точнее, чем (3), поскольку $C_\gamma \leqslant (1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180\dots$ при $H \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 1. Положим $\alpha_k = \mathbf{E}\,\xi^k$, $k = 1, 2, \dots$. Принимая во внимание тождество $g'(u) = g(u)\,(\log g(u))'$, $u \geqslant 0$, где $g(u)$ – характеристическая функция ξ, и то, что $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, при $k \geqslant 3$, с помощью формулы Лейбница получим

$$\gamma_{k+1} = \alpha_{k+1} - k! \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\gamma_m}{(m-1)!}\, \frac{\alpha_{k+1-m}}{(k+1-m)!}. \tag{8}$$

Доказательство оценки (6) проведем индукцией по k.

Обозначим $\beta_m = |\gamma_m|/(m!\, g_m\, H^{m-2}\sigma^m)$. При $k = 2$ и 3 утверждение справедливо (напоминаем, что $\alpha_2 = \gamma_2$ и $\alpha_3 = \gamma_3$).

Пусть теперь $4 \leqslant k < K$. Из (4)–(6) и (8), с учетом равенства $B/H^2 = C\,(C-1)$, следует

$$\beta_{k+1} \leqslant 1 + \frac{1}{(k+1)H^2} \sum_{m=2}^{k-1} m\, C^{m-2}\,(g_m\, g_{k+1-m}/g_{k+1})$$
$$\leqslant 1 + \frac{B}{(k+1)H^2} \sum_{m=2}^{k-1} m\, C^{m-2}$$
$$= \frac{1}{k+1}\Big((k+1)C^{k-1} - \big(C^{k-1} - 1 + \sum_{l=1}^{k-1}(C^l - 1) + C - 1\big)\Big) < C^{k-1}. \tag{9}$$

Индукционный переход осуществлен, и теорема 1 доказана. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что целое* $l \in [4, K+2]$ *и* $\mathbf{E}\,|\xi|^l < \infty$, *если* $l = K+1$ *или* $K+2$. *Тогда*

$$|\gamma_l - \alpha_l| \leqslant \frac{\tilde g_l}{B}\, l!\, H^{l-2}\, \sigma^l \Big(C^{l-2} - 1 - (C-1)\,(l-1)/2\Big), \tag{10}$$

где $\tilde g_l = \max\limits_{2 \leqslant m \leqslant l-2} g_m\, g_{l-m}$.

Замечание 2. Поскольку $\tilde g_l \leqslant B\, g_l$ при $l \leqslant K$, из (10), в частности, следует, что оценку (6) можно уточнить:

$$|\gamma_k| \leqslant \Big(C^{k-2} - (C-1)\,(k-1)/2\Big)\, k!\, g_k\, H^{k-2}\, \sigma^k, \quad k = 3, 4, \ldots, K.$$

Доказательство следствия 1. С помощью (8) и (6) аналогично (9) получим

$$|\gamma_l - \alpha_l| \Big/ \Big(\frac{\tilde g_l}{B}\, H^{l-2}\, \sigma^l\, (l-1)!\Big) \leqslant \sum_{l=2}^{l-2} m\,(C^m - C^{m-1})$$
$$= l\,(C^{l-2} - 1) - \Big(\sum_{m=1}^{l-2}(C^m - 1) + (C^{l-2} - 1) + C - 1\Big)$$
$$\leqslant l\,(C^{l-2} - 1) - (C-1)\Big((l-1)(l-2)/2 + (l-2) + 1\Big),$$

и оценка (10) доказана. □

В заключение, для полноты картины, приведем аналог оценки (10) в случае, когда о скорости роста старших моментов случайной величины ξ ничего не предполагается.

Теорема 2. *Пусть целое* $k \geqslant 5$ *и* $\mathbf{E}\,|\xi|^k < \infty$. *Тогда*

$$|\gamma_k - \alpha_k| \leqslant \big(a\,\lambda^{k-2}(k-1)! - 1\big)\,\beta_2\beta_{k-2}, \tag{11}$$

где $\lambda = 0.87245\ldots$ *– корень уравнения* $e^{1/\lambda} - 1/\lambda = 2$, *и* $a = \frac{11}{24\lambda^3} = 0.69016\ldots$.

Оценка (11) уточняет лемму 1 из [2] и проверяется аналогично.

Литература

1. Л. Саулис, В. Статулявичус, *Предельные теоремы о больших уклонениях.* Мокслас, Вильнюс, 1989.
2. Л. В. Розовский, *О коэффициентах ряда Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен. **43**, No. 1 (1998), 161–166.

Rozovsky A. L. On relation of the growth rate between moments and semyinvariants of a higher order.

The main purpose of the note is to study the conditions under which the estimates from above for the moments and semyinvariants of a random variable have a similar forms.

С.-Петербургская
химико-фармацевтическая академия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 12 октября 2015 г.