Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2015 г.

В. Н. Солев

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ НА ФОНЕ СТАЦИОНАРНОГО ШУМА: ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

§1. Введение

Пусть $x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, с нулевым средним, $\mathbf{E}\,x(t)=0$, и спектральной мерой μ (см. подробнее в $[1,2]$). Сказанное означает следующее. Определим линейный оператор $x\,[\varphi]$

$$x\,[\varphi]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi(t)}\,dx(t),$$

на индикаторных функциях соотношением

$$x\left[\mathbf{1}_{[a,b]}(\,\cdot\,)\right]=x(b)-x(a),$$

продолжив его (по линейности) на линейном подмножестве S, состоящем из линейных комбинаций конечного числа таких индикаторов. Так определенный процесс $\{x\,[\varphi]\,,\ \varphi\in S\}$ – гауссовский с нулевым средним и корреляционной функцией, инвариантной по отношению к оператору сдвига:

$$R(\psi(\,\cdot\,),\varphi(\,\cdot\,))\ :=\ \mathbf{E}\,x[\psi]\,\overline{x[\varphi]}=R(\psi(\,\cdot\,+s),\varphi(\,\cdot\,+s)),\tag{1}$$

и допускающей представление

$$R(\psi,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}(u)\,\overline{\widehat{\varphi}(u)}\,\mu(du),\tag{2}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00856, НШ-2504.2014.1. и программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

где $\widehat{\varphi}$ – преобразование Фурье функции φ, определяемое на протяжении всей работы следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt.$$

При этом мера μ, называемая спектральная мерой процесса x, удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(du)}{1+u^2} < \infty. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что спектральная мера μ имеет плотность f по отношению к мере Лебега. При этом, конечно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{4}$$

Обозначим

$$\mathscr{D}_f = \left\{\varphi :\ \widehat{\varphi} \in L_f^2\right\}. \tag{5}$$

Здесь и далее для неотрицательной функции f принято обозначение L_f^2 для L^2-пространства, построенного по мере с плотностью f. Пусть $\mathscr{X}$ – замыкание линейной оболочки случайных величин $\{x[\varphi],\ \varphi \in S\}$ в метрике пространствам $L^2(d\mathbf{P})$. Здесь $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, индуцированная процессом $\{x[\varphi],\ \varphi \in S\}$. Из (2) следует, что отображение $\pi :\ \pi\, x[\varphi] = \widehat{\varphi}$, является изометрией из $L^2(d\mathbf{P})$ в L_f^2, а потому процесс $\{x\left[\varphi\right],\ \varphi \in S\}$ может быть продолжен на множество $\mathscr{D}_f$.

Теперь перейдем к статистической задаче. Предположим, что на растущем отрезке $[-T,T]$ наблюдается гауссовский процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T,T]. \tag{6}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|_{\mathscr{L}}^2 = \sup_x \int\limits_x^{x+1} \left|s\left(t\right)\right|^2\,dt < \infty;$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, нулевым средним и спектральной плотностью f. Точнее, наблюдению доступны случайные величины

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in \mathscr{D}_f(T). \tag{7}$$

Здесь

$$s[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt, \ \mathscr{D}_f(T) = \left\{\varphi : \ \varphi \in \mathscr{D}_f \cap L^2, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]\right\}.$$

Обозначим $\widetilde{\mathscr{L}}$ – подпространство пространства $\mathscr{L}$, порожденное функциями из $\mathscr{L}_*$. Мы будем предполагать, что в $\widetilde{\mathscr{L}}$ существует такой базис $\{\varphi(u;t), \ u \in \Lambda\}$, что коэффициенты $a(u)$ в разложении функции $s \in \widetilde{\mathscr{L}}$

$$s(t) = \sum_{u \in \Lambda} a(u)\,\varphi(u;t) \quad (\text{здесь } \Lambda \text{ – счетное множество}),$$

удовлетворяют условию

$$c_* \,\|s\|^2_{\mathscr{L}} \leqslant \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 \leqslant C_* \,\|s\|^2_{\mathscr{L}}, \quad s \in \widetilde{\mathscr{L}}. \tag{8}$$

В техническом отношении банахова норма $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$ может быть неудобна. Мы заменим ее на гильбертову норму $\|\cdot\|_*$,

$$\|s\|^2_* := \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2,$$

топологически эквивалентную исходной.

Пусть $\widehat{s}_T$ – оценка неизвестной функции s, построенная по наблюдениям (7), $\widehat{s}_T \in \widetilde{\mathscr{L}}$. Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}\left(\widehat{s}_T\right) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_s \,\|\widehat{s}_T - s\|^2_*$$

Обозначим $\mathscr{R}_T$ – минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}\left(\widehat{s}_T\right).$$

Задача состоит в поиске простой оценки $\widehat{s}_T$, имеющей тот же порядок малости при $T \to \infty$, что и минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T \leqslant \mathscr{R}\left(\widehat{s}_T\right) \leqslant C\,\mathscr{R}_T. \tag{9}$$

Для гауссовского шума $x[\,\cdot\,]$ построение таких оценок обычно производится следующим образом (смотри, например, [4], [9]). Пусть L^2_T –

L^2 пространство на отрезке $[-T,T]$, построенное по нормированной мере Лебега. Предположим, что при больших T

$$c\,\|s\|_{T} \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C\,\|s\|_{T}\,, \quad s \in \widetilde{\mathscr{L}}. \tag{10}$$

Здесь $\|\cdot\|_T$ – норма в L^2_T; c, C – неотрицательные константы, зависящие только от $\widetilde{\mathscr{L}}$, а для функций $s \in \widetilde{\mathscr{L}}$

$$\|s\|_{T} := \left\|s\,\mathbf{1}_{[-T,T]}\right\|_{T}. \tag{11}$$

Скалярное произведение в пространстве L^2_T будем обозначать

$$(\varphi,\psi)_T := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \varphi(t)\,\overline{\psi(t)}\,dt.$$

Построение конкретных пространств $\widetilde{\mathscr{L}}$, для которых выполнено неравенство (10), будет описано в §3. В этом же параграфе будет указан такой базис $\{\varphi(u;t),\ u\in\Lambda\}$ пространства $\widetilde{\mathscr{L}}$, для которого выполнено условие (8).

Сужением $\widetilde{\mathscr{L}}$ на L^2_T будем называть подпространство

$$\Big\{h:\ h = \mathbf{1}_{[-T,T]}\,\varphi, \quad \varphi \in \widetilde{\mathscr{L}}\Big\}.$$

Из (8) и (10) следует, что система

$$\big\{\varphi_T(u;t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\,\varphi(u;t), \quad u\in\Lambda\big\}$$

является базисом Рисса в сужении $\widetilde{\mathscr{L}}$ на L^2_T, причем риссовским равномерно по T. Выберем в L^2_T (точнее в сужении $\widetilde{\mathscr{L}}$ на L^2_T) такую систему $\{\psi_T(u;t),\, u\in\Lambda\}$, что

$$(\varphi_T(u;\,\cdot\,),\ \psi_T(v;\,\cdot\,),)_T = \delta_{u,v}. \tag{12}$$

здесь $(\,\cdot,\cdot\,)_T$ – скалярное произведение в L_T, Λ – счетное множество, индексирующее элементы базиса. Дополнительно будем предполагать, что

$$\widehat{\psi}_T(u,\,\cdot\,) \in L^2_f, \quad u\in\Lambda. \tag{13}$$

Здесь и далее $\widehat{\psi}_T(u;\,\cdot\,)$ – преобразование Фурье функции $\psi_T(u;\,\cdot\,)$. В качестве оценки $\widehat{s}_T$ возьмем проекционную оценку вида

$$\widehat{s}_T = \sum_{u\in\Lambda_N} y\,\langle\psi_T(u;\,\cdot\,)\rangle\,\varphi(u;\,\cdot\,), \tag{14}$$

выбирая конечные подмножества $\Lambda_N \subset \Lambda$ и целое $N = N(T)$ подходящим образом. Здесь и далее

$$y\left<\psi\right> = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\psi(t)}\,dy(t) = (s,\psi)_T + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\psi(t)}\,dx(t) = s\left<\psi\right> + x\left<\psi\right>.$$

§2. Дискретная задача

Фактически при построении оценки $\widehat{s}_T$ в (10) мы (так же, как это сделано в [9]) заменили наблюдения над процессом

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T,T],$$

статистикой $(y_T(u),\ u \in \Lambda)$, где

$$y_T(u) = y\left<\psi_T(u;\,\cdot\,)\right>, \quad u \in \Lambda.$$

Обозначим $x_T(u) = x\left<\psi_T(u;\,\cdot\,)\right>$. Тогда

$$\widehat{a}_T(u) := y_T(u) = a(u) + x_T(u), \quad u \in \Lambda.$$

Очевидно, что $\widehat{s}_T(u)$ – несмещенная оценка коэффициента $a(u)$ с дисперсией $\sigma^2(T;u)$,

$$\sigma^2(T;u) = \frac{1}{4T^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_T(u;y)\right|^2 f(y)\,dy.$$

Обозначим через $\widetilde{\mathscr{L}}^T$ – ортогональное дополнение в L_T к подпространству, порожденному функциями $\psi_T(u;\,\cdot\,)$, $u \in \Lambda$.

Лемма 2.1. *Предположим, что система $\{\psi_T(u;t),\ u \in \Lambda\}$ выбрана так, что*

$$\mathbf{E}\,x\left[\psi_T(u;\,\cdot\,)\right]\overline{x[h]} = 0, \quad \text{если } u \in \Lambda, \quad h \in \widetilde{\mathscr{L}}^T \cap \mathscr{D}_f(T). \tag{15}$$

Тогда статистика $(y_T(u),\ u \in \Lambda)$ является достаточной в задаче оценивания (7).

Доказательство. Очевидно, что задача оценивания (7) и задача оценивания $s \in \mathscr{L}_*$ по наблюдениям

$$\bigl\{y_T(u) = s(u) + x_T(u),\ u \in \Lambda\bigr\} \ \text{ и } \ \bigl\{y[h],\ h \in \widetilde{\mathscr{L}}^T \cap \mathscr{D}_f(T)\bigr\}$$

эквивалентны. При этом в силу условия (15) гауссовские процессы $\{y_T(u),\ u \in \Lambda\}$ и $\{y[h],\ h \in \widetilde{\mathscr{L}^T} \cap \mathscr{D}_f(T)\}$ независимы, причем распределение процесса $\{y[h],\ h \in \widetilde{\mathscr{L}^T} \cap \mathscr{D}_f(T)\}$ не зависит от неизвестного параметра s. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 2.1 сводит задачу оценивания неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$ по наблюдениям (6) к задаче оценивания вектора $\theta = (\theta_u,\ u \in \Lambda)$ по наблюдениям

$$y_u = \theta_u + x_u, \quad u \in \Lambda. \tag{16}$$

Здесь $(x_u,\ u \in \Lambda)$ – гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(u,v) := \mathbf{E}\, x_u\, \overline{x_v} = \Big(\widehat{\psi}_T(u;\,\cdot\,),\ \widehat{\psi}_T(v;\,\cdot\,)\Big)_f\,,$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_f$ – скалярное произведение в пространстве L^2_f.

Подлежащий оцениванию вектор θ лежит в центрально-симметричном подмножестве Θ пространства l^2,

$$\Theta = \Big\{\theta :\ \sum_{u\in\Lambda} \theta_v\, \varphi_u \in \mathscr{L}_*\Big\}.$$

§3. Класс Степанова псевдопериодических функций

Пусть $\mathcal{L}$ – банахово пространство локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int_x^{x+1} |s\,(t)|^2\; dt < \infty. \tag{17}$$

Рассмотрим введенный Степановым (см. [5]) класс $\mathscr{L}(\Lambda)$ псевдо–периодических функций s

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u) e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{18}$$

предполагая, что Λ – не более чем счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{\substack{u,v\in\Lambda,\\ u\neq v}} |u-v| > 0 \tag{19}$$

В [5] установлено, что при условии (19) ряд в (18) сходится в $\mathscr{L}$.

Множество Λ, удовлетворяющее (19), будем называть τ-отделимым. Наряду с банаховой нормой, определенной в (17), будем также рассматривать гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \Big\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \Big\}^{1/2} < \infty, \text{ и } \|s\|_{\scriptscriptstyle T} := \Big\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |s(t)|^2\, dt \Big\}^{1/2},$$

и использовать обозначение $L^2_{\scriptscriptstyle T}$ для L^2-пространство на отрезке $[-T,T]$, построенное по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_{\scriptscriptstyle T} := \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)}\, dt.$$

Н. Винер и Р. Пэли доказали в [6], что при условии (19) найдутся такие положительные константы $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $C_1 = C_1(\tau)$, $T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что

$$c_1\, \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1\, \|s\|_{\mathscr{L}}\,, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \tag{20}$$

и при $T \geqslant T_0$

$$c_2\, \|s\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2\, \|s\|_{\scriptscriptstyle T}\,, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda), \quad s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}. \tag{21}$$

В частности, найдутся такие положительные константы $c = c(\tau)$, $C = C(\tau)$, зависящие только от τ, что при $T \geqslant T_0$,

$$c\, \|s\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C\, \|s\|_{\scriptscriptstyle T}\,, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda). \tag{22}$$

Множество Λ будем называть спектральным множеством функций из класса $\mathscr{L}(\Lambda)$. Пусть

$$\varphi_u\,(\scriptstyle T; t) = \mathbf{1}_{[-T,\,T]}(t)\, e^{iut}.$$

Из сказанного выше следует (подробнее см. в [6]), что при названных условиях система $\{\varphi_u(\scriptstyle T; t),\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}(\Lambda)$ (точнее в сужении $\mathscr{L}(\Lambda)$ на $L^2_{\scriptscriptstyle T}$) в метрике гильбертова пространства $L^2_{\scriptscriptstyle T}$ с нормой $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T}$. Стало быть, в $\mathscr{L}(\Lambda)$ существует сопряженная (в метрике гильбертова пространств с нормой $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T}$) система $\{\varphi^*_u(\scriptstyle T; t),\ u \in \Lambda\}$,

$$\big(\varphi_u(\scriptstyle T;\,\cdot), \varphi^*_v(\scriptstyle T;\,\cdot)\big)_{\scriptscriptstyle T} = \delta_{u,\,v}, \quad \text{где } \delta_{u,\,v} \text{ – символ Кронекера}. \tag{23}$$

Заметим, что в разложении (18)

$$a(u) = (s(\,\cdot\,), \varphi_u^*(T;\,\cdot\,))_T. \tag{24}$$

§4. Асимптотически оптимальная оценка

В этом пункте мы построим простую асимптотически оптимальную оценку $\widehat{s}_T$ неизвестной функции $s \in \mathscr{L}_*$ по наблюдениям (6) при следующих предположениях относительно параметрического множества $\mathscr{L}_*$ и спектральной плотности f процесса x.

Пусть $\mathscr{L}(\Lambda)$ – класс Степанова псевдо-периодических функций (см. § 3) со спектральным множеством Λ, состоящий из функций, представимых в виде

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty.$$

Счетное множество Λ удовлетворяет условию отделимости

$$\tau = \inf_{\substack{u\neq v;\\ u,v\in\Lambda}} |u-v| > 0. \tag{25}$$

Параметрическое множество $\mathscr{L}_*$ выделим из класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(|u|+1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{26}$$

Будем предполагать, что спектральная плотность f удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\,du < \infty, \tag{27}$$

и условию Маккенхаупта (см. [7])

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(t)\,dt\,\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{f(t)}\,dt \leqslant \lambda(f) < \infty. \tag{28}$$

Здесь супремум берется по интервалам I, $|I|$ – длина I.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-s)\,ds.$$

Введем в рассмотрение класс спектральных плотностей $A(\alpha,\beta;\, b,B)$, определив его для $\alpha > -1$ и неотрицательных $b \leqslant B$ условием: для достаточно больших положительных N

$$b\,\varepsilon^{\alpha} \leqslant \frac{1}{N} \sum_{\substack{u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant N}} f_{\varepsilon}(u) \leqslant B\,\varepsilon^{\alpha}, \quad \text{при} \;\; \varepsilon = N^{-\frac{1+2\beta}{1+\alpha}}. \tag{29}$$

Заметим, что похожий класс был рассмотрен С. В. Решетовым в [9]. Здесь и далее предполагается, что при некотором $d > \tau$ в любом отрезке длины d есть хотя бы одна точка из Λ.

Выберем $T_0 = T_0(\tau)$ так, чтобы были выполнены соотношения (20), (21) и (22). Пусть $r \geqslant T_0$. Положим при $T > 2r$

$$\psi_T(u,t) = \frac{T\pi}{r(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_r^{*}(u; t-s)\, \varphi_{T-r}(u; s)\, ds. \tag{30}$$

Объявленную выше оценку $\widehat{s}_T$ зададим соотношением

$$\widehat{s}_T(t) = \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant N} y\, \langle \psi_T(u;\,\cdot\,)\rangle\, \varphi(u;t) = \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant N} y\, \langle \psi_T(u;\,\cdot\,)\rangle\, e^{iut}, \tag{31}$$

выбирая $N = N(T)$ в зависимости от класса спектральных плотностей и величины β. Если $f \in A(\alpha,\beta;\, b,B)$, положим

$$N(T) = T^{\frac{1+\alpha}{1+2\beta}}. \tag{32}$$

Теорема 4.1. *Пусть оценка $\widehat{s}_T(t)$ неизвестной функции $s(t)$ из $\mathscr{L}_*$ по наблюдениям* (6) *определена равенством* (31), *параметрическое множество $\mathscr{L}_*$ выделено из классы Степанова $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием* (26), *спектральное множеством Λ, удовлетворяет условию отделимости* (25), *а спектральная плотность f процесса x лежит в классе $A(\alpha,\beta; b,B)$ и удовлетворяет условию Маккенхаупта. Тогда, если величина $N = N(T)$ в* (31) *выбрана согласно* (32), *то найдется такая положительная константа $C < \infty$, что при достаточно больших T*

$$\mathscr{R}_T \leqslant \mathscr{R}\,(\widehat{s}_T) \leqslant C\,\mathscr{R}_T, \tag{33}$$

где $\mathscr{R}_T$ – минимаксный риск в задаче (6).

Доказательство. В работе [9] по существу установлено, что в условиях теоремы
$$\mathscr{R}_T \geqslant KT^{-\frac{(1+\alpha)\,2\beta}{1+2\beta}},$$
где константа K зависит только от τ, β, класса $A(\alpha, \beta; b, B)$ и величин $\lambda(f), L$, Поэтому достаточно установить оценку сверху для величины риска $\mathscr{R}\,(\widehat{s}_T)$ вида
$$\mathscr{R}\,(\widehat{s}_T) \leqslant C_* T^{-\frac{(1+\alpha)\,2\beta}{1+2\beta}} \tag{34}$$
с константой C_*, зависящей только от перечисленных выше параметров.

Далее, заметим, что в силу (20)
$$\mathbf{E}\big\|s - \widehat{s}_T\big\|^2_{\mathscr{L}} \leqslant C_2^2 \sum_{\substack{u\in\Lambda,\\ |u|\leqslant N}} \mathbf{E}\,\big|a(u) - \widehat{a}_T(u)\big|^2 + C_2^2 \sum_{\substack{u\in\Lambda,\\ |u|>N}} |a(u)|^2. \tag{35}$$
В силу (25), (26) и (32),
$$\sum_{\substack{u\in\Lambda,\\ |u|>N}} |a(u)|^2 \leqslant LN^{-2\beta} = LT^{-\frac{(1+\alpha)\,2\beta}{1+2\beta}}. \tag{36}$$
Остается оценить первое слагаемое в правой части (35). Прежде всего докажем, что
$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \psi_T(u,t)\,e^{-ivt}\,dt = \delta_{u,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{37}$$
Для этого заметим, что
$$\int_{-T}^{T} \psi_T(u,t)\,e^{-ivt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_T(u,z)\,\overline{\widehat{\varphi}_T(v,z)}\,dz$$
Так как
$$\frac{1}{2\pi}\,\widehat{\varphi}_T(v,z) = \frac{\sin T(z-v)}{\pi(z-v)},$$
а $\widehat{\psi}_T(u,\,\cdot\,)$ – целая функция степени не выше T, то (см. [6])
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}_T(u,z)\,\overline{\widehat{\varphi}_T(v,z)}\,dz = \widehat{\psi}_T(u,v).$$

Далее, в силу (30)

$$\widehat{\psi}_{T}(u,z)=\frac{T\pi}{r(T-r)}\,\widehat{\varphi}^{*}_{r}(u,z)\,\frac{\sin(T-r)(z-u)}{\pi(z-u)}.$$

Так как в силу (23) при $u,v\in\Lambda$

$$\widehat{\varphi}^{*}_{r}(u,v)=2r\,\delta_{u,v},\quad u,v\in\Lambda,\ \text{ то }\ \widehat{\psi}_{T}(u,v)=2\,T\delta_{u,v},\quad u,v\in\Lambda.$$

Отсюда получаем (37). Из (37) следует, как уже отмечалось, что $\widehat{a}_T(u)$ – несмещенная оценка для $a(u)$ с дисперсией $\sigma^2(T;u)$,

$$\sigma^2(T;u)=\frac{1}{4\,T^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\psi}_{T}(u;y)\right|^2 f(y)\,dy.$$

Так как система $\{\varphi^{*}_{r}(u,\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\}$ – базис Рисса в L^2_r, то при некотором $c(r)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\varphi}^{*}_{r}(u,z)\right|^2\,dz\leqslant c(r).$$

Поскольку при этом $\widehat{\varphi}^{*}_{r}(u,\,\cdot\,)$ – целая функция степени не выше r, то (см. [6])

$$\left|\widehat{\varphi}^{*}_{r}(u,z)\right|^2\leqslant\frac{rc(r)}{\pi}.$$

Отсюда мы заключаем, что при некотором $C(r)$

$$\sigma^2(T;u)\leqslant\frac{C(r)}{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2T(u-z)}{T\pi(u-z)^2}\,f(z)\,dz.$$

В [8] установлено, что если спектральная плотность f удовлетворяет условию Маккенхаупта, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2T(u-z)}{T\pi(u-z)^2}\,f(z)\,dz\leqslant C\,f_{\varepsilon}(u)\quad\text{ при }\ \varepsilon=1/T.$$

Собирая найденные оценки, получаем, что, если T достаточно велико, то при некоторой константе $D=D(\tau,r,\lambda(f))$

$$\mathbf{E}\left|a(u)-\widehat{a}_T(u)\right|^2\leqslant D\,\frac{f_{\varepsilon}(u)}{T}\quad\text{ при }\ \varepsilon=1/T. \tag{38}$$

Теперь мы в состоянии с помощью (29) и (32) оценить первое слагаемое

$$\mathbf{E} \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant N} |a(u) - \widehat{a}_T(u)|^2 \leqslant DB\,\frac{N}{T}\,T^{-\alpha} = DB\,T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}}.$$

Неравенство (34) установлено. $\square$

Литература

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* Мир, М., 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* Мир, М., 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее применен. **29**, (1984), 19–32.
4. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax risk over hyperrectangles, and implications.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (?????), 1416–1437.
5. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
6. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* Наука, М., 1964.
7. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, NY, 1981.
8. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
9. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1 Матем., Механ., Астрон. **2** (2010), 106–115.

Solev V. N. Estimation of function observed in stationary noise: discretization.

In the article we propose a new estimation of the unknown pseudo periodic function which observed in stationary noise. We compare the accuracy of the proposed estimation with the minimax risk.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023; С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28,
Петродворец,
198504 С.-Петербург,
Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 13 ноября 2015 г.