

М. С. Ермаков

## О СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи существования состоятельных оценок и состоятельных процедур классификации довольно хорошо изучены. Доказана универсальная состоятельность широкого класса статистических процедур, найдены необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности. В задачах проверки гипотез результаты имеют несколько неупорядоченный характер. Цель настоящей работы

- представить систематический подход к этой задаче,
- привести естественные связи между различными типами состоятельности,
- найти необходимые условия и достаточные условия различимости гипотез для различных типов состоятельности в различных постановках задач.

Задача существования состоятельных критериев изучалась в работах Бергер [5], Крафта [29], Хефдинга и Волфовича [21], Ле Кама и Шварц [32], Ле Кама [33] и др. Существует также большое число работ, где задача существования различных типов состоятельных критериев исследовалась для отдельных постановок задач, с использованием специальных методов.

Для параметрических постановок задач состоятельность статистических критериев обычно довольно очевидна. Состоятельность традиционных непараметрических критериев (Колмогорова, омега-квадрат, хи-квадрат и других) также хорошо изучена (см. Леман и Романо [33], Балакришнан, Никулин и Воинов [3], Горовиц и Спокойный [22], Ермаков [18] и ссылки в них). Для проверки гипотез в функциональных пространствах интенсивно исследовалась состоятельность критериев для сближающихся множеств альтернатив, когда гипотеза является простой (см. Ингстер и Суслина [26], Коммингес и Далалян [9] и ссылки в них). Интересные вопросы возникают в более сложных задачах проверки гипотез. Это задачи:

---

*Ключевые слова:* проверка гипотез, состоятельность, эффективность, различимость.

- проверки гипотез, что плотность распределения имеет определенные свойства: унимодальность, выпуклость, имеет компактный носитель, … (Доноху [14], Деврой и Лугоши [13]),
- задачи классификации плотностей распределений на два класса (Пфандагль [36], Кулкарни и Зейтуни [30], Дембо и Перес [11]),
- семипараметрической проверки гипотез о среднем (Бахадур и Сэвидж [2], Кавер [10], Дембо и Перес [11]) и для более сложных статистических функционалов, таких как информация Фишера и другие (Доноху [14], Деврой и Лугоши [13]),
- задачи строгой состоятельности вероятностных мер эргодических процессов (Нобель [34]).

Состоятельность критериев изучается часто с различных точек зрения: как обычная состоятельность, как равномерная состоятельность, как поточечная состоятельность и как строгая поточечная состоятельность. В работе приводятся естественные связи между этими типами состоятельности. Из существования состоятельных критериев следует существование строго состоятельных (см. Нобель [34]). Также существование состоятельных критериев означает, что множество альтернатив допускает представление в виде счетного объединения вложенных подмножеств альтернатив, для каждой из которых существует равномерно состоятельный критерий проверки гипотез. Аналогичное утверждение справедливо и для поточечно состоятельных критериев. Доказательство этих утверждений довольно просто и очевидно. Отметим, что такой подход к состоятельности критериев в неявной форме уже присутствует в работе Дембо и Переса [11].

Таким образом, задача описания множеств гипотез, допускающих состоятельную, строго состоятельную и поточечно состоятельную проверку, сводится к задаче описания множеств гипотез, допускающих равномерно состоятельную проверку гипотез.

На основе этих утверждений нами изучаются достаточные условия и необходимые условия существования состоятельных, равномерно состоятельных, строго состоятельных и поточечно состоятельных статистических критериев в задачах проверки гипотез:

- о вероятностной мере независимой выборки,
- о значении функционала, зависящего от вероятностной меры независимой выборки,
- о средней мере пуассоновского процесса,
- о центрированной гауссовской мере в гильбертовом пространстве,

- о решении линейной некорректной задачи с гауссовским шумом,
- о решении задачи деконволюции,
- для задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме.

Для последних четырех случаев условия являются необходимыми и достаточными.

Для задач проверки гипотез о вероятностной мере независимой выборки состоятельность критериев исследовалась во многих работах. В данной работе основное внимание обращается на необходимые условия. Необходимые и достаточные условия существования равномерно состоятельных оценок были получены в работе Ле Кама и Шварц [32] в терминах специальной топологии слабой сходимости, заданной на всех  $n$ -кратных прямых произведениях вероятностных мер, и являются довольно трудно проверяемыми. В качестве топологии слабой сходимости Ле Кам и Шварц рассматривали топологию сходимости вероятностных мер на всех измеримых множествах ( $\tau$ -топологию). Условия различимости гипотез могут рассматриваться как их частный случай. В данной работе мы используем одномерную версию этих условий, справедливую, если вероятностные меры множеств гипотез и альтернатив абсолютно непрерывны относительно некоторой меры и их плотности равномерно интегрируемы. Для этого случая они имеют более простой вид: множества гипотез и альтернатив различимы, если и только если их замыкания в  $\tau$ -топологии не пересекаются (см. теорему 4.1). Данный вид условий различимости гипотез приведен несколько в другой форме в работе Ле Кама и Шварц [32]. Такая удобная форма этих условий была дана в работе Дембо и Переса [11] для задач существования строго состоятельных критериев. Мы распространяем теорему Ле Кама–Шварц на задачу проверки гипотез о средней мере пуассоновского процесса. На ней базируется и вывод других необходимых условий существования состоятельных критериев.

Условие равномерной интегрируемости плотностей является довольно жестким для задач проверки непараметрических гипотез, хотя ему и удовлетворяют все рассматриваемые в последнее время задачи различимости гипотез в функциональных пространствах со сближающимися множествами гипотез и альтернатив (см. Ингстер и Суслина [26], Коммингес и Далалян [9] и ссылки в них), а так же многие семипараметрические постановки задач (Донохоу [14] и Деврой и Лugoши [13]). Чтобы охватить необходимыми условиями широкий класс задач непараметрической и семипараметрической статистики,

в подсекции 4.3 приведены необходимые и достаточные условия различимости для задач проверки гипотез о значении функционала. Все функционалы метода расстояний, используемые в непараметрической проверке гипотез, а также широкий класс функционалов, дифференцируемых по Адамару, удовлетворяют этим условиям. Отметим, что различимые множества гипотез и альтернатив всегда могут быть разделены конечным числом линейных функционалов (см. подсекцию 2.2). Ранее необходимые и достаточные условия различимости изучались в основном только для функционала, соответствующего выборочному среднему (Кавер [10], Дембо и Перес [11]).

Теорема Ле Кама–Шварца позволяет получить компактные условия различимости гипотез для последовательности независимых одинаково распределенных гауссовских случайных векторов в гильбертовом пространстве. Они основаны на условиях слабой сходимости гауссовых мер в нем (см. Богачёв [7]). Определенная инвариантность слабой топологии относительно линейных преобразований дает возможность распространить эти результаты на задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме и проверки гипотез о решении линейных некорректных задач с гауссовским шумом.

Для задач проверки гипотез о решении некорректной линейной задачи с гауссовским шумом, о решении задачи деконволюции и для задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме необходимые и достаточные условия существования состоятельных и равномерно состоятельных критериев даны в терминах слабых топологий в гильбертовом пространстве или в  $L_2$ . Эти условия по форме похожи на условия теоремы Ле Кама–Шварца. Таким образом, мы видим, что критерии состоятельности в задачах проверки гипотез часто даются в терминах слабых топологий. В то же время в задачах оценивания условия состоятельности и равномерной состоятельности справедливы в терминах сильных топологий. Такой подход к изучению существования состоятельных и равномерно состоятельных критериев был развит в работах Ле Кама–Шварца [32], Дембо и Переса [12], Кулкарни и Зейтуни [30]. Отметим, что необходимые и достаточные условия существования равномерно состоятельных критериев в задаче обнаружения сигнала были получены ранее в другой форме в работе [17].

Задача нахождения условий неразличимости гипотез казалась довольно трудной в течении долгого времени. Первый пример неразличимости гипотез был найден Ле Камом [31]. Для задачи проверки гипотез о плотности распределения Ле Кам [31] доказал неразличимость центра и внешности шара в пространстве  $L_1$ . Дальнейшие результаты были в основном связаны с задачей различимости сигнала в гауссовском белом шуме. Ибрагимов и Хасьминский показали неразличимость центра шара и внешности шара в пространстве  $L_2$ . Бурнашев [8] доказал неразличимость центра шара и внешности шара в пространствах  $L_p$ ,  $p > 0$ . В работах Ингстера [24] и Ингстера и Кутоянца [25] была доказана неразличимость центра и внешности шара в  $L_2$  для задач проверки гипотез о плотности распределения и интенсивности пуассоновского процесса соответственно.

Изложение в работе организовано следующим образом. Общая постановка задачи и определение различных видов состоятельности даны в разделе 2. В разделе 2 излагается также основной подход к получению результатов. Связь условий существования состоятельных, равномерно состоятельных и поточечно состоятельных критериев изучается в разделе 3. Необходимые и достаточные условия существования состоятельных критериев для задач проверки гипотез о вероятностной мере независимой выборки, а также для семипараметрической постановки задачи, обсуждаются в разделе 4. Остальные постановки задач проверки гипотез рассматриваются в разделе 5. Мы не обсуждаем в работе вопросы существования строго состоятельных критериев. Для постановок задач, рассматриваемых в работе, доказательства существования строго состоятельных критериев, если существуют поточечно состоятельные, по существу совпадают с доказательством аналогичного утверждения, приведенного в работе Нобеля [34] для выборки независимых случайных величин, и поэтому опущены. Если доказательство леммы или теоремы не дано в соответствующем разделе, его можно найти в приложении.

Буквами  $c$  и  $C$  будут обозначаться различные постоянные. Обозначим  $1_A(x)$  индикатор множества  $A$ . Обозначим  $[a]$  целую часть  $a \in R^1$ . Для любых мер  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  обозначим  $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2$  их прямое произведение. Для любых двух мер  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  условимся писать  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ , если мера  $\mathbf{P}_1$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mathbf{P}_2$ .

## §2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1. Общая постановка задачи.** Определения состоятельности, равномерной состоятельности, поточечной состоятельности, строгой состоятельности. Пусть  $\mathfrak{E}_n = (\Omega_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{P}_n)$  – последовательность статистических экспериментов, где  $(\Omega_n, \mathfrak{B}_n)$  – вероятностное пространство, имеющее  $\sigma$ -алгебру борелевских множеств  $\mathfrak{B}_n$  и  $\mathfrak{P}_n = \{\mathbf{P}_{\theta,n}, \theta \in \Theta\}$  – семейство вероятностных мер.

Мы хотим проверить гипотезу  $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$  против альтернативы  $H_1 : \theta \in \Theta_1 \subset \Theta$ . Отметим, что  $\Theta$  может быть просто множеством вероятностных мер.

Для любого критерия  $K_n$  обозначим соответственно  $\alpha_\theta(K_n)$ ,  $\theta \in \Theta_0$ , и  $\beta_\theta(K_n)$ ,  $\theta \in \Theta_1$ , его вероятности ошибок первого и второго рода.

Обозначим

$$\alpha(K_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha_\theta(K_n) \quad \text{и} \quad \beta(K_n) = \sup_{\theta \in \Theta_1} \beta_\theta(K_n).$$

Последовательность критериев  $K_n$  называется поточечно состоятельной (Леман и Романо [33]), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{\theta_0}(K_n) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{\theta_1}(K_n) = 0$$

для всех  $\theta_0 \in \Theta_0$  и  $\theta_1 \in \Theta_1$ .

Последовательность критериев  $K_n$  называется состоятельной (ван дер Ваарт [38]), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(K_n) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{\theta_1}(K_n) = 0$$

для всех  $\theta_1 \in \Theta_1$ .

Последовательность критериев  $K_n$  равномерно состоятельна (Хёфдинг и Вольфович [21]), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(K_n) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(K_n) = 0.$$

Гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  различимы (Хёфдинг и Вольфович [21]), если существует последовательность равномерно состоятельных критериев.

Гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  неразличимы (Хёфдинг и Вольфович [21]), если для каждого  $n$  и для каждого критерия  $K_n$  имеет место

$$\alpha(K_n) + \beta(K_n) \geq 1.$$

В подразделах 5.2 и 5.3 мы рассматриваем семейство статистических экспериментов  $\mathfrak{E}_\epsilon = (\Omega_\epsilon, \mathfrak{B}_\epsilon, \mathfrak{P}_\epsilon)$ , зависящих от непрерывного параметра  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ . Шум в этих задачах предполагается гауссовским. Для этой постановки мы будем использовать аналогичные определения состоятельности.

Для этих постановок строгая состоятельность также следует из поточечной состоятельности. При этом предполагается, что шумы  $\xi_\epsilon(t)$ , возникающие при различных значениях параметра  $\epsilon$ , связаны следующим образом

$$\xi_\epsilon = \epsilon^2 \epsilon_1^{-2} \xi_{\epsilon_1} + \epsilon^2 \epsilon_2^{-2} \tilde{\xi}_{\epsilon_2},$$

где  $\xi_{\epsilon_1}$  – гауссовский шум при параметре  $\epsilon_1 > \epsilon$ , а  $\tilde{\xi}_{\epsilon_2}$  – не зависящий от  $\xi_{\epsilon_1}$  шум, имеющий то же распределение, что и  $\xi_{\epsilon_2}$  при  $\epsilon_2 = (\epsilon^{-2} - \epsilon_1^{-2})^{-1/2}$ . В задаче обнаружения сигнала в качестве  $\xi_\epsilon$  выступает  $\epsilon dw(t)$ , а в задаче проверки гипотезы о решении линейной некорректной задачи –  $\epsilon \xi$ .

Последовательность критериев  $K_\epsilon$  строго состоятельна (Деврой и Лугоши [13], Дембо и Перес [11], ван дер Ваарт [38]), если

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(K_\epsilon = 1 \text{ только для значений } \epsilon \text{ отделенных от } 0 \\ \text{некоторой константой}) = 1 \text{ для всех } \mathbf{P} \in \Theta_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(K_\epsilon = 0 \text{ только для значений } \epsilon \text{ отделенных от } 0 \\ \text{некоторой константой}) = 1 \text{ для всех } \mathbf{P} \in \Theta_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Строго состоятельные критерии  $K_\epsilon$  строятся по поточечно-состоятельным для значений  $\epsilon = \epsilon_n = n^{-1/2}$  в точности так же, как в работе Нобеля [34, с. 255], и для  $\epsilon : \epsilon_{n-1} < \epsilon < \epsilon_n$  в качестве критерия  $K_\epsilon$  берется  $K_{\epsilon_{n-1}}$ .

**2.2. Основной подход к решению задач.** Доказательство различимости базируется на следующих рассуждениях.

Пусть мы хотим проверить гипотезу о распределении случайной величины  $X$ , определенной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbf{P})$ . Для критерия  $K(X) \equiv \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , имеет место

$$\alpha_{\mathbf{P}}(K) + \beta_{\mathbf{Q}}(K) = 1 \text{ для всех } \mathbf{P} \in \Theta_0 \text{ и } \mathbf{Q} \in \Theta_1.$$

Таким образом, естественно искать критерии  $K$ , такие что

$$\alpha_{\mathbf{P}}(K) + \beta_{\mathbf{Q}}(K) < 1 - \delta, \quad \delta > 0 \quad \text{для всех } \mathbf{P} \in \Theta_0 \text{ и } \mathbf{Q} \in \Theta_1$$

или, другими словами,

$$\int K d\mathbf{P} + \int (1 - K) d\mathbf{Q} < 1 - \delta. \quad (2.3)$$

В этом случае мы скажем, что гипотеза и альтернатива слабо различимы.

Для любого  $\epsilon > 0$  существует аппроксимация функции  $K$  простой функцией

$$K_0(x) = \sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i}(x), \quad x \in \Omega,$$

такая что

$$|K(x) - K_0(x)| < \epsilon, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

Здесь  $\{A_1, \dots, A_k\}$  – разбиение множества  $\Omega$ .

Подставляя  $K_0$  в (2.3) и используя (2.4), получаем

$$\sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{Q}(A_i) - \mathbf{P}(A_i)) \geq \delta - 2\epsilon. \quad (2.5)$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** *Гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  слабо различимы, если и только если, существует измеримое разбиение  $A_1, \dots, A_k$  множества  $\Omega$ , такое что множества*

$$V_0 = \{v = (v_1, \dots, v_k) : v_1 = \mathbf{P}(A_1), \dots, v_k = \mathbf{P}(A_k), \mathbf{P} \in \Theta_0\} \subset R^k$$

и

$$V_1 = \{v = (v_1, \dots, v_k) : v_1 = \mathbf{Q}(A_1), \dots, v_k = \mathbf{Q}(A_k), \mathbf{Q} \in \Theta_1\} \subset R^k$$

имеют непересекающиеся замыкания.

Пусть мы хотим проверить гипотезу о вероятностной мере выборки независимых одинаково распределенных наблюдений. По предложению 2.1, если гипотеза и альтернатива слабо различимы, задача сводится к проверке гипотезы о мультиномиальном распределении. Для этой задачи из слабой различимости мгновенно следует различимость. Таким образом, слабая различимость означает различимость (Хёфдинг и Вольфовитц [21]).

В случае проверки гипотез о мультиномиальном распределении критерий максимума отношения правдоподобия имеет экспоненциальное

убывание вероятностей ошибок первого и второго рода. Таким образом, из различимости следует также экспоненциальное убывание вероятностей ошибок первого и второго рода. Поэтому различимость означает также (Ле Кам [31] и Шварц [35]) существование последовательности критериев  $K_n$  и  $n_0$ , таких что

$$\alpha(K_n) \leq \exp\{-cn\} \quad \text{и} \quad \beta(K_n) \leq \exp\{-cn\} \quad (2.6)$$

для всех  $n > n_0$ .

Отметим, что экспоненциальное убывание вероятностей ошибок первого и второго рода изучалась во многих работах (см. Хёфдинг и Вольфович [21], Дембо и Зейтуни [12], Баррон [4], Ермаков [16] и ссылки в них).

**Замечание.** В более громоздкой форме аналогичные условия различимости были доказаны Бергер [5] для случая выборки независимых случайных величин. Ле Кам использовал аппроксимацию критериев простыми функциями в доказательстве леммы 4 в [31], как вспомогательную технику.

**Замечание.** Предложение 2.1 показывает, что различимость гипотез определяется в основном по конечному числу множеств. Это и обуславливает в какой то мере тот факт, что мы можем хорошо различать без априорной информации только конечномерные параметрические гипотезы. Для задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме подобные утверждения были доказаны Янссеном [28] для случая простой гипотезы и непараметрической альтернативы и Ермаковым [17] для случая непараметрических гипотез и альтернатив (см. также Леман и Романо [33, с. 583]).

### §3. СВЯЗЬ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ, ПОТОЧЕЧНОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ И РАВНОМЕРНОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

Утверждения будут доказаны для задачи проверки гипотез о вероятностной мере выборки независимых одинаково распределенных случайных величин. Для других постановок задач (см. подраздел 5.1) аналогичные результаты получаются простой модификацией рассуждений.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – независимые одинаково распределенные случайные величины, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ,

где  $\mathfrak{B}$  –  $\sigma$ -алгебра борелевских множеств на топологическом пространстве  $\Omega$ . Обозначим  $\Lambda$  множество всех вероятностных мер на  $(\Omega, \mathfrak{B})$  и пусть  $\Theta = \Lambda$ .

**Теорема 3.1.** *Состоятельная последовательность критериев существует тогда и только тогда, когда существует последовательность вложенных подмножеств  $\Theta_{1i} \subseteq \Theta_{1,i+1}$ ,  $\Theta_1 = \cup_{i=1}^{\infty} \Theta_{1i}$ , такая что для каждого  $i$  гипотеза  $H_0 : \mathbf{P} \in \Theta_0$  и альтернатива  $H_{1i} : \mathbf{P} \in \Theta_{1i}$  различимы.*

Задачи различимости гипотез в функциональных пространствах со сближающимися множествами гипотез и альтернатив (см. Ингстер и Суслина [26], Коммингес и Далалян [9] и ссылки в них) допускают следующую интерпретацию в рамках теоремы 3.1. В этих задачах последовательность расстояний, сходящихся к нулю, задает сближение альтернатив с гипотезой, что позволяет построить состоятельный критерий. При этом каждая сближающаяся альтернатива удовлетворяет условиям различимости.

**Теорема 3.2.** *Поточечно состоятельная последовательность критериев существует тогда и только тогда, когда существуют последовательности вложенных подмножеств*

$\Theta_{0i} \subseteq \Theta_{0,i+1}$ ,  $\Theta_0 = \cup_{i=1}^{\infty} \Theta_{0i}$  и  $\Theta_{1i} \subseteq \Theta_{1,i+1}$ ,  $\Theta_1 = \cup_{i=1}^{\infty} \Theta_{1i}$ ,  
такие что для каждого  $i$  гипотеза  $H_{0i} : \mathbf{P} \in \Theta_{0i}$  и альтернатива  $H_{1i} : \mathbf{P} \in \Theta_{1i}$  различимы.

**Доказательство теоремы 3.1.** Пусть  $K_i, 1 \leq i < \infty$  – последовательность состоятельных критериев. Пусть числа  $0 < \alpha, \beta < 1$  таковы, что  $\alpha + \beta < 1$ . Для каждого  $i$  определим подмножества

$$\Theta'_{1i} = \{\mathbf{P} : \alpha(K_i) < \alpha, \beta_{\mathbf{P}}(K_i) \leq \beta, \mathbf{P} \in \Theta_1\}.$$

Множества  $\Theta_0$  и  $\Theta'_{1i}$  слабо различимы и следовательно различимы. Следовательно гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_{1i} : \mathbf{P} \in \Theta_{1i} = \cup_{j=1}^i \Theta'_{1j}$  различимы по лемме 3.1, приводимой ниже.  $\square$

**Лемма 3.1.** *Пусть гипотеза  $H_0 : \mathbf{P} \in \Theta_0$  различима для альтернатив  $H_{11} : \mathbf{P} \in \Theta_{11}$  и  $H_{12} : \mathbf{P} \in \Theta_{12}$ . Тогда гипотеза  $H_0 : \mathbf{P} \in \Theta_0$  различима для альтернативы  $H_1 : \mathbf{P} \in \Theta_{11} \cup \Theta_{12}$ .*

Доказательство теоремы 3.2 аналогично.

#### §4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЕ НЕЗАВИСИМОЙ ВЫБОРКИ.

Задача существования состоятельных, поточечно состоятельных, равномерно состоятельных и строго состоятельных критериев изучалась на основе различных подходов, среди них:

- использование в качестве тестовых статистик статистических оценок,
- применение метода расстояний,
- применение техники сходимости вероятностных мер в слабых топологиях, порожденных непрерывными или измеримыми функциями.

Мы рассмотрим последние два подхода. Первый подход будет по существу рассмотрен в рамках второго.

**4.1. Слабые топологии.** Пусть  $\Psi$  – некоторое множество измеримых функций  $f : \Omega \rightarrow R^1$ . Слабейшая топология в  $\Lambda$ , в которой непрерывны отображения

$$\mathbf{P} \rightarrow \int_{\Omega} f d\mathbf{P}, \quad \mathbf{P} \in \Lambda,$$

для всех  $f \in \Psi$ , называется  $\tau_{\Psi}$ -топологией слабой сходимости.

Если  $\Psi$  является множеством непрерывных функций, то  $\tau_{\Psi}$ -топология является топологией слабой сходимости. Если  $\Psi$  является множеством индикаторов всех борелевских множеств, то  $\tau_{\Psi}$ -топология называется  $\tau$ -топологией (см. Гроенебум, Оостерхофф и Раймгаарт [20]) или топологией сходимости мер на борелевских множествах (см. Гансслер [19] и Богачев [6]). Обозначим  $\Phi$  множество всех ограниченных измеримых функций  $f : \Omega \rightarrow R^1$ . Для любого множества  $A \subset \Lambda$ , обозначим  $\text{cl}_{\tau_w}(A)$ ,  $\text{cl}_{\tau}(A)$ ,  $\text{cl}_{\tau_{\Phi}}(A)$  и  $\text{cl}_{\tau_{\Psi}}(A)$  замыкание множества  $A$  в слабой,  $\tau$ ,  $\tau_{\Phi}$  и  $\tau_{\Psi}$ -топологиях соответственно. Мы будем писать в дальнейшем  $\tau_{\Psi}$ , если топология может быть выбрана произвольно: слабая,  $\tau$  или  $\tau_{\Phi}$ . Другие топологии рассматриваться не будут.

Приводимая ниже теорема 4.1 является версией теоремы, доказанной Ле Камом и Шварц (см. [32, с. 141] и теорему 4.2 ниже).

**Теорема 4.1.** i. Пусть множество  $\Theta_0$  относительно компактно в  $\tau_{\Psi}$ -топологии. Тогда гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  различимы, если замыкания  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  в  $\tau_{\Psi}$ -топологии не пересекаются.

ii. Если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  относительно компактны в  $\tau$ -топологии, то справедливо обратное утверждение.

**Пример 2.1.** Пусть  $\nu$  мера Лебега на  $(0, 1)$ , и пусть нам надо проверить гипотезу  $H_0 : f(x) = 1, x \in (0, 1)$ , о плотности распределения  $f = \frac{dP}{d\nu}$ . Пусть альтернатива имеет вид  $H_1 : f = f_i(x) = 1 + \sin(2\pi i x)$ ,  $1 \leq i < \infty$ .

Для любого измеримого множества  $B \in \mathfrak{B}$  мы имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_B f_i(x) dx = \int_B dx.$$

Следовательно гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  неразличимы.

Доказательство теоремы 4.1 i. аналогично доказательству теоремы 2 i. у Дембо и Переса [11] и будет опущено. Для  $\tau$ -топологии тестовые статистики легко определяются на основе относительных частот событий  $A_1, \dots, A_k$ . Для других топологий индикаторные функции заменяются функциями  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Psi$ .

**Доказательство теоремы 4.1. ii.** Разбиение  $\{A_1, \dots, A_k\}$ , удовлетворяющее предложению 2.1, может только существовать для множества  $\Omega^d$ ,  $d > 1$ . Это основная трудность, возникающая при доказательстве различимости. Если  $\Theta$  относительно компактно, отображение  $\Theta \rightarrow \Theta \otimes \Theta$  непрерывно в  $\tau$ -топологии (предложение 1, Ле Кам и Шварц [32]). Следовательно, существование разбиения для  $\Omega^d$  означает существование такого разбиения для  $\Omega$ . Ле Кам и Шварц [32], с. 141, сформулировали теорему 4.1 в следующей форме.  $\square$

**Теорема 4.2.** Пусть множества  $A \subset \Lambda$  и  $B \subset \Lambda$  относительно компактны в  $\tau_\Phi$ -топологии. Тогда множество  $A$  гипотез и множество  $B$  альтернатив различимы, если “существует конечное семейство  $\{f_j, j = 1, \dots, m\}$  измеримых ограниченных функций, определенных на”  $\Omega$ , “таких что

$$\sup \left| \int f_j d\mathbf{P} - \int f_j d\mathbf{Q} \right| < 1 \quad (4.1)$$

означает, что обе меры  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  являются элементами множеств  $A$  или  $B$ .

Если мы определим функции  $f_j, 1 \leq j \leq m = k$ , как индикаторы множеств  $\{A_1, \dots, A_k\}$ , умноженные на некоторые постоянные, мы получим, что (4.1) имеет место, если замыкания множеств  $A$  и  $B$  не пересекаются.

Если  $\Omega$  – метрическое пространство, то слабая топология и  $\tau$ -топология совпадают на компактах в  $\tau$ -топологии (Ганслер [19, лемма 2.3]).

**Замечание.** Хёффдинг и Вольфович [21] получили необходимые и достаточные условия различимости в другом виде. Условия различимости были даны в терминах расстояния по вариации на множестве вероятностных мер. При этом предполагалось, что вероятностные меры удовлетворяют некоторым условиям конечности числа интервалов монотонности разностей функций распределений, принадлежащих множествам гипотез и альтернатив соответственно.

Результаты о состоятельности и поточечной состоятельности естественно сформулировать в терминах  $F_\sigma$ -множеств и  $\sigma$ -компактных множеств. Множество  $\Psi$  называется  $F_\sigma$ -множеством, если  $\Psi$  есть счетное объединение замкнутых множеств. Множество  $\Psi$  называется  $\sigma$ -компактным, если  $\Psi$  является счетным объединением компактных множеств.

**Пример.** Пусть вероятностные меры множества  $\Psi \subset \Lambda$  абсолютно непрерывны относительно меры  $\mu$ . Предположим, что для каждой меры  $P \in \Psi$ , найдется некоторое  $p > 1$  такое, что  $dP/d\mu \in L_p(d\mu)$ . Тогда  $\Psi$  является  $\sigma$ -компактным в  $\tau$ -топологии.

Применяя теоремы 3.1, 3.2, мы можем легко вывести из теоремы 4.1 необходимые и достаточные условия существования состоятельных и поточечно состоятельных критериев.

**Теорема 4.3.** i. *Пусть  $\Theta_0$  относительно компактно в  $\tau_\Psi$ -топологии. Тогда состоятельные критерии существуют, если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  являются соответственно подмножествами непересекающихся замкнутого множества и  $F_\sigma$ -множества для  $\tau_\Psi$ -топологии.*

ii. *В случае  $\tau$ -топологии данные условия являются необходимыми, если дополнительно предположить, что  $\Theta_1$  содержится в  $\sigma$ -компактном множестве.*

**Теорема 4.4.** i. *Поточечно состоятельные критерии существуют, если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  содержатся соответственно в непересекающихся  $\sigma$ -компактном и  $F_\sigma$ -множествах для  $\tau_\Psi$ -топологии.*

ii. *Для  $\tau$ -топологии данные условия являются необходимыми, если дополнительно предположить, что  $\Theta_1$  содержится в некотором  $\sigma$ -компактном множестве.*

Последовательность вероятностных мер, сходящаяся к некоторой вероятностной мере, относительно компактна в  $\tau$ -топологии (Ганслер [19]). Поэтому условия неразличимости могут быть приведены в следующей форме.

Для любого множества  $\Upsilon \in \Lambda$  обозначим  $\text{cl}_{s\tau}(\Psi)$  последовательное замыкание  $\Psi$  в  $\tau$ -топологии.

**Теорема 4.5.** *Если*

$$\text{cl}_{s\tau}(\Theta_0) \cap \text{cl}_{s\tau}(\Theta_1) \neq \emptyset,$$

*то гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  неразличимы.*

**Замечание.** Мы не можем доказать неразличимость множеств  $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Lambda$ , таких что  $\text{cl}_\tau(\Theta_0) \cap \text{cl}_\tau(\Theta_1) \neq \emptyset$ . Как показал Перес, отображение  $P \rightarrow P \otimes P$  из  $\Lambda \rightarrow \Lambda \otimes \Lambda$  не является непрерывным в  $\tau$ -топологии, Богачёв [6, 8.10.116]).

**4.2. Необходимые условия различимости и расстояние по вариации.** Обычно задача различимости гипотез изучается с точки зрения расстояния по вариации (Хёффдинг и Вольфович [21], Ле Кам [31], Леман и Романо [33], ван дер Ваарт [38], Деврой и Лугоши [13], Ингстер и Суслина [26], а также большое число других работ).

Для вероятностных мер  $P \ll \nu$  и  $Q \ll \nu$  определим расстояние по вариации

$$\text{var}(P, Q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |dP/d\nu - dQ/d\nu| d\nu.$$

Для любых совокупностей вероятностных мер  $A$  и  $B$  обозначим

$$\text{var}(A, B) = \inf \{ \text{var}(P, Q) : P \in A, Q \in B \}.$$

Обозначим  $[A]$  выпуклую оболочку множества  $A \subset \Lambda$ .

Доказательство различимости обычно основано на следующей теореме (Крафт [29], Ле Кам [31]).

**Теорема 4.6.** *Пусть вероятностные меры в  $\Theta_0 \cup \Theta_1$  абсолютно непрерывны относительно меры  $\nu$ . Тогда для любого критерия  $K$  имеем место*

$$\alpha(K, \Theta_0) + \beta(K, \Theta_1) \geq 1 - \text{var}([\Theta_0], [\Theta_1]). \quad (4.2)$$

Последовательность плотностей  $f_k$  сходится к плотности  $f_0$  в  $L_1(\nu)$  (Данфорд и Шварц [15, теорема 12, параграф 8, гл. IV]), если для каждого измеримого множества  $B \in \mathfrak{B}$  имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k d\nu = \int_B f_0 d\nu, \quad (4.3)$$

и  $f_k$  сходится к  $f_0$  по мере.

Если (4.3) имеет место, и последовательность  $f_k$  не сходится к  $f_0$  по мере, мы не можем различить  $\Theta_0 = \{f_0\}$  и множество альтернатив  $\{f_1, f_2, \dots\}$ . По теореме Мазура (Иосида [27], теорема 2, параграф 1, гл. 5) слабая сходимость  $f_k$  к  $f_0$  означает сходимость линейных комбинаций  $f_k$  к  $f_0$  в  $L_1(\nu)$ . Следовательно, правая часть (4.2) равна единице.

#### 4.3. Равномерная состоятельность и метод расстояний.

В этом подразделе мы предположим, что множество  $\Theta$  может быть отлично от  $\Lambda$ , и  $\Theta$  является сепарабельным метрическим пространством с метрикой  $\rho$ . Пусть для функционала  $T : \Lambda \rightarrow \Theta$  стоит задача проверки гипотезы  $H_0 : T(\mathbf{P}) \in \Theta_0, \mathbf{P} \in \Lambda$  против альтернативы  $H_1 : T(\mathbf{P}) \in \Theta_1, \mathbf{P} \in \Lambda$ . Пусть  $\hat{\theta}_n = T(\hat{\mathbf{P}}_n)$  – оценка параметра  $\theta$ .

Хёфдинг и Вольфович [21] предложили классификацию метрик на состоятельные и равномерно состоятельные. Метрика  $\rho$  состоятельна на  $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ , если для каждого  $\epsilon > 0$  и для каждого  $\theta \in \tilde{\Theta}$  имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\theta(\rho(\hat{\theta}_n, \theta) > \epsilon) = 0. \quad (4.4)$$

Метрика  $\rho$  равномерно состоятельна на  $\tilde{\Theta}$ , если сходимость в (4.4) равномерна для  $\theta \in \tilde{\Theta}$ . Состоятельность (равномерная состоятельность) метрик эквивалентна состоятельности (равномерной состоятельности) оценок  $\hat{\theta}_n$  в этой метрике.

Теорема 4.7 является некоторым вариантом теоремы, доказанной Хёфдингом и Вольфовичем (теорема 3.1, [21]).

**Теорема 4.7.** *Пусть  $\rho$  равномерно состоятельна в  $\Theta_0 \cup \Theta_1$ . Тогда гипотеза и альтернатива различимы, если*

$$\rho(\Theta_0, \Theta_1) = \inf\{\rho(\tau, \eta) : \tau \in \Theta_0, \eta \in \Theta_1\} > 0. \quad (4.5)$$

Равномерно состоятельными являются расстояние Колмогорова–Смирнова и расстояние, соответствующее критерию омега-квадрат.

Теорема 4.7 дает достаточные условия различимости гипотез. Ниже мы покажем, что эти условия необходимы, если выполнены некоторые дополнительные условия.

Скажем, что множество  $V \subset \Psi$  насыщено, если для каждого  $\eta \in V$  и любой последовательности  $\eta_n \in V$ ,  $\eta_n \rightarrow \eta$  при  $n \rightarrow \infty$ , найдется  $\mathbf{P} \in \Lambda$  и последовательность  $\mathbf{P}_n \in \Lambda$ , такие что  $T(\mathbf{P}) = \eta$ ,  $T(\mathbf{P}_n) = \eta_n$  и  $\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $\tau$ -топологии.

Если множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  насыщены, мы можем применить критерий неразличимости гипотез теоремы 4.5.

**Теорема 4.8.** *Если  $\Theta_0$  относительно компактно и множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  насыщены, то (4.5) является необходимым условием различимости.*

**Пример. Критерий Колмогорова.** Пусть  $\Omega = (0, 1)$  и пусть

$$\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \max_{x \in (0, 1)} |F(x) - F_0(x)|,$$

где  $F(x)$  и  $F_0(x)$  – функции распределения вероятностных мер  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  соответственно. Обозначим  $\mathbf{P}_0$  меру Лебега. Определим вероятностные меры  $\mathbf{P}_u = \mathbf{P}_0 + uG$ ,  $0 \leq u < 1$ , где заряд  $G$  имеет плотность  $dG/d\mathbf{P}_0(x) = -1$ , если  $x \in (0, 1/2]$  и  $dG/d\mathbf{P}_0(x) = 1$ , если  $x \in (1/2, 1)$ . Тогда, для любого  $u$ ,  $0 \leq u < 1$  и любой последовательности  $u_n \rightarrow u$  при  $n \rightarrow \infty$ , мы можем положить  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_u$  и  $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{u_n}$  в определении насыщенного множества.

Пусть  $\Theta$  – сепарабельное метрическое пространство и  $T : \Upsilon \rightarrow \Theta$ ,  $\Upsilon \subset \Lambda$ , – непрерывный в  $\tau$ -топологии функционал. Рассматривается задача проверки гипотезы  $H_0 : T(\mathbf{P}) \in \Theta_0$ ,  $\mathbf{P} \in \Upsilon$ , против альтернативы  $H_1 : T(\mathbf{P}) \in \Theta_1$ ,  $\mathbf{P} \in \Upsilon$ .

Пусть  $\mathbf{P}_0 \in \Lambda$ . Для  $p > 1$  и любого  $C > 0$  обозначим

$$\bar{L}_p(\mathbf{P}_0, C) = \left\{ \mathbf{Q} : \mathbf{Q} \ll \mathbf{P}_0, \int \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}_0} \right)^p d\mathbf{P}_0 < C, \quad \mathbf{Q} \in \Lambda \right\}.$$

**Теорема 4.9.** *Пусть  $T(\bar{L}_p(\mathbf{P}_0, C) \cap \Upsilon) = \Theta$  для некоторого  $\mathbf{P}_0 \in \Lambda$  и  $C > 0$ . Тогда для различимости  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  необходимо, чтобы их замыкания не пересекались.*

Теорема 4.9 непосредственно следует из теоремы 4.8, компактности и секвенциальной компактности  $\bar{L}_p(\mathbf{P}_0, C)$ .

Обозначим  $\Lambda_0$  множество всех зарядов  $G$ , имеющих ограниченную вариацию и таких, что  $G(\Omega) = 0$ . Определение  $\tau$ -топологии в  $\Lambda_0$  аналогично определению в  $\Lambda$ .

Приведем условие различимости гипотез для функционалов  $T : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$ , удовлетворяющих следующему условию дифференцируемости по Адамару.

**A.** Для каждого  $\mathbf{P} \in \Lambda$ , такого что  $T(\mathbf{P}) \in \Theta_0 \cup \Theta_1$ , найдется вектор-функция  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_d)$ ,  $h_i \in L_1(\mathbf{P})$ ,  $\mathbf{E}[h_i(X)] = 0$ ,  $1 \leq i \leq d$ , с линейно независимыми функциями  $h_1, \dots, h_d$ , что для любого заряда  $G \in \Lambda_0$ ,  $G \ll \mathbf{P}$ , имеет место

$$\left| T(\mathbf{P} + t_n G_n) - T(\mathbf{P}) - t_n \int \vec{h} dG \right| = o(|t_n|)$$

при  $n \rightarrow \infty$ , для все последовательностей  $t_n \rightarrow 0$  и всех последовательностей  $G_n \rightarrow_{\tau} G$ , таких что  $G_n \in \Lambda_0$ ,  $\mathbf{P} + t_n G_n \in \Lambda$ . Здесь  $G_n \rightarrow_{\tau} G$  означает сходимость в  $\tau$ -топологии.

В статистических публикациях в определениях производной по Адамару обычно вводится метрика на  $\Lambda$ . В условии **A** метрики на  $\Lambda$  не требуется. Естественно, если метрика на  $\Lambda$  непрерывна в  $\tau$ -топологии, приводимая ниже теорема 4.10 справедлива и при таком определении дифференцируемости по Адамару. Заметим, что условие **A** может быть ослаблено, достаточно рассматривать только заряды  $G$  и последовательности  $G_n$ , плотности  $\frac{dG}{d\mathbf{P}}$ ,  $\frac{dG_n}{d\mathbf{P}}$  которых принадлежат какому-нибудь подпространству  $\Pi = \{g : g = \sum_{i=1}^d c_i h_i, c_i \in \mathbb{R}^1\}$ , такому что для каждой функции  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , найдется функция  $g \in \Pi$ , для которой  $\int g h_i d\mathbf{P} \neq 0$ . Подпространство  $\Pi$  может быть заменено тангенциальным подпространством (см. ван дер Ваарт [38]).

**Теорема 4.10.** Пусть выполнено условие **A**. Тогда функционал  $T$  насыщеный.

**Замечание.** Комбинация теорем 4.7 и 4.8 вместе с теоремами 3.1 и 3.2 позволяет получить условия существования состоятельных и поточечно состоятельных критериев. В этих постановках задачи в условиях существования состоятельных и поточечно состоятельных критериев расстояния  $\rho$  могут быть различны для каждой пары множеств  $\Theta_0, \Theta_{1i}$  и  $\Theta_{0i}, \Theta_{1i}$  соответственно. Здесь множества  $\Theta_0, \Theta_{1i}$  и  $\Theta_{0i}, \Theta_{1i}$  те же самые, что в теоремах 3.1 и 3.2 соответственно. Так как эти

утверждения довольно очевидны и довольно громоздки, мы не будем приводить их.

Существуют естественные топологические расширения теоремы 4.7 на задачи существования состоятельных и поточечно состоятельных критериев. Если расстояние равномерно состоятельно на замкнутом множестве гипотез и состоятельно на открытом множестве альтернатив, и эти множества не пересекаются, то существует состоятельный критерий. Пфандагль [36, лемма 8.1]) доказал аналогичное утверждение для строго состоятельных критериев. Если множества гипотез и альтернатив открыты, и существует состоятельная оценка  $\hat{\theta}_n$  на этих множествах, то существуют поточечно состоятельные критерии. Для строго состоятельных критериев аналог данного утверждения можно найти у Дембо и Переса [13, теорема 1 ii].

## §5. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

**5.1. Проверка гипотез о гауссовской мере.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – независимые одинаково распределенные гауссовые случайные векторы в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Обозначим  $S = EX_1$  и  $R$  – ковариационный оператор  $X_1$ .

Рассмотрим задачу проверки гипотез  $S \in \Theta_0 \subset H$  против альтернативы  $S \in \Theta_1 \subset H$ .

**Теорема 5.1.** *Пусть множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  относительно компактны. Тогда гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  различимы тогда и только тогда, когда замыкания  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  не пересекаются.*

**Доказательство.** Если семейство вероятностных мер плотно, то топология слабой сходимости и  $\tau$ -топология совпадают. Применяя теорему Ле Кама–Шварца вместе с соответствующим критерием слабой сходимости гауссовых мер (см. Богачёв [7, теорема 3.7.7]), получаем отсюда теорему 5.1.

Пусть  $\Theta$  – плотное семейство центрированных гауссовых мер (критерий плотности гауссовых мер см. Богачёв [7, теорема 3.7.10]). Обозначим  $\Psi$  – множество их ковариационных операторов. Рассмотрим задачу проверки гипотез  $H_0 : R \in \Psi_0 \subset \Psi$  против альтернативы  $H_1 : R \in \Psi_1 \subset \Psi$ .

Для  $i = 1, 2$  определим множества  $\Upsilon_i = \{R^{1/2} : R \in \Psi_i\}$ . □

**Теорема 5.2.** Гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  различимы тогда и только тогда, когда замыкания множеств  $\Upsilon_0$  и  $\Upsilon_1$  в норме Гильберта–Шмидта не пересекаются.

Доказательство теоремы 5.2 отличается от доказательства теоремы 5.1 только тем, что применяется критерий слабой сходимости для центрированных гауссовских мер (см. Богачёв [7, теорема 3.7.10]).

**5.2. Обнаружение сигнала в  $L_2$ .** Предположим, что мы наблюдаем реализацию случайного процесса  $Y_\epsilon(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , задаваемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_\epsilon(t) = S(t) dt + \epsilon dw(t), \quad \epsilon > 0,$$

где  $S \in L_2(0, 1)$  – неизвестный сигнал и  $dw(t)$  гауссовский белый шум.

Мы хотим проверить гипотезу  $H_0 : S \in \Theta_0 \subset L_2(0, 1)$  против альтернативы  $H_1 : S \in \Theta_1 \subset L_2(0, 1)$ .

Результаты получены в терминах слабой топологии в  $L_2(0, 1)$ .

**Теорема 5.3.** i. Пусть  $\Theta_0$  – ограниченное множество в  $L_2$ . Тогда  $H_0$  и  $H_1$  различимы, если замыкания  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  не пересекаются.

ii. Обратное справедливо, если дополнительно  $\Theta_1$  ограничено в  $L_2$ .

**Теорема 5.4.** i. Пусть  $\Theta_0$  – ограниченное множество в  $L_2$ . Тогда существует состоятельный критерий, если и только если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  содержатся в непересекающихся замкнутом множестве и  $F_\sigma$ -множестве соответственно.

ii. Поточечно состоятельный критерий существует, если и только если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  содержатся в непересекающихся  $F_\sigma$ -множествах.

**Доказательство теоремы 5.3 i.** По теореме Тихонова  $\Theta_0$  относительно компактно. Следовательно, для замыкания  $\Theta_0$  существует покрытие конечным числом множеств

$$\begin{aligned} U_l = \bigcap_{i=1}^{k_l} U_{il}, \quad U_{il} &= U(f_{il}, c_{il}, S_{il}) \\ &= \left\{ S : \int f_{il}(s) (S(s) - S_{il}(s)) ds \leq c_{il}, S \in L_2 \right\}, \\ f_{il}, S_{il} &\in L_2, \quad 1 \leq i \leq k_l, \quad 1 \leq l \leq m, \end{aligned}$$

таких что  $\bigcap_{l=1}^m U_l$  и замыкание  $\Theta_1$  не пересекаются. Таким образом, мы можем определить равномерно состоятельные критерии, порожденные статистиками  $\int f_{il}(s) (dY_\epsilon(s) - S_{il}(s) ds)$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 5.3 ii.** Для любых  $S_1, S_2 \in L_2(0, 1)$  обозначим

$$(S_1, S_2) = \int_0^1 S_1(t) S_2(t) dt.$$

Запишем задачу обнаружения сигнала в координатах некоторого ортонормированного базиса  $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ . В этой постановке нами наблюдается гауссовский случайный вектор

$$y = y_\epsilon = \{y_j\}_{j=1}^\infty, \quad y_j = s_j + \epsilon \xi_j, \quad \xi_j \sim N(0, 1),$$

где  $s_j = (S, \phi_j)$ .

Обозначим  $s = \{s_j\}_{j=1}^\infty$  и  $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ . Для  $i = 0, 1$  определим множества

$$\Psi_i = \{s : s = \{s_j\}_{j=1}^\infty, s_j = (S, \phi_j), S \in \Theta_i\}.$$

Зададим линейный оператор  $A : l_2 \rightarrow l_2$ , такой что для всякого  $s \in l_2$  имеет место  $As = u$ , где  $u = \{u_j\}_{j=1}^\infty$ ,  $u_j = s_j/j$ ,  $1 \leq j < \infty$ . Зададим множества  $\Upsilon_i = \{u : u = As, s \in \Psi_i\}$ .

Вероятностные меры  $\mu_\epsilon$  случайных векторов  $Ay_\epsilon$  являются мерами Радона и плотны в  $l_2$ . Поэтому мы можем применить теорему 5.1. Относительная компактность множеств  $\Upsilon_i$ ,  $i = 0, 1$ , и то, что их замыкания не пересекаются, означает, что найдется конечное число векторов  $f_1, \dots, f_k \in l_2$  и  $\epsilon > 0$ , такие что для любых  $u_0 = \{u_{0j}\}_{j=1}^\infty \in \Upsilon_0$  и  $u_1 = \{u_{1j}\}_{j=1}^\infty \in \Upsilon_1$  для одного из векторов  $f_i = \{f_{ij}\}_{j=1}^\infty$ ,  $1 \leq i \leq k$ , имеет место

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}(u_{1j} - u_{0j}) > \epsilon. \quad (5.1)$$

Это означает, что найдется такое  $m$ , что для любых  $u_0 \in \Upsilon_0$  и  $u_1 \in \Upsilon_1$  имеет место

$$\sum_{j=1}^m f_{ij}(u_{1j} - u_{0j}) > \epsilon/2 \quad (5.2)$$

для некоторого  $i : 1 \leq i \leq m$ .

Обозначим  $l_{2m}$  линейное подпространство в  $l_2$ , порожденное ортами первых  $m$  координат  $l_2$ .

Для  $i = 0, 1$  определим множества  $\Upsilon_{im} = \Pi_m \Upsilon_i$ , где  $\Pi_m$  – оператор проектирования  $l_2$  на  $l_{2m}$ . Определим подпространство  $\Gamma_m = A^{-1}l_{2m}$ .

Имеет место  $A^{-1}\Upsilon_{im} = \Pi_{\Gamma_m} \Psi_i$ , где  $\Pi_{\Gamma_m}$  – оператор проектирования на  $\Gamma_m$ .

Множества  $A^{-1}\Upsilon_{0m}$  и  $A^{-1}\Upsilon_{1m}$  ограничены, а их замыкания не пересекаются в топологии конечномерного пространства, заданной на  $\Gamma_m$ , что и означает справедливость утверждения теоремы.  $\square$

**Доказательство теоремы 5.4.** Теорема 5.3 и относительная компактность множеств  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  означают, что гипотеза и альтернатива различимы, только если существует равномерно состоятельный критерий, зависящий от конечного числа статистик

$$\int S_1(t) dY_\epsilon(t), \dots, \int S_k(t) dY_\epsilon(t),$$

где  $S_1, \dots, S_k \in L_2(0, 1)$ .

Это позволяет доказать версии теорем 3.1 и 3.2 для последовательности значений  $\epsilon = \epsilon_n = Cn^{-1/2}$  и получить теорему 5.4 для такой последовательности  $\epsilon = \epsilon_n$ . Отсюда вытекают необходимые условия теоремы. Остается заметить, что тестовые статистики, построенные для последовательности  $\epsilon_n$ , работают для произвольных  $\epsilon > 0$ . Из этого следует достаточность.  $\square$

**5.3. Проверка гипотез о решении линейной некорректно поставленной задачи.** В сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  мы хотим проверить гипотезу о значении вектора  $\theta \in \Theta \subset H$  на основе наблюдения гауссовского случайного вектора

$$Y = A\theta + \epsilon\xi, \quad \epsilon > 0. \quad (5.3)$$

Здесь  $A : H \rightarrow H$  – известный линейный оператор, а  $\xi$  – гауссовский случайный вектор, имеющий ковариационный оператор  $R : H \rightarrow H$  и  $E\xi = 0$ .

Для каждого оператора  $U : H \rightarrow H$  обозначим  $\mathfrak{R}(U)$  образ  $U$ .

Предположим, что ядра операторов  $A$  и  $R$  нулевые, и  $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(R^{1/2})$ .

**Теорема 5.5.** Пусть оператор  $R^{-1/2}A$  ограничен. Тогда справедливы утверждения теорем 5.3 и 5.4, при этом вместо слабой топологии в  $L_2$  рассматривается слабая топология в  $H$ .

**Доказательство.** Утверждения теорем 5.3 и 5.4 имеют место для множеств гипотез  $R^{-1/2}A\Theta_0$  и альтернатив  $R^{-1/2}A\Theta_1$ . Таким образом, достаточно применить обратное отображение  $A^{-1}R^{1/2}$  к (5.3) и провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 5.3.  $\square$

Задача обнаружения сигнала в цветном гауссовском белом шуме может рассматриваться как частный случай теоремы 5.5.

Пусть мы наблюдаем случайный процесс  $Y(t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , определяемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY(t) = S(t) dt + \epsilon h(t) dw(t), \quad \epsilon > 0,$$

где  $S \in L_2(0, 1)$  – неизвестный сигнал и  $h(t)$  – весовая функция.

Нужно проверить гипотезу о сигнале  $S$ .

**Теорема 5.6.** *Пусть  $0 < c < h(t) < C < \infty$  для всех  $t \in (0, 1)$ . Тогда утверждения теорем 5.3 и 5.4 справедливы для слабой топологии в  $L_2(0, 1)$ .*

#### 5.4. Проверка гипотез о решении задачи деконволюции.

Пусть  $Z_1, \dots, Z_n$  – независимые одинаково распределенные наблюдения, имеющие плотность распределения  $h(z)$ ,  $z \in R^1$ , относительно меры Лебега. Известно, что  $Z_i = X_i + Y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , где  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_n$  – независимые случайные величины, имеющие плотности распределения  $f(x)$ ,  $x \in R^1$ , и  $g(y)$ ,  $y \in R^1$ , соответственно. Плотность распределения  $g$  известна.

Мы хотим проверить гипотезу  $H_0 : f \in \Theta_0$  против альтернативы  $H_1 : f \in \Theta_1$ , где  $\Theta_0, \Theta_1 \subset L_2(R^1)$ . Предположим, что  $g \in L_2(R^1)$ . Обозначим

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\omega x\} g(y) dy, \quad \omega \in R^1.$$

Обозначим  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  множества вероятностных мер  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  соответственно.

**Теорема 5.7.** *Предположим, что множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  равномерно интегрируемы. Пусть*

$$\text{essinf}_{\omega \in (-a, a)} |\hat{g}(\omega)| \neq 0$$

для всех  $a > 0$ . Тогда утверждение теоремы 5.3 справедливо для слабой топологии в  $L_2(R^1)$ .

**Доказательство.** Мы можем применить те же самые рассуждения, что и в доказательстве теоремы 5.5, и свести задачу к постановке задачи теоремы 4.1.  $\square$

**5.5. Проверка гипотез о средней мере пуассоновского случайного процесса.** Пусть даны  $n$  независимых реализаций  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  пуассоновского случайного процесса со средней мерой  $\mathbf{P}$ , определенной на борелевских множествах  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{B}$  хаусдорфова топологического пространства  $\Omega$ . Мы хотим проверить гипотезу  $H_0 : \mathbf{P} \in \Theta_0 \subset \Theta$  против альтернативы  $H_1 : \mathbf{P} \in \Theta_1 \subset \Theta$ , где  $\Theta$  – множество всех мер  $\mathbf{P}, \mathbf{P}(\Omega) < \infty$ .

Обозначим  $N_n$  число атомов пуассоновского случайного процесса  $\kappa_1 + \dots + \kappa_n$ .

Мы имеем (см. Арконес [1, (6.2)])

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|N_n - n\lambda| > x) &\leq \exp\{-n(\lambda + x) \log(1 + x/\lambda) + nx\} \\ &+ \exp\{-n(\lambda - x) \log(1 - x/\lambda) - nx\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $\lambda = \mathbf{P}(\Omega)$ .

Условное распределение  $\mathbf{P}(\kappa_1 + \dots + \kappa_n | N_n = k)$  совпадает с распределением эмпирической меры  $\widehat{\mathbf{Q}}_k$  независимых одинаково распределенных случайных величин  $X_1, \dots, X_k$ , имеющих вероятностную меру  $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A)/\mathbf{P}(\Omega)$ ,  $A \in \mathfrak{B}$ . Это утверждение и неравенство (5.4) позволяет распространить результаты раздела 4 на задачу проверки гипотез о средней мере пуассоновского случайного процесса. Мы приведем только аналог теоремы 4.1.

**Теорема 5.8.** i. Пусть  $\Theta_0$  относительно компактно в  $\tau_{\mathfrak{F}}$ -топологии. Тогда гипотеза  $H_0$  и альтернатива  $H_1$  различимы, если замыкания  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  не пересекаются.

ii. Если  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  относительно компактны в  $\tau$ -топологии, то для различимости необходимо, чтобы не пересекались замыкания в  $\tau$ -топологии множеств  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$ .

**Доказательство теоремы 5.8 ii.** По теореме 2.6 в работе Ганслера [19], множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  относительно последовательно компактны. Предположим, что множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  имеют общую предельную точку  $\mathbf{P}$  и не являются различимыми. Тогда существуют последовательности  $\mathbf{P}_k \in \Theta_0$  и  $\mathbf{Q}_k \in \Theta_1$ , сходящиеся к  $\mathbf{P} \in \Theta$ .

Для любых критериев  $K_n$  и для любого натурального  $l$  имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}_k}(K_n | N_n = l) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(K_n | N_n = l),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_k}(1 - K_n | N_n = l) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(1 - K_n | N_n = l)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_k(N_n = l) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_k(N_n = l) = \mathbf{P}(N_n = l).$$

Следовательно, множества  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  неразличимы, и мы приходим к противоречию. Доказательство i. аналогично доказательству теоремы 4.1 i. и опущено  $\square$

## §6. ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство леммы 3.1.** По предложению 2.1, для некоторых  $m_i, i = 1, 2$ , найдутся разбиения  $A_{i1}, \dots, A_{ik_i}$  множеств  $\Omega^{m_i}$ , такие что множества

$$\begin{aligned} V_{0i} &= \{v = (v_1, \dots, v_k) : \\ &\quad v_1 = \mathbf{P}^{m_i}(A_{i1}), \dots, v_k = \mathbf{P}^{m_i}(A_{ik_i}), \mathbf{P} \in \Theta_0\} \subset R^{m_i} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V_{1i} &= \{v = (v_1, \dots, v_k) : \\ &\quad v_1 = \mathbf{P}^{m_i}(A_{i1}), \dots, v_k = \mathbf{P}^{m_i}(A_{ik_i}), \mathbf{P} \in \Theta_{1i}\} \subset R^{m_i} \end{aligned}$$

имеют непересекающиеся замыкания для каждого  $i = 1, 2$ . Здесь и в дальнейшем  $\mathbf{P}^{m_i}$  обозначает  $m_i$ -кратное прямое произведение меры  $\mathbf{P}$ .

Так как существует равномерно состоятельные оценки

$$\mathbf{P}^{m_1}(A_{11}), \dots, \mathbf{P}^{m_1}(A_{1k_1}), \quad \mathbf{P}^{m_2}(A_{21}), \dots, \mathbf{P}^{m_2}(A_{2k_2}),$$

то существуют равномерно состоятельные критерии для проверки гипотезы  $H_0 : \mathbf{P} \in \Theta_0$  против альтернативы  $H_1 : \mathbf{P} \in \Theta_{11} \cup \Theta_{12}$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 4.8 ii.** Предположим противное. Тогда найдутся последовательности  $\tau_k \in \Theta_0$  и  $\eta_k \in \Theta_1$ , такие что  $\rho(\tau_k, \eta_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так как  $\Theta_0$  относительно компактно, найдется  $\tau \in \Psi$  и подпоследовательность  $\tau_{k_l} \in \Theta_0$ , такая что  $\tau_{k_l} \rightarrow \tau$  при  $l \rightarrow \infty$ . Тогда  $\eta_{k_l} \rightarrow \tau$  при  $l \rightarrow \infty$ . Так как  $\Theta_0$  и  $\Theta_1$  насыщены, по теореме 4.5, мы приходим к противоречию.  $\square$

**Доказательство теоремы 4.10.** Предположим, что функции  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , ограничены. Определим заряды  $H_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , имеющие плотности  $\frac{dH_i}{d\mathbf{P}} = h_i$ . Определим множества

$$\Upsilon = \left\{ G : G = \sum_{i=1}^d b_i H_i, \mathbf{P} + G \in \Lambda, b_i \in R^1, 1 \leq i \leq d \right\}.$$

На множестве  $\Upsilon$  условие  $A$  совпадает с определением производной по Адамару. Так как дифференцируемость по Адамару означает равномерную дифференцируемость на компактах (Шапиро [37, предложение 3.3]), мы получаем

$$\left| T(\mathbf{P} + t_n G) - T(\mathbf{P}) - t_n \int \vec{h} dG \right| = o(|t_n|) \quad \text{при } t_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно на

$$G \in \left\{ H : H = \sum_{i=1}^d b_i H_i, |b_i| \leq 1, 1 \leq i \leq d \right\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что  $T$  насыщено.

Если  $\vec{h}$  неограничен, мы можем приблизить  $\vec{h}$  ограниченными функциями и повторить те же самые рассуждения.  $\square$

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Arcones, *The large deviation principle for stochastic processes* II. — Теория вероятн. и ее примен. **48** (2004), 19–44.
2. R. R. Bahadur, R. G. Savage, *The nonexistence of certain statistical procedures in nonparametric problems*. — Ann. Math. Statist. **27** (1956), 1115–1122.
3. N. Balakrishnan, M. S. Nikulin, V. Voinov, *Chi-squared Goodness of Fit Tests with Applications*. Elsevier, Oxford, 2013.
4. A. R. Barron, *Uniformly powerful goodness of fit tests*. — Ann. Statist. **17** (1989), 107–124.
5. A. Berger, *On uniformly consistent tests*. — Ann. Math. Statist. **18** (1951), 289–293.
6. V. I. Bogachev, *Measure Theory*. v. 2 Springer, NY., 2000.
7. В. И. Богачев, *Гауссовские меры*. Наука, М., 1997.
8. М. В. Бурнашев, *О минимаксном обнаружении неточно известного сигнала на фоне белого гауссовского шума*. — Теория вероятн. и ее примен. **24** (1979), 107–119.
9. L. Comminges, A. S. Dalalyan, *Minimax testing of a composite null hypothesis defined via a quadratic functional in the model of regression*. — Electronic J. Statist. **7** (2013), 146–190.
10. T. M. Cover, *On determining irrationality of the mean of a random variable*. — Ann. Statist. **1** (1973), 862–871.
11. A. Dembo, Y. Peres, *A topological criterion for hypothesis testing*. — Ann. Statist. **22** (1994), 106–117.
12. A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, Boston, 1993.
13. L. Devroye, G. Lugosi, *Almost sure classification of densities*. — J. Nonpar. Statist **14** (2002), 675–698.

14. D. L. Donoho, *One-sided inference about functionals of a density*. — Ann. Statist. **16** (1988), 1390–1420.
15. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, ч. I, Изд-во “Иностранной литературы”, М., 1962.
16. М. С. Ермаков, *Большие уклонения эмпирических мер и статистические критерии*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **207** (1993), 37–59.
17. M. S. Ermakov, *On distinguishability of two nonparametric sets of hypothesis*. — Statist. Probab. Letters **48** (2000), 275–282.
18. M. S. Ermakov, *Nonparametric signal detection with small type I and type II error probabilities*. — Statist. Inference Stoch. Processes **14** (2011), 1–19.
19. P. Ganssler, *Compactness and sequential compactness on the space of measures*. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **17** (1971), 124–146.
20. P. Groeneboom, J. Oosterhoff, F. H. Ruymgaart, *Large deviation theorems for empirical probability measures*. — Ann. Probab. **7** (1979), 553–586.
21. W. Hoeffding, J. Wolfowitz, *Distinguishability of sets of distributions*. — Ann. Math. Statist. **29** (1958), 700–718.
22. J. L. Horowitz, V. S. Spokoiny, *An adaptive, rate optimal test of a parametric model against a nonparametric alternative*. — Econometrica **69** (2001), 599–631.
23. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Об оценивании бесконечномерного сигнала в гауссовском белом шуме*. — Докл. АН СССР **236** (1977), 1053–1055.
24. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives I, II, III*. — Math. Methods Statist. **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.
25. Yu. I. Ingster, Yu. A. Kutoyants, *Nonparametric hypothesis testing for intensity of the Poisson process*. — Math. Methods Statist. **16** (2007), 218–246.
26. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-fit Testing under Gaussian Models*. Lecture Notes in Statistics **169** Springer, N.Y., 2002.
27. К. Иосида, *Функциональный анализ*. Мир, М., 1967.
28. A. Janssen, *Global power function of goodness of fit tests*. — Ann. Statist. **28** (2000), 239–253.
29. C. Kraft, *Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures*. — Univ. Californ. Publ. Stat. **2** (1955), 125–142.
30. S. R. Kulkarni, O. Zeitouni, *A general classification rule for probability measures*. — Ann. Statist. **23** (1995), 1393–1407.
31. L. Le Cam, *Convergence of estimates under dimensionality restrictions*. — Ann. Statist. **1** (1973), 38–53.
32. L. Le Cam, L. Schwartz, *A necessary and sufficient conditions for the existence of consistent estimates*. — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 140–150.
33. E. L. Lehmann, J. P. Romano, *Testing Statistical Hypothesis*. Springer Verlag, NY, 2005, 784 p.
34. A. B. Nobel, *Hypothesis testing for families of ergodic processes*. — Bernoulli **12** (2006), 251–269.
35. L. Schwartz, *On Bayes procedures*. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **4** (1965), 10–26.
36. J. Pfanzagl, *On the existence of consistent estimates and tests*. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **10** (1968), 43–62.
37. A. Shapiro, *On concepts of directional differentiability*. — J. Optimization Theor. Appl. **66** (1990), 477–487.

38. A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Ermakov M. S. On consistent hypothesis testing.

We explore natural links between different types of consistency: consistency, uniform consistency and pointwise consistency. On the base of these results we provide both sufficient conditions and necessary conditions for existence of different types of consistent tests for the problems of hypothesis testing on a probability measure of independent sample, on a mean measure of Poisson process, on a solution of linear ill-posed problem in Gaussian noise, on a solution of deconvolution problem and for a signal detection in Gaussian white noise. In the last three cases we show that necessary conditions and sufficient conditions coincide.

С.-Петербургский  
государственный университет,  
С.-Петербург, Россия;  
Институт Проблем Машиноведения РАН  
Большой пр. ВО, 61  
Санкт-Петербург  
Россия  
*E-mail:* erm2512@mail.ru

Поступило 19 октября 2015 г.