Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 442, 2015 г.

Я. И. Белопольская, Е. И. Немченко

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ И ВЯЗКОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

Нелинейные системы параболических уравнений возникают в различных областях естествознания, таких как физика, химия, биология и т.д. В частности, они возникают при описании различных законов сохранения, а также при описании динамики поведения взаимодействующих систем. Вероятностные подходы к изучению систем параболических нелинейных уравнений позволяют расширить класс изучаемых систем и точнее понять природу интересующих нас решений. Более того, в некоторых случаях вероятностный подход позволяет пролить дополнительный свет на структуру рассматриваемой системы и, как следствие, на структуру ее решения.

В этой работе будут описаны численные алгоритмы построения классических и вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений, основанные на вероятностных представлениях этих решений. Мы ограничимся здесь рассмотрением семилинейных и квазилинейных параболических систем с диагональной правой частью, предполагая, что старшие коэффициенты в системе одинаковы. В первом параграфе мы покажем, что вероятностные представления классических решений задачи Коши позволяют построить мультипликативные схемы для нахождения численных решений. Во втором параграфе будут построены вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши для рассматриваемых систем.

Ключевые слова: прямые и обратные стохастические дифференциальные уравнения, системы квазилинейных параболических уравнений, классические и вязкостные решения задачи Коши.

Работа поддержана грантом РФФИ 15-01-01453.

В последнем параграфе мы приведем пример численного решения семилинейной параболической системы, описывающей явления реакции-диффузии, с нелинейностью типа брюсселятора.

§1. Вероятностные подходы к построению классического решения квазилинейных параболических уравнений и систем

В этом параграфе мы рассмотрим вероятностные представления классического решения задачи Коши для семилинейных параболических уравнений и систем и построим алгоритм численного решения этой задачи. Аналогичные результаты для семилинейных скалярных уравнений были получены ранее в работах [2–4].

Рассмотрим задачу Коши для семилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial s} + a(x,f)\cdot\nabla f + TrA^*(x,f)\nabla^2 fA(x,f) + g(x,f) = 0 \tag{1.1}$$

$$f(T,x) = f_0(x). \tag{1.2}$$

Здесь A^* – транспонированная матрица,

$$a\cdot\nabla f = \sum_{k=1}^{d} a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, TrA^*(x,f)\nabla^2 fA(x,f) = \sum_{i,j,k=1}^{d} A_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}A_{jk}.$$

Как было показано в работе [2], при определенных условиях на коэффициенты $a(x,f), A(x,f), g(x,f)$ и $f_0(x)$ существует единственное классическое решение задачи (1.1), (1.2) и его вероятностное представление можно построить следующим образом.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – заданное вероятностное пространство и $w(t) \in R^d$ определенный на нем стандартный винеровский процесс. Обозначим $\mathcal{F}_t$ поток σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$, порожденный процессом $w(t)$.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\begin{gathered} d\xi_{s,x}(\theta) = a(\xi_{s,x}(\theta), f(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))d\theta + A(\xi_{s,x}(\theta), \\ f(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))dw(\theta),\ \ \xi_{s,x}(s) = x, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$f(s,x) = \mathbf{E}[f_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T g(\xi_{s,x}(\theta), f(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))d\theta]. \tag{1.4}$$

Будем говорить, что выполнено условие **C 1**, если коэффициенты $a(x,f) \in R^d, A(x,f) \in R^d \otimes R^d$ удовлетворяют оценкам

$$\|a(x,f)\|^2 + TrA^2(x,f) \leqslant K[1+\|x\|^2] + C_f\|f\|^2,$$
$$f \in R^d, \quad x \in R^d,$$
$$\|a(x,f)-a(y,g)\|^2 + Tr[A(x,f)-A(y,g)]^2 \leqslant L\|x-y\|^2 + L_{f,g}\|f-g\|^2,$$
$$y \in R^d, \quad g \in R^d,$$

а функция $f_0 : R^d \to R^d$ удовлетворяет оценкам

$$\sup_x \|f(x)\| \leqslant K_0 < \infty, \quad \|f_0(x) - f_0(y)\|^2 \leqslant L_0\|x-y\|^2.$$

Будем говорить, что выполнено условие **C 1,k**, если коэффициенты $a(x,f) \equiv a_f(x)$, $A_f(x)$ и функция f_0 удовлетворяют условию **C 1** вместе с производными до порядка k. Как следует из результатов работы [2], справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие* **C 1,1**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi(t), f(s,x))$ *системы* (1.3), (1.4), *определенное для всех* s *из интервала* $[T_1, T]$, *длина которого зависит от коэффициентов* $a_f(x), A_f(x)$ *и функции* f_0. *При этом случайный процесс* $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t-$*измерим и обладает марковским свойством.*

Теорема 1.2. *Если классическое решение задачи* (1.1), (1.2) *существует и единственно, то оно допускает представление вида* (1.4), *где* $\xi(t)$ *– решение СДУ* (1.3).

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие* **C 1,2**. *Тогда существует единственное решение системы* (1.1), (1.2) *определенное для всех* $s \in [T_1, T]$ *из некоторого интервала* $[T_1, T]$, *длина которого зависит от коэффициентов* $a_f(x), A_f(x)$ *и функции* $f_0(x)$.

Обозначим $H(t,s)$ отображение, заданное соотношением

$$\xi(t) = H(t,s)x,$$

В силу единственности решения (1.3) с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi_{s,x}(t) = H(t,s)x = H(t,\theta)H(\theta,s)x \tag{1.5}$$

из которого, с учетом свойств условных математических ожиданий, следует, что отображение $M(s,t), 0 \leqslant s \leqslant T$ вида $M(s,T)f_0(x) =$

$f(s,x) = Ef(T,\xi_{s,x}(T)) = E[f_0(\xi_{s,x}(T))]$ обладает мультипликативным свойством, т.е.

$$M(s,T)f(T,x) = M(s,\theta)M(\theta,T)f(T,x),$$

если $s \leqslant \theta \leqslant T$.

Заметим, что, как было показано в работах [3, 5], вероятностное представление (1.4) естественно использовать для построения алгоритма приближенного решения задачи (1.1), (1.2) и создания численных алгоритмов решения этой задачи.

Аналогичные результаты можно получить и для системы параболических уравнений. Рассмотрим систему семилинейных параболических уравнений с диагональной главной частью

$$\frac{\partial u_m}{\partial s} + \mathcal{L}_u u_m + \sum_{l=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{ml}(x,u)\nabla_i u_l \tag{1.6}$$
$$+ \sum_{l=1}^{d_1} c_{ml}(x,u)u_l + g_m(x,u) = 0$$

$$u(T,x) = u_0(x), \tag{1.7}$$

где $\mathcal{L}_u u_m = a(x,u)\cdot\nabla u_m + \frac{1}{2}TrA^*(x,u)\nabla^2 u_m A(x,u)$. Система стохастических уравнений, связанная с классическим решением задачи Коши (1.1), (1.2), имеет вид

$$d\xi_{s,x}(\theta) = a(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))d\theta + A(\xi_{s,x}(\theta),$$
$$u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))dw(\theta), \xi_{s,x}(s) = x \in R^d, \tag{1.8}$$

$$d\eta(\theta) = c(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))\eta(\theta)d\theta$$
$$+ C(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))(\eta(\theta), dw(\theta)), \eta(s) = h \in R^{d_1}, \tag{1.9}$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle$$
$$+ \int_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))\rangle d\theta], \tag{1.10}$$

где $\langle h,u\rangle = \sum\limits_{m=1}^{d_1} h_m u_m$.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2**, если выполнено условие **C 1**, $B^i_{ml} = \sum\limits_{k=1}^{d} C^k_{lm} A_{ki}$ и коэффициенты

$$c(x,u) \in R^{d_1} \otimes R^{d_1}, \quad C(x,u) \in R^{d_1} \otimes R^{d_1} \otimes R^d$$

удовлетворяют оценкам

$$\|c(x,u)h\|^2 + TrC^2(x,u)h \leqslant K[1 + C_u\|u\|^2]\|h\|^2, \ u \in R^{d_1}, \ x \in R^d,$$

$$\|[c(x,u) - c(y,v)]h\|^2 + Tr[[C(x,u) - C(y,v)]h]^2$$
$$\leqslant [L\|x-y\|^2 + L_{u,v}|u-v|^2]\|h\|^2, \quad y \in R^d, v \in R,$$

функция $g(x,u)$ удовлетворяет оценкам

$$\|g(x,u)\| \leqslant K[1 + \|u\|^p], \ \|g(x,u) - g(y,v)\|$$
$$\leqslant L\|x-y\| + K_{u,v}\|u-v\|,$$

а функция u_0 удовлетворяет оценкам

$$\sup_x \|u_(x)\| \leqslant K_0 < \infty, \quad \|u_0(x) - u_0(y)\|^2 \leqslant L_0\|x-y\|^2.$$

Будем говорить, что выполнено условие **C 2,k**, если выполнены условия **C 1,k** и коэффициенты $c(x,u)$, $C(x,u)$, а также функция u_0 удовлетворяют условию **C 2** вместе с производными до порядка k.

Как было показано в работах [1, 2], справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4. *Пусть выполнено условие* **C 2,1**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi_{s,x}(t), f(s,x))$ *системы СДУ* (1.8)–(1.10), *определенное для всех* s *из некоторого интервала,* $s \in [T_1, T]$, $T_1 < T$, *длина которого зависит от коэффициентов* $a_u(x), A_u(x), c_u(x), C_u(x)$ *и функции* u_0. *При этом случайный процесс* $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t$*-измерим и обладает марковским свойством, а процесс* $\eta(t)$ *порождает мультипликативный операторный функционал* $S(t,s)$ *процесса* $\xi(t)$ *по формуле* $\eta(t) = S(t,s)h$.

Теорема 1.5. *Если классическое решение задачи* (1.6), (1.7) *существует и единственно, то оно допускает представление вида* (1.10), *где* $\xi(t)$ *– решение СДУ* (1.8), *а* $\eta(t)$ *– решение СДУ* (1.9).

Теорема 1.6. *Пусть выполнено условие* **C 2,2**. *Тогда существует единственное классическое решение задачи Коши* (1.6), (1.7) *определенное для всех* $s \in [T_1, T]$ *из некоторого интервала, длина* $\delta = |T -$

$T_1|$ которого зависит от коэффициентов $a_u(x), A_u(x)$, $c_u(x), C_u(x)$ и функции $u_0(x)$.

Теорема 1.7. *В условиях теоремы* 1.4 *отображение $U(s,T)$, заданное соотношением*

$$\langle h, U(s,t)u_0(x)\rangle = \mathbf{E}\langle \eta(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle \\ = \langle h, \mathbf{E}[S^*(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))]\rangle, \quad (1.11)$$

обладает эволюционным свойством.

Приведем, наконец, одно важное наблюдение, показывающее, что ряд результатов, справедливых для задачи (1.1), (1.2), можно распространить и на задачу (1.6), (1.7).

Введем обозначения $\kappa = (x,h)$,

$$q(\kappa) = \begin{pmatrix} a(x) \\ c(x)h \end{pmatrix}, \quad Q(\kappa) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & C(x)h \end{pmatrix}, \\ G(\kappa, u) = \langle h, g(x,u)\rangle. \quad (1.12)$$

Важным характеристическим свойством системы (1.6), является тот факт, что она эквивалентна скалярному уравнению для функции

$$\Phi(s,x,h) = \langle h, u(s,x)\rangle,$$

имеющему вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2} TrQ^*(\kappa,u)\nabla^2\Phi Q\kappa, u) + \langle q(\kappa,u), \nabla\Phi\rangle + G(\kappa,u) = 0, \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} TrQ^*\nabla^2\Phi(s,x,h)Q \\ &= A^*_{ki}\frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_i \partial x_j}A_{jk} + 2C^{lm}_k h_l \frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_j \partial h_m}A_{jk} \\ &\quad + C^{qm}_k h_m \frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial h_q \partial h_p} C^{pn}_k h_n \\ &= A^*_{ki}\frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_i \partial x_j}A_{jk} + 2C^{lm}_k h_l \frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial x_j \partial h_m}A_{jk}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже, если не оговорено противное, мы будем предполагать суммирование по повторяющимся индексам. Из линейности $\Phi(s,x,h)$

по h вытекает, что $\frac{\partial^2\Phi(s,x,h)}{\partial h_q \partial h_p} \equiv 0$. Кроме того,

$$\langle q, \nabla\Phi(s,x,h)\rangle = a_j \frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial x_j} + c_{lm} h_m \frac{\partial\Phi(s,x,h)}{\partial h_l},$$

$$G(s,x,h) = \langle h, g(s,x,u,A^*\nabla u)\rangle.$$

Для того, чтобы построить приближенное решение задачи (1.6), (1.7) на основании представления (1.10) и разработать алгоритм численного ее решения, рассмотрим дискретный аналог системы (1.8)–(1.10).

Пусть $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ и $\Delta = \frac{T-s}{n}$ задает равномерное разбиение отрезка $[s,T]$, на котором существует решение рассматриваемой задачи. Поскольку, как нетрудно проверить, используя марковское свойство процесса $\xi(t)$, мультипликативное свойство операторного функционала $S(t,s)$ и свойства условных средних, соотношение

$$\begin{aligned}\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle &= \langle h, U(s,T)u_0(x)\rangle \\ &= \langle h, \mathbf{E}S^*(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T))]\rangle \quad (1.14)\end{aligned}$$

определяет эволюционное семейство $U(s,T)$, действующее в пространстве $C(R^d)$ непрерывных ограниченных функций, то справедливо соотношение

$$U(s,T)u_0(x) = \prod_{k=1}^{n} U(t_k, t_{k+1})u_0(x).$$

В силу мультипликативности $U(s,T)$ справедливо равенство

$$U(s,T)u_0(x) = \lim_{n\to\infty} \Pi_{k=1}^{n} U(t_k, t_{k+1})u_0(x),$$

где

$$\begin{aligned}\langle h, U(t_k,t_{k+1})u(t_{k+1},x)\rangle &= \mathbf{E}[\langle \eta_{t_k,h}(t_{k+1}), u(t_{k+1}, \xi_{t_k,x}(t_{k+1}))\rangle] \\ &+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{E}[\langle \eta_{t_k,h}(\theta), g(\xi_{t_k,x}(\theta), u(\theta, \xi_{t_k,x}(\theta))\rangle]d\theta.\end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы построить аппроксимацию функции $u(s,x)$ достаточно построить аппроксимацию эволюционного семейства $U(s,T)$.

Ограничимся для простоты случаем $d = 1$. Пусть $\{\epsilon_k^n\}_{k=1}^n$ – семейство независимых одинаково распределенных случайных величин со

значениями в $\{-1,1\}$ таких, что $P\{\epsilon_k^n = 1\} = P\{\epsilon_k^n = -1\} = \frac{1}{2}$. Обозначим $\mathcal{F}_k^n = \sigma\{\epsilon_1^n, \dots, \epsilon_k^n\}$.

Для того, чтобы построить аппроксимацию эволюционного семейства $U(s,T)$, рассмотрим явную схему Эйлера для построения приближенного решения системы СДУ (1.8), (1.9)

$$\xi_{t_k,x}(t_{k+1}) \approx \bar{\xi}_{t_k,x}(t_{k+1}) = x + a(x, u(t_k,x))\Delta + A(x, u(t_k,x))\Delta^{\frac{1}{2}}\epsilon_k, \tag{1.15}$$

$$\eta^m_{t_k,h}(t_{k+1}) \approx \bar{\eta}^m_{t_k,h}(t_{k+1}) = h^m + c^{ml}(x, u(t_{k+1},x))h^l\Delta + C^{ml}(x, u(t_k,x))h^l\Delta^{\frac{1}{2}}\epsilon_k, \tag{1.16}$$

и зададим приближенно функцию $u(t_k,x)$ с помощью соотношения

$$\langle h, u(t_k,x)\rangle \approx \mathbf{E}\Big[\langle \bar{\eta}_{t_k,h}(t_{k+1}), u(t_{k+1}, \bar{\xi}_{t_k,x}(t_{k+1}))\rangle + \langle h, g(x, u(t_k,x)\rangle\Delta\Big]. \tag{1.17}$$

Заметим, что выбирая случайную величину $\epsilon_k\Delta$, где ϵ_k – одинаково распределенные независимые случайные величины с распределением $P(\epsilon_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$, в качестве аппроксимации приращения винеровского процесса $\Delta_k w = w(t_k) - w(t_{k-1})$, мы упростим вычисление математического ожидания в (1.17).

Рассмотрим вначале случай $g(x,u) \equiv 0$ и обозначим $\bar{U}(t_k, t_{k+1})$ линейный ограниченный оператор, действующий по правилу

$$\begin{aligned}\langle h, \bar{u}(t_k,x)\rangle &= \langle h, \bar{U}(t_k,t_{k+1})\bar{u}(t_{k+1},x)\rangle \\ &= \mathbf{E}\left[\langle \bar{\eta}_{t_k,h}(t_{k+1}), \bar{u}(t_{k+1}, \bar{\xi}_{t_k,x}(t_{k+1}))\rangle\right].\end{aligned} \tag{1.18}$$

Заметим, что отображение $\bar{U}(t_k,t_{k+1})$ вида (1.18) не обладает мультипликативным свойством, т.е.

$$\bar{U}(t_{k-1},t_{k+1}) \neq \bar{U}(t_{k-1},t_k)\bar{U}(t_k,t_{k+1}).$$

Обозначим $\bar{U}_n(s,T)$ отображение, заданное соотношением

$$\bar{U}_n(s,T)u_0(x) = \prod_{k=0}^{n} \bar{U}(t_k,t_{k+1})u_0(x). \tag{1.19}$$

Пусть $S(t_k,t_{k+1})$ – случайное отображение, порожденное решением СДУ (1.9) на интервале $[t_k,t_{k+}]$, $S(t_k,t_{k+1})h = \eta(t_{k+1})$, а $\bar{S}(t_k,t_{k+1})h$

– его апроксимация, заданная соотношением $\bar{S}(t_k, t_{k+1})h = \bar{\eta}(t_{k+1})$. Тогда аппроксимацию $\bar{U}(t_k, t_{k+1})$ отображения $U(t_k, t_{k+1})$, заданного соотношением (1.11), можно построить следующим образом

$$u^m(t_k, x) = \mathbf{E}_{t_k,x}\left[\sum_{l=1}^{d_1}[S^*_{ml}(t_k, t_{k+1})u^l(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}))]\right]$$
$$= \sum_{l=1}^{d_1} U^{ml}(t_k, t_{k+1})u^l(t_{k+1}, x) \sim$$

$$\bar{u}^m(t_k, x) = \sum_{l=1}^{d_1} \bar{U}^{ml}(t_k, t_{k+1})\bar{u}^l(t_{k+1}, x) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d_1}[[\delta^{ml}$$
$$+ c^{ml}(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta + C^{ml}(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta^{\frac{1}{2}}]$$
$$\bar{u}^l(t_{k+1}, x + a(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta + A(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta^{\frac{1}{2}})]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d_1}[[\delta^{ml} + c^{ml}(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta - C^{ml}(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta^{\frac{1}{2}}]$$
$$\bar{u}^l(t_{k+1}, x + a(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta - A(x, \bar{u}(t_{k+1}, x))\Delta^{\frac{1}{2}})]. \tag{1.20}$$

Несмотря на то, что $\bar{U}(s, t)$ не является эволюционным отображением, т.е.

$$\bar{U}(s, t) \neq \bar{U}(s, \theta)\bar{U}(\theta, t),$$

его можно использовать для построения мультипликативной аппроксимации отображения $U(s, t)$.

Покажем, что при $n \to \infty$ отображение $\bar{U}_n(s, T)$ вида (1.18) сходится к отображению $U(s, T)$

$$U(s, T)u_0(x) = \mathbf{E}[S^*(s, T)u_0(\xi_{s,x}(T))].$$

Для этого нам понадобится ряд дополнительных результатов.

Заметим, что, как следует из работы [2], для отображений $M^q(t_k, t_{k+1})$, $q = 1, 2$ таких, что

$$M^1(t_k, t_{k+1}) = U(t_k, t_{k+1}) \quad \text{и} \quad M^2(t_k, t_{k+1}) = \bar{U}(t_k, t_{k+1}),$$

справедливы следующие оценки:

$$\|M^q(t_k, t_{k+1})u(t_{k+1})\|_\infty \leqslant \|u(t_{k+1})\|_\infty \exp\{K\Delta\} + \beta\Delta,$$
$$\|M^q(t_k, t_{k+1})u(t_{k+1}) - M^q(t_k, t_{k+1})v(t_{k+1})\| \leqslant \gamma\|u(t_{k+1}) - v(t_{k+1}\|_\infty.$$

Воспользуемся также общим результатом из теории нелинейных полугрупп, называемым формулой Марсдена [6]. В случае линейных полугрупп соответствующая формула – это формула Далецкого–Троттера [7, 8].

Теорема 1.8. *Пусть $V(s,T)$ и $\overline{V}(s,T)$ – ограниченные отображения, действующие в пространстве $C([0,\infty)\times R^d)$. Предположим, что $V(s,T)$ – эволюционное семейство, обладающее свойствами*

$$\|V(s,T)v - V(s,T)v_1\|_\infty \leqslant e^{\gamma(T-s)}\|v-v_1\|_\infty,$$
$$\|V(s,T)v\|_\infty \leqslant K\|v\|_\infty,$$

а $\bar{V}(s,T)$ – заданное отображение, обладающее свойствами

$$\bar{V}(s,s)v = v, \quad \|\bar{V}(s,T)v - \bar{V}(s,T)v_1\|_\infty \leqslant e^{\bar{\gamma}(T-s)}\|v-v_1\|_\infty,$$

$$\|\bar{V}(s,T)v\|_\infty \leqslant K\|v\|_\infty, \quad v, v_1 \in C(R, R^d).$$

Пусть $V(s,T)f$ и $\bar{V}(s,T)f$ дифференцируемы по s при фиксированном T и существует такая константа γ, что для некоторого $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|V(t_k,t_{k+1})v - \bar{V}(t_k,t_{k+1}v\|_\infty \leqslant \gamma(\Delta)^{1+\alpha}\|v\|_\infty$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\bar{V}(t_k,t_{k+1})v = V(s,T)v.$$

Доказательство. Оценим разность

$$\delta_n = V_n(s,T)f - \bar{V}_n(s,T)f.$$

Поскольку δ_n можно представить в виде

$$\begin{aligned}\delta_n &= \prod_{k=0}^{n-1}V(t_k,t_{k+1})v - \prod_{k=0}^{n-1}\bar{V}(t_k,t_{k+1})v \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left[\prod_{k=0}^{j-1}V(t_k,t_{k+1})[V(t_j,t_{j+1}) - \bar{V}(t_j,t_{j+1})]\prod_{i=1}^{j}\bar{V}(t_i,t_{i+1})v\right]\end{aligned}$$

то, используя неравенство треугольника, получим

$$\|\delta_n\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big\| \prod_{k=0}^{j-1} V(t_k,t_{k+1})[V(t_j,t_{j+1}) - \bar V(t_j,t_{j+1})] \prod_{i=0}^{j-1} \bar V(t_i,t_{i+1}) v \Big\|_\infty .$$

В силу условий теоремы, нетрудно проверить, что

$$\|\delta_n\|_\infty \leqslant e^{\kappa(T-s)} \sum_{k=1}^{n} \gamma(\Delta)^{1+\alpha} \|v\|_\infty = (T-s) e^{\kappa(T-s)} \|v\|_\infty \gamma(\Delta)^\alpha \to 0$$

при $n \to \infty$.

Обозначим

$U_n(s,T) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} U(t_k,t_{k+1})$ и $\bar U_n(s,T) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \bar U(t_k,t_{k+1})$. □

Лемма 1.9. *Пусть выполнены условия* **C 2.2**. *Тогда отображения* $U(s,T)u_0(x) = \mathbf{E}_{s,x}[S^*(s,T)u_0(\xi(T))]$ *и*

$$\bar U_n(s,T)u_0(x) = \mathbf{E}_{s,x}[\bar S_n^*(s,T)u_0(\bar\xi_n(T))]$$

подчиняются условиям теоремы 1.8 *и, следовательно, существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \bar U_n(t_k,t_{k+1})u_0 = U(s,T)u_0.$$

Замечание. При выполнении условий **C 2.2** утверждения леммы 1.9 справедливы и в случае, когда $g \neq 0$, т.е. для отображений

$$U(s,T)u_0(x) = \mathbf{E}\Big[S^*(s,T)u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T S^*(s,\theta) g(\xi_{s,x}(\theta), u(\theta,\xi_{s,x}(\theta)))d\theta\Big]$$

и

$$\bar U(t_k,t_{k+1})\bar u(t_{k+1},x) = \mathbf{E}\Big[\bar S^*(t_k,t_{k+1})\bar u(t_{k+1},\bar\xi_{t_k,x}(t_{k+1})) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar S^*(t_k,\theta) g(\bar\xi_{t_k,x}(\theta), u(\theta,\bar\xi_{t_k,x}(\theta)))d\theta\Big].$$

Воспользуемся построенными выше аппроксимациями для получения численного метода построения классического решения задачи Коши (1.6), (1.7). Для того, чтобы получить эффективный численный алгоритм, нам понадобится дополнительно провести дискретизацию пространственной переменной. Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $x_j = x + j\alpha\Delta, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ где $\alpha > 0$, т.е. выберем шаг по пространству равный $\Delta_x = \alpha\Delta$ Используя линейную интерполяцию, сформулируем следующий алгоритм вычисления функции $\bar{u}(t_k, x)$. Если $x = x_j$ для $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ то вычислим функцию $\bar{u}(t_k, x)$ по формуле (1.13), а если $x_j < x < x_{j+1}, k = n-1, \ldots, 1, 0,$, то воспользуемся линейной интерполяцией

$$\bar{u}(t_k, x) = \frac{x_{j+1} - x}{\alpha\Delta}\bar{u}(t_k, x_j) + \frac{x - x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(t_k, x_{j+1}), \tag{1.21}$$

для $x_j < x < x_{j+1}, k = n-1, \ldots, 1, 0.$

Доказательство сходимости полученных приближенных выражений при $N \to \infty$, в силу эквивалентности системы (1.6) и скалярного уравнения (1.13), вытекает из результатов работы [5].

Рассмотрим далее задачу Коши вида (1.6) с коэффициентами, зависящими как от самой функции u, так и от ее градиента ∇u, т.е задачу Коши вида

$$\frac{\partial v}{\partial s} + a(x, v, \nabla v) \cdot \nabla v + TrA^*(x, v, \nabla v)\nabla^2 v A(x, v, \nabla v) \\ + g(x, v, \nabla v) = 0, v(T, x) = v_0(x). \tag{1.22}$$

Для краткости мы сохраним сокращенные обозначения вида $a_v(x) = a(x, v(x), \nabla v(x))$.

Для того, чтобы воспользоваться подходом, описанным в предыдущем параграфе, вложим рассматриваемую систему в более сложную систему, полученную из (1.22) в результате построения ее дифференциального продолжения. Другими словами, продифференцируем два раза систему (1.22) по переменной x и рассмотрим полученную в результате систему уравнений относительно новой функции $u(s, x) =$

$(v(s,x), \nabla v(s,x), \nabla^2 v(s,x)$. Отметим, что при первом дифференцировании по x мы получим уравнение для функции $u^1(s,x) = \nabla v(s,x)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^1}{\partial s} &+ a(x,u^0,u^1)\cdot\nabla u^1 + TrA^*(x,u^0,u^1)\nabla^2 u^1 A(x,v,\nabla v)\\ &+ \nabla g(x,u^0,u^1) + [\nabla_x a + \nabla_{u^0} a u^1 + \nabla_{u^1} a \nabla u^1]\cdot u^1\\ &+ [\nabla_x A + \nabla_{u^0} A u^1 + \nabla_{u^1} A \nabla u^1]\\ &\times \nabla u^1 + \nabla_{u^0} g u^1 + \nabla_{u^1} g u^2 = 0. \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Здесь ∇_x, ∇_v обозначает градиент по соответствующему аргументу. Поскольку уравнение (1.23) все еще нелинейно относительно ∇u^1, поскольку содержит член, включающий $[\nabla u^1]^2$, то система (1.22), (1.23) относительно пары функций $v = u^0$ и $\nabla v = u^1$ еще не будет семилинейной. Однако, продифференцировав уравнение (1.23) по x и обозначив $u^2 = \nabla u^1$, мы получим семилинейную систему уравнений, включающую уравнения (1.22), (1.23) и

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^2}{\partial s} &+ a(x,u^0,u^1)\cdot\nabla u^2 + TrA^*(x,u^0,u^1)\nabla^2 u^2 A(x,u^0,u^1)\\ &+ \nabla g(x,u^0,u^1) + [\nabla_x a + \nabla_{u^0} a u^1 + \nabla_{u^1} a u^2]\cdot u^2\\ &+ [\nabla_x A + \nabla_{u^0} A u^1 + \nabla_{u^1} A u^2]\cdot u^2 = 0. \qquad (1.24)\end{aligned}$$

Остается переписать систему (1.22) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^0}{\partial s} &+ a(x,u^0,u^1)\cdot\nabla u^0 + TrA^*(x,u^0,u^1)\nabla^2 u^0 A(x,u^0,u^1)\\ &+ g(x,u^0,u^1) = 0 \qquad (1.25)\end{aligned}$$

и заменить в (1.24) ∇u^1 на u^2, чтобы получить семилинейную систему (1.23)–(1.25), имеющую такую же структуру, как исходная система (1.22). Таким образом, переход от системы вида (1.1) к системе вида (1.22), у которой все коэффициенты и функция g зависят от $(x, u, \nabla u)$ принципиальных изменений за собой не влечет, хотя и делает задачу более громоздкой.

В заключение этого параграфа заметим, что для построения численного решения задачи Коши для квазилинейной параболической системы, нам нужно будет воспользоваться приведенными выше результатами, выбрав в качестве $u(T,x) = (v_0(x), \nabla v_0(x), \nabla^2 v_0(x))$.

§2. Вероятностные подходы к построению вязкостных решений квазилинейных параболических уравнений и систем

В этом параграфе мы рассмотрим вероятностные представления вязкостных решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений и систем и построим алгоритм численного решения этой задачи.

Для того, чтобы пояснить основные идеи, лежащие в основе подхода, основанного на теории обратных стохастических уравнений (ОСДУ) мы выберем в качестве модельной системы систему вида (1.6) и предположим, что коэффициенты a, A, c, C зависят только от x, а функция g зависит от x, u и ∇u. Для описания подхода, основанного на ОСДУ к решению задачи Коши

$$\frac{\partial u_m}{\partial s} + \mathcal{L}u_m + \sum_{l=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{ml}(x)\nabla_i u_l + \sum_{l=1}^{d_1} c_{ml}(x)u_m + g_m(x,u,\nabla u) = 0, \quad (2.1)$$

$$u_m(T,x) = u_{m0}(x), \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{L}u_m = a(x)\cdot\nabla u_m + \frac{1}{2}TrA^*(x)\nabla^2 u_m A(x), \quad (2.3)$$

предположим, что существует единственное классическое решение $u(t,x)$ задачи (2.1), (2.2) и рассмотрим случайный процесс $\gamma(t) = \langle\eta(t), u(t,\xi(t))\rangle$, где процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t), \xi(s) = x, \quad (2.4)$$

$$d\eta(t) = c(\xi(t))\eta(t)\,dt + C(\xi(t))(\eta(t), dw(t)), \eta(s) = h. \quad (2.5)$$

В дальнейшем нам понадобится также приведенная в п.1 интерпретация системы СДУ (2.4), (2.5) как одного уравнения вида

$$d\kappa(t) = q(\kappa(t))\,dt + Q(\kappa(t))dW(t),\ \kappa(s) = \kappa = (x,h) \in R^d \times R^{d_1}. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$\tilde{G}(\kappa,y,z) = \langle h, g(x,y,z)\rangle, \quad W(t) = (w(t), w(t))^*.$$

Воспользовавшись формулой Ито, нетрудно проверить, что стохастический дифференциал процесса $\gamma(t) = \langle \eta(t),\, u(t,\xi(t))\rangle$ имеет вид

$$d\gamma(t) = \sum_{m,l=1}^{d_1} h_m S^*_{ml}(s,t)$$
$$\times \left[\frac{\partial u_l}{\partial t} + \mathcal{L}u_l + \sum_{l,q=1}^{d_1}\sum_{i,k=1}^{d} C^k_{lq}(x) A_{ki}\nabla_i u_q + \sum_{l=1}^{d_1} c_{lq} u_q\right](t,\xi(t))\,dt \tag{2.7}$$
$$+ \sum_{m=1}^{d_1} h_m \sum_{l=1}^{d_1}\sum_{k=1}^{d} S^*_{ml}\left[C^k_{lq}u_q + \sum_{i=1}^{d} A_{ki}\nabla_i u_l\right](t,\xi(t))\,dw_k(t).$$

Далее из соотношения (2.1) вытекает равенство

$$d\gamma(t) = -\langle h, S^*(s,t)g(\xi(t), u(t,\xi(t)), \nabla u(t,\xi(t))\rangle\,dt$$
$$+\langle h, S^*(s,t)[C^*(\xi(t))u(t,\xi(t)) + A(\xi(t))\nabla u(t,\xi(t))]dw(t)\rangle. \tag{2.8}$$

Введем обозначения

$$y(t) = S^*(s,t)u(t,\xi(t)),$$
$$z(t) = S^*(s,t)[C^*(\xi(t))u(t,\xi(t)) + A(\xi(t))\nabla u(t,\xi(t))],$$
$$f(\kappa(t), y(t), z(t)) = S^*(s,t)g(\kappa(t), [S^*(s,t)]^{-1}y(t),$$
$$A^{-1}[[S^*(s,t)]^{-1}z(t) - C^*y(t)].$$

Тогда, в силу линейности левой и правой части соотношения (2.8) относительно h, получим

$$\begin{aligned} dy(t) &= -f(\kappa(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)\,dw(t),\\ y(T) &= S^*(s,T)u_0(\xi(T)) = \zeta. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Систему СДУ (2.6), (2.9) называют слабо связанной системой прямых-обратных СДУ или ПОСДУ. Покажем, что система ПОСДУ (2.6), (2.9) позволяет построить вязкостное решение задачи Коши (2.1), (2.2).

Сформулируем условия, гарантирующие существование и единственность решения ПОСДУ (2.6), (2.9).

Будем говорить, что выполнены условия **C 3**, если выполнены условия **C 2** и функция $f(x,y,z)$ непрерывна по y и подчиняется следующим оценкам:

a) $\|f(x,y,z)\| \leqslant K[\|y\| + \|z\|]$, где $\|z\| = [Trz^*z]^{\frac{1}{2}}$;

b) $\|f(x,y,z) - f(x,y,z)\| \leqslant K\|z - z_1\| \forall y \in R^{d_1}, z, z_1 \in R^{d_1} \otimes R^d$

и **C 3**' если b) заменить на

c) $\langle y - y_1, f(x,y,z) - f(x,y_1,z)\rangle \leqslant \mu\|y - y_1\|^2$.

Решением ПОСДУ (2.6), (2.9) назовем тройку $(\kappa(t), y(t),\ z(t))$ случайных прогрессивно $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных процессов $(\kappa(t),\ y(t),\ z(t))$ со значениями в $R^{d_2} \times R^{d_1} \times R^{d_1 \times d}$ таких, что $\int\limits_0^T E\|z(t)\|^2 dt < \infty$, и с вероятностью 1 выполняются равенства

$$\kappa(t) = \kappa + \int\limits_s^t q(\kappa(\theta))d\theta + \int\limits_s^t Q(\kappa(\theta))dw(\theta),$$

$$y(t) = \zeta + \int\limits_t^T f(\xi(\theta), y(\theta), z(\theta))d\theta - \int\limits_t^T z(\theta)dw(\theta),$$

$$q \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Как следует из работ [9, 12] справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* **C 3** *или* **C 3'**. *Тогда существует единственное решение* $(\kappa(t), y(t), z(t))$ *ПОСДУ* (2.6), (2.9).

Как уже упоминалось в предыдущем параграфе, задачу Коши (2.1), (2.2) можно свести к скалярному уравнению вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2} Tr Q^* \nabla^2 \Phi Q + \langle q, \nabla \Phi\rangle + G(t, \kappa, \Phi, \nabla\Phi) = 0, \\ &\Phi(T) = \langle h, u_0(x)\rangle \end{aligned} \tag{2.10}$$

относительно функции $\Phi(s,\kappa) = \langle h, u(s,x)\rangle, \quad \kappa = (x,h)$. Это позволяет ввести понятие вязкостного решения системы (2.1), опираясь на сформулированное в работе [11] понятие вязкостного решения для скалярного уравнения (2.10).

Напомним определение вязкостного решения задачи Коши для нелинейного скалярного параболического уравнения (2.10). Обозначим

$$\mathcal{Q}\Phi = \frac{1}{2} Tr Q^* \nabla^2 \Phi Q + \langle q, \nabla\Phi\rangle.$$

Будем говорить, что:

1) функция $\Phi(s,\kappa) = \langle h, u(s,x)\rangle$ является вязкостным субрешением задачи Коши (2.10), если $\Phi(T,\kappa) \leqslant \Phi_0(\kappa)$, $\kappa = (x,h) \in R^{d_2}, d_2 = d + d_1$ и для любой функции $\Psi(s,\kappa) = \langle h, \phi(s,x)\rangle$, $\phi \in C^{1,2}([0,T] \times R^d)$ в

точке $(s,\kappa)\in[0,T]\times R^{d_2}$, являющейся точкой локального максимума функции $\Phi(s,\kappa)-\Psi(s,\kappa)$ справедлива оценка

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s}(s,\kappa)+\mathcal{Q}\Psi(s,\kappa)+G(s,\kappa,\Phi,\nabla\Psi)\geqslant 0; \tag{2.11}$$

2) функция $\Phi(s,\kappa)=\langle h,u(s,x)\rangle$ является вязкостным суперрешением задачи Коши (2.10), если $\Phi(T,\kappa)\geqslant\Phi_0(\kappa)$, $\kappa=(x,h)\in R^d\times R^{d_1}$ и для любой функции $\Psi(s,\kappa)=\langle h,\phi(s,x)\rangle$, $\phi\in C^{1,2}([0,T]\times R^d)$ в точке $(s,\kappa)\in[0,T]\times R^{d_2}$, являющейся точкой локального минимума функции $\Phi(s,\kappa)-\Psi(s,\kappa)$ справедлива оценка

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s}(s,\kappa)+\mathcal{Q}\Psi(s,\kappa)+G(s,\kappa,\Phi,\nabla\Psi)\leqslant 0; \tag{2.12}$$

3) функция $\Phi(s,\kappa)$ является вязкостным решением задачи Коши (2.10), если $\Phi(s,\kappa)$ является как вязкостным субрешением, так и вязкостным суперрешением этой задачи.

Будем говорить, что функция $u(s,x)\in R^{d_1}$, $(s,x)\in[0,T]\times R^d$ является вязкостным решением задачи Коши (2.1), (2.2), если скалярная функция $\Phi(s,\kappa)=\langle h,u(s,x)\rangle$ является как вязкостным субрешением, так и вязкостным суперрешением задачи Коши (2.10).

Чтобы установить связь случайных процессов $(\kappa(t),y(t),z(t))$, удовлетворяющих ПОСДУ (2.6), (2.9), с вязкостным решением $u(s,x)$ задачи Коши для квазилинейной системы (2.1) достаточно показать, что функция $\Phi(s,\kappa)=\langle h,u(s,x)\rangle=\gamma(s)$ является вязкостным решением задачи Коши (2.10).

Обозначим

$$[\mathcal{A}\varphi]_m(x)=\frac{1}{2}TrA^*(x)\nabla^2\varphi_m A(x)+\langle a(x),\nabla\varphi_m\rangle \\ +B^i_{ml}(x)\nabla_i\varphi_l+c_{ml}(x)\varphi_l,$$

$i=1,\dots d$, $m,l=1,\dots,d_1$ и

$$\mathcal{M}_m(x,u,p,q_m)=\frac{1}{2}TrA^*(x)q_m A(x)+\langle a(x),p_m\rangle \\ +B^i_{ml}(x)\nabla_i p_l+c_{ml}(x)\phi_l+g_m(x,u,p).$$

Из приведенных выше определений следует, что $u(s,x)$ является субрешением (2.1), (2.2), если для каждого $m=1,\dots,d_1$ справедливо неравенство $u_m(T,x)\leqslant u_{0m}(x)\rangle$, и для любой функции $\varphi_m\in$

$C^{1,2}([0,T]\times R^d)$ и точки $(s,x)\in[0,T]\times R^d$, в которой достигается максимум разности $u_m(\tilde s,\tilde x)-\varphi_m(\tilde s,\tilde x)$ справедлива оценка

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial s}+\mathcal{M}(x,u,\nabla\varphi,\nabla^2\varphi_m)\rangle\geqslant 0 \tag{2.13}$$

и $u(s,x)$ является суперрешением (2.1),(2.2), если для каждого $m=1,\dots,d_1$ справедливо неравенство $u_m(T,x)\geqslant u_{0m}(x)\rangle$, и для любой функции $\varphi_m\in C^{1,2}([0,T]\times R^d)$ и точки $(s,x)\in[0,T]\times R^d$ в которой достигается минимум разности $u_m(\tilde s,\tilde x)-\varphi_m(\tilde s,\tilde x)$ справедлива оценка

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial s}+\mathcal{M}(x,u,\nabla\varphi,\nabla^2\varphi_m)\rangle\leqslant 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда функция* $u(s,x)=y(s)$, *определенная решением ПОСДУ* (2.6), (2.9), *задает непрерывное по* (s,x) *вязкостное решение задачи* (2.1), (2.2).

Доказательство. При выполнении условий **C 3** непрерывность функции $u(s,x)=y^{s,x}(s)$ по x и s вытекает из общих результатов теории ОСДУ [9]. Покажем, что $u(s,x)$ – вязкостное решение (2.1), (2.2), для чего нужно проверить, что u является как суб- так и суперрешением (2.1),(2.2). Без потери общности, полагая $h_m>0, m=1,\dots,d_1$, проверим, что u является субрешением (2.1), (2.2). Для этого нужно показать, что в точке (s,x), в которой достигается локальный максимум разности $u_m(s,x)-\phi_m(s,x), m=1,\dots,d_1$, который без ограничения общности положим равным нулю, справедлива оценка (2.11).

Предположим обратное, т.е. пусть существует

$$m\in\{1,\dots,d_1\},$$

для которого

$$\mathcal{K}_m^{u,\phi}(s,x)=\frac{\partial\phi_m}{\partial s}+[\mathcal{A}\phi]_m(s,x)+g_m(x,u(s,x),\\ K(u,\nabla\phi)(s,x))\rangle<0, \tag{2.15}$$

где

$$K(u,\nabla\phi)(s,x)=\begin{pmatrix}A^*(x)\nabla\phi(s,x)\\ C^*(x)u(s,x)\end{pmatrix}.$$

В силу непрерывности функции $u(s,x)$ существует такое число α, $0<\alpha\leqslant T-s$, что для $\theta\in[s,s+\alpha]$, $x_1\in R^d, h_1\in R^{d_1}$, $\|x-x_1\|\leqslant\alpha$, справедливы оценки

$$\Phi(\theta,x_1,h)-\Psi(\theta,x_1,h)\leqslant 0 \tag{2.16}$$

и

$$\left\langle h, \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{A}\phi\right)(\theta, x_1) + g(x_1, u(\theta, x_1), K(u, \nabla\phi)(\theta, x_1))\right\rangle < 0. \quad (2.17)$$

Рассмотрим процессы $(\xi_{s,x}(t), \eta_{s,h}(t))$ удовлетворяющие (2.4), (2.5) и пусть момент τ задан соотношением

$$\tau = \inf\{t \geqslant s : \|\xi_{s,x}(t) - x\| \geqslant \alpha\} \\ \wedge \inf\{t \geqslant s : \|\eta_{s,h}(t) - h\| \geqslant \alpha\} \wedge (s + \alpha).$$

Из результатов работ [12, 13] следует, что пара процессов

$$(\hat{y}(t), \hat{z}(t)) = (y^{s,x}(t \wedge \tau), I_{[s,\tau]}(t) z^{s,x}(t \wedge \tau)), \quad s \leqslant t \leqslant s + \alpha$$

удовлетворяет ОСДУ

$$\widehat{y}(t) = S^*(t, \tau) u([s + \alpha] \wedge \tau, \xi([s + \alpha] \wedge \tau)) \\ + \int_t^{s+\alpha} I_{[s,\tau]}(\theta) f(\xi(\theta), \hat{y}(\theta), \hat{z}(\theta)) d\theta - \int_t^{s+\alpha} \hat{z}(\theta)\, dw(\theta)\rangle, \\ s \leqslant t \leqslant s + \alpha. \quad (2.18)$$

С другой стороны, воспользовавшись формулой Ито, нетрудно проверить, что пара процессов

$$(\tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = (S^*(t, t \wedge \tau)\phi(t \wedge \tau, \xi_{s,x}(t \wedge \tau)), I_{[s,\tau]}(t) K(u, \nabla\phi)(t, \xi_{s,x}(t))), \\ s \leqslant t \leqslant s + \alpha,$$

где

$$K(u, \nabla\phi)(t, \xi_{s,x}(t)) = \begin{pmatrix} S^*(s, t) A^*(\xi_{s,x}(t)) \nabla\phi(t, \xi_{s,x}(t)) \\ S^*(s, t) C^*(\xi_{s,x}(t)) u(t, \xi_{s,x}(t)) \end{pmatrix}, \\ s \leqslant t \leqslant s + \alpha,$$

удовлетворяет ОСДУ

$$\tilde{y}(t) = (S^*(s,\tau)\phi(\tau,\xi_{s,x}(\tau)) + \int\limits_t^{s+\alpha} I_{[s,\tau]}(\theta)S^*(s,\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + [\mathcal{A}\phi]\right)(\theta,\xi_{s,x}(\theta))d\theta + \int\limits_t^{s+\alpha} \tilde{z}(\theta)\,dw(\theta).$$

Заметим, что $\hat{y}_m(s) = \tilde{y}_m(s) = u_m(s,x)$.

Тогда в силу (2.16) и (2.17) для любого момента остановки $\tau \in [s, s+\alpha]$ получим оценку

$$\begin{aligned} 0 \geqslant [\Phi(\tau,\kappa(\tau)) - \Psi(\tau,\kappa(\tau))] &= \langle h, u(s,x) - \phi(s,x)\rangle \\ &- \int\limits_s^\tau \langle h, S^*(s,\theta)[\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{A}\phi](\theta,\xi_{s,x}(\theta))\rangle d\theta \\ &- \int\limits_s^\tau \langle h, g(\xi_{s,x}(\theta),\hat{y}(\theta),\hat{z}(\theta))\rangle d\theta \\ &+ \langle h, \int\limits_s^\tau [\hat{z}(\theta) - K(u,\nabla\phi)(\theta,\xi_{s,x}(\theta))]\,dw(\theta)\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку, по предположению, для каждого $m = 1,\ldots,d_1$ в точке (s,x) справедливо равенство $u_m(s,x) - \phi_m(s,x) = 0$, то, вычисляя математическое ожидание обеих частей последнего неравенства, получим

$$\mathbf{E}\Big(\int\limits_s^\tau \langle h, S^*(s,\theta)[\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{A}\phi](\theta,\xi(\theta))\rangle d\theta + \int\limits_s^\tau \langle h, g(\xi(\theta),\hat{y}(\theta),\hat{z}(\theta))\rangle d\theta\Big) \geqslant 0. \quad (2.19)$$

Обозначим

$$\gamma_1(s,\tau)=\langle h,\int\limits_s^\tau S^*(s,\theta)\{[\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\mathcal{A}\phi](\theta,\xi(\theta))+g(\xi(\theta),u(\theta,\xi(\theta)),$$
$$\nabla\phi(\theta,\xi(\theta))\}d\theta\rangle,$$
$$\gamma_2(s,\tau)=\langle h,\int\limits_s^\tau[g(\xi(\theta),\tilde{y}(\theta),\tilde{z}(\theta))-g(\xi(\theta),[S^*(s,\theta)]^{-1}u(\theta,\xi(\theta)),$$
$$K(u,\nabla\phi)(\theta,\xi(\theta)))d\theta\rangle$$

и

$$\gamma_3(s,\tau)=\langle h,\int\limits_s^\tau\{g(\xi(\theta),\hat{y}(\theta),\hat{z}(\theta))-g(\xi(\theta),\tilde{y}(\theta),\tilde{z}(\theta))\}d\theta\rangle$$

и перепишем (2.19) в виде

$$\mathbf{E}[\gamma_1(s,\tau)+\gamma_2(s,\tau)+\gamma_3(s,\tau)]\geqslant 0.$$

Предположим, что существует число $\delta_0<0$, для которого справедлива оценка $\mathcal{K}^{u,\phi}(s,x)<\delta_0$ и пусть

$$\tau_1=\inf\{\theta\in[s,s+\alpha]:\mathcal{K}^{y(\theta),z(\theta)}(\theta,\xi(\theta))\leqslant\delta_0\}\wedge\tau.$$

По предположению неравенство (2.19) выполняется для τ и, следовательно, для τ_1, что приводит к противоречию, поскольку

$$0>\delta_0\mathbf{E}(\tau_1-s)\geqslant\mathbf{E}\left[\int\limits_s^{\tau_1}\mathcal{K}^{y(\theta),z(\theta)}(\theta,\xi(\theta))d\theta\right]\geqslant 0.$$

Остается лишь проверить, что $\gamma_2(s,s+\Delta s)\to 0$ и $\gamma_3(s,s+\Delta s)\to 0$ при $\Delta s\to 0$ п.н.

При этом $\gamma_2(s,s+\Delta s)\to 0$ при $\Delta s\to 0$ п.н. вследствие определения функции f, свойств $S(s,t)$ и единственности решения ОСДУ.

Наконец, покажем, что $\gamma_3(s,s+\Delta s)\to 0$ при $\Delta s\to 0$ п.н. Заметим, что пара процессов $(\tilde{y}(t),\tilde{z}(t)),\ s\leqslant t\leqslant s+\Delta s$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{y}(t)=S^*(s+\Delta s)\phi(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))$$
$$+\int\limits_t^{s+\Delta s}f(\theta,\xi_{s,x}(\theta),\tilde{y}(\theta),\tilde{z}(\theta))d\theta-\int\limits_t^{s+\Delta s}\tilde{z}(\theta)dw(\theta).\quad(2.20)$$

Для заданного $\theta \in [s, s+\Delta s]$ и

$$\mathcal{K}^{u,\phi}(\theta, x) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mathcal{A}\phi\right)(\theta, x) + g(x, \phi(\theta, x), K(u, \nabla\phi)(\theta, x)),$$

положим

$$\upsilon(\theta) = \tilde{y}(s+\Delta s) - S^*(s,\theta)\phi(\theta, \xi_{s,x}(\theta)) - \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \mathcal{K}^{u,\phi}(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))d\vartheta$$

и

$$\varpi(\theta) = \tilde{z}(\theta) - K(u, \nabla\phi)(\theta, \xi_{s,x}(\theta))).$$

Применяя формулу Ито, выведем ОСДУ, которому удовлетворяют процессы $(\upsilon(\theta), \varpi(\theta))$

$$\begin{aligned}
\upsilon(\theta) &= S^*(s, s+\Delta s)\phi(s+\Delta s, \xi_{s,x}(s+\Delta s)) - \phi(s,x) \qquad (2.21)\\
&+ \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} g(\xi_{s,x}(\vartheta), \tilde{y}(\vartheta), \tilde{z}(\vartheta))d\vartheta - \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} S^*(s,\theta)\mathcal{K}^{u,\phi}(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))d\vartheta\\
&- \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \tilde{z}(\vartheta)\, dw(\vartheta) + \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} K(u, \nabla\phi)(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta)))\, dw(\vartheta)\\
&= \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} g(\xi_{s,x}(\vartheta), \upsilon(\vartheta) + S^*(s,\vartheta)\phi(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))\\
&+ \int\limits_{\vartheta}^{s+\Delta s} S^*(s,\theta)\mathcal{K}^{u,\phi}(r, \xi_{s,x}(r))dr,\ \varpi(\vartheta) + K(u, \nabla\phi)(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta)))d\vartheta\\
&+ \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \Big[S^*(s,\vartheta)\Big(\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \mathcal{A}\phi\Big)(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))\\
&- S^*(s,\vartheta)\mathcal{K}^{u,\phi}(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))\Big]d\vartheta - \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \varpi(\vartheta)\, dw(\vartheta).
\end{aligned}$$

Покажем, что процессы (υ, ϖ) сходятся к $(0,0)$ при $\Delta s \to 0$. С учетом оценок, которым удовлетворяет функция g, стандартные рассуждения, основанные на формуле Ито и неравенстве Буркхольдера, позволяют проверить справедливость оценки

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[s,s+\Delta s]}|\upsilon(t)|^2\right] + \mathbf{E}\left[\int\limits_s^{s+\Delta s}\|\varpi(\theta)\|^2 d\theta\right] \leqslant L\mathbf{E}\left[\int\limits_s^{s+\Delta s}\|m(\theta,\Delta s)\|^2 d\theta\right],$$

где

$$\begin{aligned} m(\theta,\Delta s) = {} & -S^*(s,\theta)\mathcal{K}^{u,\phi}(\theta,\xi_{s,x}(\theta)) + S^*(s,\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{A}\phi\right) \\ & (\theta,\xi_{s,x}(\theta)) + g(\xi_{s,x}(\theta),\upsilon(\theta) + S^*(s,\theta)\phi(\theta,\xi_{s,x}(\theta)) \\ & + \int\limits_\theta^{s+\Delta s} S^*(s,r)\mathcal{K}^{u,\phi}(r,\xi_{s,x}(r))dr,\ \varpi(\theta) + K(u,\nabla\phi)(\theta,\xi_{s,x}(\vartheta)). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $\sup_{\theta\in[s,s+\Delta s]}\mathbf{E}[\|\xi_{s,x}(\theta)-x\|^2] \to 0$ при $\Delta s \to 0$, а коэффициенты стохастических уравнений и функция ϕ равномерно непрерывны по x, вместе с производными, то

$$\lim_{\Delta s\to 0}\sup_{s\leqslant\theta\leqslant s+\Delta s}\mathbf{E}[\|m(\theta,\Delta s)\|^2] = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\leqslant\theta\leqslant s+\Delta s}|\upsilon(\theta)|^2\right] + \mathbf{E}\left[\int\limits_s^{s+\Delta s}\|\varpi(\theta)\|^2 d\theta\right] \leqslant L\mathbf{E}\left[\int\limits_s^{s+\Delta s}\|m(\theta,\Delta t)\|^2 d\theta\right] \leqslant \varepsilon(\Delta s)\Delta s, \tag{2.22}$$

где $\varepsilon(\Delta s) \to 0$ при $\Delta s \to 0$. В результате мы показали, что $\tilde{y}(\theta)$ сходится к $\phi(s,x)$ и $\tilde{z}(\theta)$ сходится к $[Cu](s,x) + [\nabla\phi A](s,x)$ п.н. при $\Delta s \to 0$.

Полученные оценки еще недостаточны для наших целей. Вычисляя условное математическое ожидание от обеих частей равенства (2.21),

получим равенство

$$\upsilon(\theta) = \mathbf{E}\left[\int_{\theta}^{s+\Delta s} n(\vartheta, \Delta s)d\vartheta|\mathcal{F}_{\theta}\right],$$

где

$$n(\theta, \Delta s) = -S^*(s,\theta)\mathcal{K}^{u,\phi}(\theta, \xi_{s,x}(\theta)) + S^*(s,\theta)\left[\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{A}\phi\right]$$
$$\theta, \xi_{s,x}(\theta)) + g(\xi_{s,x}(\theta), \tilde{y}(\theta), \tilde{z}(\theta)) = f(\xi_{s,x}(\theta), \tilde{y}(\theta), \tilde{z}(\theta))$$
$$- g\Big(\xi_{s,x}(\theta), S^*(s,\theta)\phi(\theta, \xi_{s,x}(\theta))$$
$$+ \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} S^*(s,\theta)\mathcal{K}^{u,\phi}(\theta, \xi_{s,x}(\theta))d\theta,\ K(u, \nabla\phi)(\theta, \xi_{s,x}(\theta))\Big).$$

Из липшицевости функции f вытекает оценка $\|n(\theta, \Delta s)\| \leqslant L[\|\upsilon(\theta)\| + \|\varpi(\theta)\|]\Delta s$, для $s \leqslant \theta \leqslant s + \Delta s$, из которой следует, что $\|n(\theta, \Delta s)\| \to 0$ п.н. при $\Delta s \to 0$.

Таким образом, мы показали, что функция $u(s,x)$ является вязкостным субрешением задачи Коши (2.1), (2.2). Аналогично можно проверить, что $u(s,x)$ является суперрешением (2.1), (2.2) и, следовательно вязкостным решением этой задачи. □

В заключение этого параграфа, приведем алгоритм численного построения вязкостного решения задачи (2.1), (2.2), основанный на построении численного решения ПОСДУ (2.6), (2.9).

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ и $\Delta = \frac{T}{n}$ задает равномерное разбиение отрезка $[0,T]$. Построим дискретизацию ПОСДУ (2.6), (2.9), воспользовавшись схемой Эйлера как для прямого СДУ

$$\kappa^n(t_{k+1}) = \kappa + q(\kappa^n(t_k))\Delta + Q(\kappa^n(t_k))\sqrt{\Delta}\epsilon_k^n, \tag{2.23}$$
$$\kappa = (x,h) \in R^d \times R^{d_1}.$$

так и для ОСДУ

$$y^n(t_k) = y^n(t_{k+1}) + f(\kappa^n(t_k), y^n(t_k), z^n(t_k))\Delta - z(t_k)\epsilon_{k+1}^n\sqrt{\Delta}, \tag{2.24}$$

$y^n(t_n) = S^*(0,t_n)u_0(\xi_{0,x}^n(t_n)) = \zeta$. Вычисляя условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_{t_k}$ от обеих частей последнего равенства,

получим

$$y^n(t_k) = \mathbf{E}[y^n(t_{k+1})|\mathcal{F}_{t_k}] + f(\kappa^n(t_k), y^n(t_k), z^n(t_k))\Delta.$$

С другой стороны, умножая (2.24) на ϵ_k^n и вычисляя условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_{t_k}^n$, получим

$$0 = \mathbf{E}[y^n(t_{k+1}\epsilon_k^n|\mathcal{F}_{t_k}^n] - z^n(t_k)\Delta.$$

При этом уравнение (2.24) эквивалентно следующей системе

$$y^n(t_k) = y_+ + f(\kappa^n(t_k), y^n(t_k), z^n(t_k))\Delta - z^n(t_k)\sqrt{\Delta},$$

$$y^n(t_k) = y_- + f(\kappa^n(t_k), y^n(t_k), z^n(t_k))\Delta + z^n(t_k)\sqrt{\Delta},$$

где $y_+ = y^n(t_{k+1})|_{\epsilon_k=1}$, $y_- = y^n(t_{k+1})|_{\epsilon_k=-1}$. Зададим дискретную апроксимацию решения ОСДУ с помощью соотношений

$$\begin{cases} z^n(t_k) = \frac{1}{2\Delta}[y_+ - y_-] = \frac{1}{\Delta}\mathbf{E}[y^n(t_{k+1})\epsilon_k^n|\mathcal{F}_{t_k}^n]; \\ y^n(t_k) - f(\kappa^n(t_k), y^n(t_k), z^n(t_k))\Delta = \frac{1}{2}[y_+ + y_-] = \mathbf{E}[y(t_{k+1})|\mathcal{F}_k^n]. \end{cases} \tag{2.25}$$

Система (2.25) задает неявную вычислительную схему. Для того, чтобы перейти к явной вычислительной схеме аппроксимируем случайную величину $y^n(t_k)$ в f с помощью случайной величины $\mathbf{E}[y^n(t_{k+1}|\mathcal{F}_k^n]$. Положив $\bar{y}^n(T) = \bar{y}^n(t_n)$ и

$$\bar{y}^n(t_k) = \bar{y}^n(t_{k+1}) + f(\kappa^n(t_k), \mathbf{E}[y(t_{k+1})|\mathcal{F}_k^n],$$
$$\bar{z}^n(t_k))\Delta - \bar{z}^n(t_k)\epsilon_{k+1}\sqrt{\Delta}, \tag{2.26}$$

придем к следующей явной схеме

$$\bar{y}^n(t_k) = \mathbf{E}[y(t_{k+1})|\mathcal{F}_k^n] + f(\kappa^n(t_k), \mathbf{E}[y(t_{k+1})|\mathcal{F}_k^n], \bar{z}^n(t_k))\Delta,$$

$$\bar{z}^n(t_k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\mathbf{E}[y(t_{k+1})\epsilon_{k+1}^n|\mathcal{F}_k^n] = \frac{\bar{y}^n(t_{k+1})_{\epsilon_{k+1}^n=1} - \bar{y}^n(t_{k+1})_{\epsilon_{k+1}^n=-1}}{2\sqrt{\Delta}}.$$

§3. Примеры

В качестве примера рассмотрим численный алгоритм построения классического решения задачи Коши для системы параболических уравнений, описывающей процессы, протекающие в сложных биологических и химико-биологических системах. Рассматриваемая модель обобщает модель брюсселятора [15,16]. Рассмотрим задачу Коши для системы двух нелинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B^u(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c^u(x)u + f = 0, u(T,x) = u_0(x), \tag{3.1}$$

где $u \in R^2, \sigma \in R^1, f \in R^2, x \in R^1, t \in [t_0, T]$. Матрицы B и $c^u(x)$ имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} -a_{11}u_1 & a_{12}u_2 \\ -a_{21}u_1 & a_{22}u_2 \end{pmatrix}, c^u(x) = \begin{pmatrix} 1 & [u_1]^2 \\ 0 & -[u_1]^2 \end{pmatrix}.$$

Наряду с (3.1) рассмотрим связанную с ней стохастическую систему

$$d\xi(\theta) = \sigma\, dw(\theta), \xi(t) = x, \tag{3.2}$$

$$d\eta(\theta) = [c^u]^*(\xi(\theta))\eta(\theta)d\theta + [C^u]^*(\xi(\theta))\eta(\theta)dw(\theta), \eta(t) = h, \tag{3.3}$$

$$\langle h, u(t,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta_{t,h}(T), u_0(\xi_{t,x}(T))\rangle + \int\limits_t^T \langle \eta_{t,h}(\theta), f\rangle d\theta], \tag{3.4}$$

где $C = \frac{1}{\sigma}B$. Чтобы построить численный алгоритм решения задачи (3.1), на основе вероятностного представления (3.4) , рассмотрим разбиение $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = T$ интервала $[0, T]$, где n – это фиксированное целое число.

Используя метод Эйлера, приближенное значение процесса ξ, удовлетворяющего уравнению (3.2) на интервале $[t_k, t_{k+1}$ при условии $\xi(t_k) = x$, $k = 0, ..., n-1$ вычислим, используя соотношение

$$\xi_{t_k,x}(t_{k+1}) = x + \sigma\varepsilon_{k+1}\sqrt{\Delta}. \tag{3.5}$$

где ϵ_k^i – бернуллиевские случайные величины, описанные в п.2. Аналогично вычислим

$$\eta_{t_k,I}(t_{k+1}) = I + [c^u(x)]^*\Delta + [C^u(x)]^*\varepsilon_{k+1}\sqrt{\Delta}. \tag{3.6}$$

Используя соотношения (3.5), (3.6) и (3.4) зададим приближенное значение u в точке (t_k, x) в виде

$$\begin{aligned} &u(t_k, x) \cong \bar{u}(t_k, x) \\ &= \mathbf{E}[(I + c^u(x)\Delta + C^u(x)\varepsilon_{k+1}\sqrt{\Delta})\bar{u}(t_{k+1}, x + \sigma\varepsilon_{k+1}\sqrt{\Delta}) + f\Delta]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для того, чтобы перейти к явной численной схеме, воспользуемся методом простой итерации, где в качестве нулевой итерации возьмем $u(t_{k+1}, x)$.Таким образом мы получим следующую схему численного решения задачи (3.1)

$$\begin{aligned} u(t_k, x) \cong \bar{u}(t_k, x) = \frac{1}{2}\Big[&(I + c^{\bar{u}}(x)\Delta + C^{\bar{u}}(x)\sqrt{\Delta})\bar{u}(t_{k+1}, x + \sigma\sqrt{\Delta}) \\ &+ (I + c^{\bar{u}}(x)\Delta - C^{\bar{u}}(x)\sqrt{\Delta})\bar{u}(t_{k+1}, x - \sigma\sqrt{\Delta})\Big] + f\Delta, \end{aligned}$$

$$u_1(T,x) = u_{10}(x), u_2(T,x) = u_{20}(x). \tag{3.8}$$

При этом для каждого $t_k, k = n, \dots, 1$ справедливы равенства

$$u_1(t_k,x) \cong \bar{u}_1(t_k,x) = \frac{1}{2}\Big[(1+\Delta - \frac{a_{11}}{\sigma}\bar{u}_1(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta}) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
&\times \bar{u}_1(t_{k+1}, x+\sigma\sqrt{\Delta}) + ([\bar{u}_1(t_{k+1},x)]^2\Delta + \frac{a_{12}}{\sigma}\bar{u}_2(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\\
&\bar{u}_2(t_{k+1}, x+\sigma\sqrt{\Delta}) + (1+\Delta + \frac{a_{11}}{\sigma}\sqrt{\Delta})\bar{u}_1(t_{k+1}, x-\sigma\sqrt{\Delta})\\
&+([\bar{u}_1(t_{k+1},x)]^2\Delta - \frac{a_{12}}{\sigma}\bar{u}_2(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\bar{u}_2(t_{k+1}, x-\sigma\sqrt{\Delta})\Big] + f_1\Delta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t_k,x) \cong \bar{u}_2(t_k,x) = \frac{1}{2}\Big[&-\frac{a_{21}}{\sigma}\bar{u}_1(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta}\bar{u}_1(t_{k+1}, x+\sigma\sqrt{\Delta})\\
&+ (1-[\bar{u}_1(t_{k+1},x)]^2\Delta + \frac{a_{22}}{\sigma}\bar{u}_2(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\bar{u}_2(t_{k+1}, x+\sigma\sqrt{\Delta})\\
&+ \frac{a_{21}}{\sigma}\bar{u}_1(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta}\bar{u}_1(t_{k+1}, x-\sigma\sqrt{\Delta}) + (1-[\bar{u}_1(t_{k+1},x)]^2\Delta\\
&- \frac{a_{22}}{\sigma}\bar{u}_2(t_{k+1},x)\sqrt{\Delta})\bar{u}_2(t_{k+1}, x-\sigma\sqrt{\Delta})\Big] + f_2\Delta.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Используя линейную интерполяцию, получим значение функции $u_l(t_k,x)$ вне узловых точек по пространственной переменной по формулам

$$u_l(t_k,x) = \frac{x_{j+1}-x}{\sqrt{\Delta}}u_l(t_k,x_j) + \frac{x-x_j}{\sqrt{\Delta}}u_l(t_k,x_{j+1}),$$

где $x_j < x < x_{j+1}, k = n, \dots, 1, l = 1, 2.$

Ниже приведены графики численного решения задачи (3.1) при следующих значениях параметров:

$$\begin{gathered}
a_{11} = 0.1, \quad a_{12} = 0.4, \quad a_{21} = 0.2, \quad a_{22} = 0.5,\\
\sigma = \sqrt{0.08}, \quad f_1 = \alpha, \quad f_2 = \beta,\\
u_{10}(x) = \sin^2 x, \quad u_{20}(x) = \cos^2 x.
\end{gathered}$$

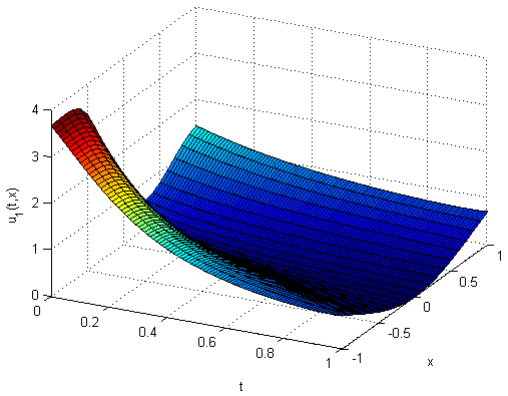

Рис. 3.1. Первая компонента решения задачи (3.1), где $a_{11} = 0.1u_1, a_{12} = 0.4u_2, a_{21} = 0.2u_1, a_{22} = 0.5u_2, \sigma = \sqrt{0.08}, f_1 = \alpha, f_2 = \beta, u_{10}(x) = sin^2(x), u_{20}(x) = cos^2(x), \alpha = 0.01, \beta = 0.9, t \in [0,1], x \in [-1,1]$.

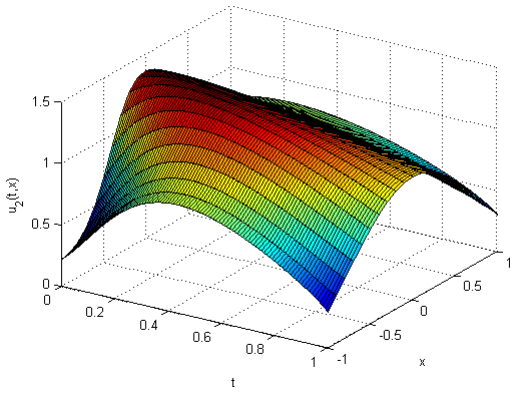

Рис. 3.2. Вторая компонента решения задачи (3.1), где $a_{11} = 0.1u_1, a_{12} = 0.4u_2, a_{21} = 0.2u_1, a_{22} = 0.5u_2, \sigma = \sqrt{0.08}, f_1 = \alpha, f_2 = \beta, u_{10}(x) = sin^2(x), u_{20}(x) = cos^2(x), \alpha = 0.01, \beta = 0.9, t \in [0,1], x \in [-1,1]$.

Литература

1. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем при помощи марковских случайных процессов.* — Изв. вузов. Матем. No. 2 (1978), 6–17.
2. Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Stochastic equations and differential geometry.* Kluwer Academic Publishers, 1990.
3. Я. И. Белопольская, З. И. Наголкина, *Об одном классе стохастических уравнений с частными производными.* — ТВиП **27** (1982), 551–559.
4. G. N. Milstein, *The Probability Approach to Numerical Solution of Nonlinear Parabolic Equations.* — Numerical Methods for Partial Differential Equations **18**, 4 (2002) 490–522.
5. G. N. Milstein, M. V. Tretyakov, *Numerical algorithms for semilinear parabolic equations with small parameter base on approximation of stochastic equations.* — Mathematics of Computation **69**, 229 (1999), 237–267.
6. J. Marsden, *On Product Formulas for Nonlinear Semigroups.* — J. Funct. Anal. **13** (1973), 51–72.
7. Ю. Л. Далецкий, *О представимости решений операторных уравнений в виде континуальных интегралов.* — ДАН СССР **134**, 5 (1960), 1013-«1016.
8. H. Trotter, *On the Product of Semigroups of Operators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 545–551.
9. E. Pardoux, S. Peng, *Backward Stochastic Differential Equations and Quasilinear Parabolic Partial Differential Equations.* Lecture Notes in CIS, **176**. Springer-Verlag (1992), 200–217.
10. Я. И. Белопольская, *Прямые-обратные стохастические уравнения, связанные с системами квазилинейных параболических уравнений и теоремы сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412**, Вероятность и статистика **19** (2013), 15–46.
11. M. Crandall, H. Ishii, P. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* — Bull. AMS **27**, No. 1 (1992), 1–67.
12. E. Pardoux, *Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order.* — Stochastic Analysis and Relates Topics: The Geilo Workshop, Birkhäuser (1996), 79–127.
13. E. Pardoux, S. Tang, *Forward – backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs.* — Probab. Theory Related Fields **114**, No. 2 (1999), 123–150.
14. S. Peng, M. Xu, *Numerical algorithms for backward stochastic differential equations with 1-d brownian motion: Convergence and simulations.* — ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis **45**, No. 2 (2011), 335–360.
15. I. Prigogine, R. Lefever, *Symmetry-breaking instabilities in dissipative systems.* — J. Chem. Phys. **48** (1968), 1695–1700.
16. A. Madzvamuse, R. Barreira, *Exhibiting cross-diffusion-induced patterns for reaction-diffusion systems on evolving domains and surfaces.* — Phys. Rev. E **90** (2014), 043307-1 – 043307-14.

Belopolskaya Ya. I., Nemchenko E.I. Probabilistic representations and numerical algorithms to construct classical and viscosity solutions of the Cauchy problem for systems of quasilinear parabolic equations.

We propose two approaches that allow to construct probabilistic representationы of classical and viscosity solutions of the Cauchy problem for systemы of quasilinear parabolic equations. Based on this representations we develop two numerical algorithms to construct the required solutions.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4, 190005 Санкт-Петербург,
Россия

E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 12 ноября 2015 г.