Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2015 г.

В. А. Кайманович

ИНВАРИАНТНОСТЬ, КВАЗИИНВАРИАНТНОСТЬ И УНИМОДУЛЯРНОСТЬ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

Посвящается памяти Михаила Иосифовича Гордина

Введение

Работа со случайными бесконечными графами неизбежно приводит к необходимости рассматривать соответствующие вероятностные меры. Естественным пространством состояний для таких мер является пространство $\mathcal{G}_\bullet$ классов изоморфизма *корневых локально конечных связных графов*, снабженное проективной топологией (поскольку пространство графов без выделенной точки не обладает никакой разумной топологической или измеримой структурой). Хотя на $\mathcal{G}_\bullet$ нет никакого группового действия, это пространство снабжено естественным *корневым отношением эквивалентности* $\mathcal{R}$, так что можно говорить о мерах *инвариантных* относительно этого отношения эквивалентности. Это понятие инвариантности для мер на $\mathcal{G}_\bullet$ было введено автором [20].

Инвариантность по отношению к отношению эквивалентности также допускает интерпретацию в терминах *обратимых цепей Маркова* на пространстве состояний отношения эквивалентности. В случае *слоений* хорошо известно, что *голономно инвариантные меры* римановых слоений находятся во взаимно-однозначном соответствии с обратимыми стационарными ($\equiv$ *вполне инвариантными*, в терминологии Гарнетт) мерами броуновского движения вдоль листов слоения, см. [14, 18]. [Здесь и ниже мы говорим об "обратимых" мерах, что,

---

Ключевые слова: случайный граф, пространство корневых графов, отношение эквивалентности, унимодулярная мера, инвариантность, коцикл Радона–Никодима.

Работа над настоящей статье была частично поддержана программой Canada Research Chairs, а также финансированием от NSERC (Канада) и от European Research Council в рамках программы European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013), ERC grant agreement 257110-RAWG. Часть работы была выполнена в течение семестра "Random Walks and Asymptotic Geometry of Groups" в 2014 году в Institut Henri Poincaré, Париж.

строго говоря, не вполне корректно, поскольку обратимой относительно соответствующей стационарной меры является цепь Маркова; в такой ситуации иногда говорят, что цепь и ее стационарная мера находятся в *детальном балансе*, см. [28].] Отношения эквивалентности являются дискретными аналогами слоений, и для них установить это соответствие еще легче, поскольку оно непосредственно следует из сравнения *инволютивной инвариантности* соответствующей *считающей меры* (что является определением инвариантности меры относительно отношения эквивалентности) с инволютивной инвариантностью совместного распределения марковской цепи в два последовательных момента времени (что является определением обратимости), см. [20, 29]. Что касается унимодулярных мер, которые мы будем рассматривать ниже, см. также [1] или недавнюю статью [4].

Лайонс, Пемантл и Перес [27] показали, что *пополненные деревья Гальтона–Ватсона* порождают семейство вероятностных мер на пространстве $\mathcal{T}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet$ корневых деревьев, которые являются стационарными и обратимыми относительно простого случайного блуждания по классам корневого отношения эквивалентности. Как вслед за этим заметил автор [20], ввиду вышеупомянутого соответствия эта конструкция также порождает $\mathcal{R}$-*инвариантные меры* на $\mathcal{T}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet$ (заметим, что вопреки тому, что утверждается в [1, пример 1.1], статья [27] не содержит никаких указаний на то, что обратимость мер, связанных с пополненными деревьями Гальтона–Ватсона, может быть связана с какой бы то ни было инвариантностью этих мер). Используя определение инвариантности относительно разграфленного отношения эквивалентности, автор позднее ввел понятие *стохастической однородности* для случайных графов [21].

Поскольку представление об инвариантности относительно отношения эквивалентности, хотя и является достаточно распространенным в теории динамических систем и в геометрии, куда менее популярно в теории вероятностей, этот подход остался чуждым для вероятностников. С другой стороны, черпая вдохновение из техники *переноса масс*, введенной Хаггстремом [15] для изучения перколяции на деревьях, и позднее распространенной Бенжамини, Лайонсом, Пересом и Шраммом [6] (с использованием идей Вёсса [39]) на произвольные графы, Бенжамини и Шрамм [9] ввели *внутренний принцип переноса масс* для вероятностных мер на $\mathcal{G}_\bullet$. Возникающий класс мер ныне широко известен в вероятностном мире под именем *унимодулярных мер*, предложенным Олдосом и Лайонсом [1]. Эта популярность связана со следующим замечательным свойством: в предположении равномерной ограниченности валентностей вершин класс унимодулярных мер (в отличие от класса инвариантных мер) замкнут в $*$-слабой топологии, так что, в частности, любой $*$-слабый предел дискретных унимодулярных мер, отвечающих конечным графам, также является унимодулярной мерой.

В случае индивидуального графа принцип переноса масс по существу не что иное, как простая *унимодулярность группы автоморфизмов графа*, что было почти немедленно понято в [6]. Однако, что касается унимодулярных мер, это понятие до последнего времени не выходило за границы вероятностного мира. Хотя вероятностники, говоря об унимодулярности, обычно не думают в терминах теории измеримых отношений эквивалентности (и, более того, утверждают, что "вероятностные аспекты" лежат вне фокуса этой теории, см. [1, §9]), пространство состояний $\mathcal{G}_\bullet$ унимодулярной меры, *nolens volens*, снабжено отношением эквивалентности $\mathcal{R}$, так что естественно задать вопрос о свойствах унимодулярных мер относительно этой структуры (в частности, об $\mathcal{R}$-инвариантности и $\mathcal{R}$-квазиинвариантности).

Для мер, сосредоточенных на множестве *жестких графов* (т.е. графов с тривиальной группой автоморфизмов, в теории графов их также называют неподвижными или свободными от симметрии [17]) понятия инвариантности и унимодулярности очевидно совпадают; тем не менее, они различны в общей ситуации, в чем можно убедиться, глядя уже на конечные графы. [Заметим, что в соответствии с эмпирическим правилом, которое мы называем "принципом Татта", графы, порождаемые естественными вероятностными конструкциями, должны быть почти всегда жесткими, см. замечание 42.]

Целью настоящего сообщения является прояснение взаимоотношений между $\mathcal{R}$-инвариантностью (и $\mathcal{R}$-квазиинвариантностью), с одной стороны, и унимодулярностью, с другой, в полной общности. Мы решаем эту задачу, вкладывая понятие унимодулярности в общий контекст эргодической теории дискретных измеримых отношений эквивалентности, и заменяя "принцип переноса масс" на технику, основанную на явном рассмотрении σ-конечных считающих мер на отношении эквивалентности $\mathcal{R}$ и на пространстве двукорневых графов $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$. Хотя в настоящей работе мы рассматриваем только *вероятностные* унимодулярные меры, эта техника применима и к σ-конечным унимодулярным мерам.

Наш основной результат заключается в том, что унимодулярные меры – это в точности те $\mathcal{R}$-квазиинвариантные меры, коцикл Радона–Никодима которых совпадает с естественным *модулярным коциклом* (Теорема 50). Таким образом, с этой точки зрения понятие унимодулярности вкладыватся в весьма общую схему построения и исследования *мер с предписанным коциклом Радона–Никодима* (ср. с понятиями мер *Гиббса, Паттерсона–Сулливана,* или *конформных* мер [33, 8, 34, 24]).

В качестве побочного результата нашего подхода мы также получаем куда более короткие и простые доказательства ряда результатов, которые были ранее получены путем громоздких вычислений, основанных на "принципе переноса масс" (см. замечание 47, следствие 52, замечание 58, замечание 65).

Перейдем к краткому описанию содержания статьи. Мы определяем (мультипликативный) *модулярный коцикл* на отдельном связном графе Γ как отношение

$$\Delta_\Gamma(x,y) = \frac{\operatorname{card} G_x y}{\operatorname{card} G_y x},$$

где G – группа автоморфизмов графа Γ, а $G_x y$ – орбита вершины $y \in \Gamma$ под действием стабилизатора вершины $x \in \Gamma$ в группе G. Для всякой вершины $x \in \Gamma$ функция $g \mapsto \Delta_\Gamma(x, gx)$ совпадает с *модулярной функцией* группы G, что было известно уже Шлихтингу [32] и Трофимову [36], и нетрудно убедиться в том, что Δ_Γ является коциклом и в общем случае. Если группа автоморфизмов графа G унимодулярна, то Δ_Γ факторизуется до коцикла $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ на факторе $\Gamma_\bullet$ графа Γ по группе G. Поскольку классы отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ – это в точности факторы $\Gamma_\bullet$, индивидуальные коциклы $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ соединяются в глобальный *модулярный коцикл* $\Delta_\bullet$ отношения эквивалентности $\mathcal{R}$, суженного на подмножество $\breve{\mathcal{G}}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet$, состоящее из классов эквивалентности $\Gamma_\bullet$, отвечающих графам Γ с унимодулярной группой автоморфизмов.

Наш подход основан на систематическом использовани аналогии между отношением эквивалентности $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet$ и *пространством двукорневых графов* $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$, фигурирующем в определении унимодулярных мер. Пространство $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ "больше", чем $\mathcal{R}$, поскольку существует естественное отображение $\sigma : \mathcal{G}_{\bullet\bullet} \to \mathcal{R}$, сопоставляющее любому двукорневому графу пару обычных корневых графов, полученных "забыванием" одного из двух корней. И $\mathcal{R}$ и $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ проектируются на пространство корневых графов $\mathcal{G}_{\bullet}$ с не более чем счетными прообразами, и оба эти пространства снабжены естественными инволюциями ι и $\ddot{\iota}$, соответственно, см. диаграмму (33).

Классическая конструкция Фельдмана и Мура [13] сопоставляет любой мере μ на $\mathcal{G}_{\bullet}$ соответствующую *считающую меру* $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{R}$, как результат интегрирования считающих мер $\sharp_{\xi}$, $\xi \in \mathcal{G}_{\bullet}$, на слоях проекции $\mathcal{R} \to \mathcal{G}_{\bullet}$ по мере μ. При этом $\mathcal{R}$-инвариантность меры μ эквивалентна инволютивной инвариантности меры $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$. Аналогичным образом, слои проекции $\mathcal{G}_{\bullet\bullet} \to \mathcal{G}_{\bullet}$ также снабжены естественным семейством мер $\flat_{\xi}$, $\xi \in \mathcal{G}_{\bullet}$, описываемых формулой (3) из §1.1, и их интегрирование по мере μ дает соответствующую меру $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$, такую что унимодулярность μ равносильна инволютивной инвариантности меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$. Ключевым свойством семейства $\{\flat_{\xi}\}$, используемым в доказательстве теоремы 50, является тождество

$$\Delta_{\bullet}(\xi,\eta) = \frac{\flat_{\xi}(\theta)}{\flat_{\eta}(\ddot{\iota}\theta)} \qquad \forall\theta \in \sigma^{-1}(\xi,\eta)$$

из предложения 24.

Заметим, что первоначальная формулировка внутреннего принципа переноса масс Бенжамини и Шрамма в [9] была дана исключительно в терминах математических ожиданий подходящих пробных "функций переноса" относительно меры μ на $\mathcal{G}_{\bullet}$, и мера $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ фигурировала там лишь в неявной форме. Хотя эта мера и появляется один раз в [1] (при объяснении выбора термина "унимодулярность" после определения 2.1), помимо этого авторы [1] (равно как и авторы [9] или более недавней статьи [4]), всегда работая с математическими ожиданиями, никогда не говорят ни о считающей мере $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$, ни о семействе мер $\flat_{\xi}$. В рамках нашего подхода мы работаем непосредственно с мерами (а не с математическими ожиданиями относительно этих мер), что существенно упрощает и проясняет изложение.

Используя меры $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ и $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$, можно *"квазифицировать"* понятия $\mathcal{R}$-инвариантности и, соответственно, унимодулярности, требуя лишь инволютивной квазиинвариантности этих мер. В случае $\mathcal{R}$ это дает обычное опредление квазиинвариатности меры μ относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$. Оказывается, что квазиунимодулярность равносильна квазиинвариантности. Нашим основным техническим средством является теорема 45, связывающая производную Радона–Никодима считающей меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ относительно инволюции на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ с коциклом Радона–Никодима меры μ.

В качестве иллюстрации возможностей нашего подхода мы почти немедленно устанавливаем, что $\mathcal{R}$-эргодические унимодулярные меры – это в точности крайние точки в выпуклом множестве всех унимодулярных мер, и что разложение унимодулярной меры на эргодические компоненты относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ совпадает с ее разложением в интеграл крайних унимодулярных мер (теорема 63 и теорема 64). Мы также даем явное описание *разложения Хопфа* произвольной унимодулярной меры на диссипативную и консервативную части (теорема 66).

В настоящей работе мы попытались вложить рассматриваемые вероятностные понятия в более общий динамический, геометрический и алгебраический контекст. Опуская вторичные подробности, мы уделяли больше внимания концептуальным основаниям и иллюстрирующим их примерам. Более подробное изложение будет опубликовано отдельно.

Много раз я имел возможность обсуждать эти и другие, как близкие, так и не столь близкие, вопросы с Михаилом Иосифовичем Гординым. Случайные деревья никогда не заслоняли ему вид на цветущие сады и захватывающие перспективы большого математического мира.

§1. Модулярный коцикл

1.1. Графы, их факторы и меры на них. Пусть Γ – локально конечный связный граф без петель и кратных ребер. Как обычно, его множество вершин будет также обозначаться Γ, так что множество ребер Γ – это симметричное подмножество $\Gamma \times \Gamma \setminus \mathrm{diag}$. Через $\sharp_\Gamma$ мы обозначим считающую меру на Γ, т.е.

$$\sharp_\Gamma(A) := \operatorname{card} A\ , \qquad A \subset \Gamma\ ,$$

и через

$$G := \mathrm{Aut}(\Gamma)\ , \qquad G_x := \{g \in G : gx = x\}\ ,$$

мы обозначим группу автоморфизмов Γ и G-стабилизатор вершины $x \in \Gamma$, соответственно. Группа G является *локально компактной* в топологии поточечной сходимости.

Через

$$\Gamma_\bullet := \Gamma/G = \{\overline{x} := Gx : x \in \Gamma\} \tag{1}$$

мы обозначим орбитальный фактор графа Γ, т.е. множество G-орбит в Γ. Иначе говоря, $\Gamma_\bullet$ – это множество классов изоморфизма $\overline{(\Gamma, x)}$ всевозможных корневых графов (Γ, x). Через $\sharp_{\Gamma_\bullet}$ мы обозначим считающую меру на $\Gamma_\bullet$.

Орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ обладает естественной структурой графа: две орбиты $\overline{x}, \overline{y} \in \Gamma_\bullet$ являются соседями, если расстояние между ними в метрике графа dist на Γ равно 1, т.е. если для некоторого ($\equiv$ любого) представителя $x \in \overline{x}$ имеется представитель $y \in \overline{y}$, такой что x и y – соседи в Γ.

Далее, через

$$\Gamma_\bullet^x := \Gamma/G_x = \{\overline{y}^x := G_x y : y \in \Gamma\} \ , \qquad x \in \Gamma \ , \tag{2}$$

обозначим множество G_x-орбит в Γ. Рассуждая в терминах корневых графов, мы также будем использовать обозначение $\overline{(\Gamma, y)}^x \in \Gamma_\bullet^x$. Через $\flat_x$ обозначим меру на $\Gamma_\bullet^x$, которая является образом считающей меры $\sharp_\Gamma$ под действием отображения $y \mapsto \overline{y}^x$ из Γ в $\Gamma_\bullet^x$. Иными словами,

$$\flat_x\left(\overline{y}^x\right) := \operatorname{card} G_x y \ , \tag{3}$$

что является конечным в силу локальной конечности графа Γ.

Наконец, через

$$\Gamma_{\bullet\bullet} := (\Gamma \times \Gamma)/G = \left\{\overline{(x,y)} := G(x,y) : (x,y) \in \Gamma \times \Gamma\right\}$$

обозначим множество G-орбит на квадрате графа Γ. Иначе говоря, $\Gamma_{\bullet\bullet}$ – это множество классов изоморфизма $\overline{(\Gamma, x, y)}$ всех двукорневых графов, которые можно получить из Γ, т.е. классов изоморфизма графа Γ, снабженного двумя выделенными вершинами: основным и вспомогательным корнями x и y, соответственно.

1.2. Проекции и их слои. Имеется несколько естественных отображений между множествами $\Gamma_{\bullet\bullet}, \Gamma_\bullet \times \Gamma_\bullet$ и $\Gamma_\bullet$, определения которых должны быть ясны из следующей довольно простой коммутативной диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_{\bullet\bullet} \arrow[rrrr, leftrightarrow, "\tilde{\iota}_\Gamma"] \arrow[dr, "\sigma_\Gamma"] \arrow[ddrr, bend right, "\pi_\Gamma"'] & & & & \Gamma_{\bullet\bullet} \arrow[dl, "\sigma_\Gamma"'] \arrow[ddll, bend left, "\pi'_\Gamma"] \\
& \Gamma_\bullet \times \Gamma_\bullet \arrow[rr, leftrightarrow, "\iota_\Gamma"] \arrow[dr, "\rho_\Gamma"] & & \Gamma_\bullet \times \Gamma_\bullet \arrow[dl, "\rho'_\Gamma"'] & \\
& & \Gamma_\bullet & &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\overline{(x,y)} \arrow[rrrr, mapsto, shift left] \arrow[dr, mapsto] \arrow[ddrr, mapsto, bend right] & & & & \overline{(y,x)} \arrow[llll, mapsto, shift left] \arrow[dl, mapsto] \arrow[ddll, mapsto, bend left] \\
& (\overline{x},\overline{y}) \arrow[rr, mapsto, shift left] \arrow[dr, mapsto] & & (\overline{y},\overline{x}) \arrow[ll, mapsto, shift left] \arrow[dl, mapsto] & \\
& & \overline{x} & &
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

Мы снабдим слои

$$\rho_\Gamma^{-1}(\xi) \cong \Gamma_\bullet, \qquad \xi \in \Gamma_\bullet,$$

мерами $\sharp_\xi$, которые являются образами считающей меры $\sharp_{\Gamma_\bullet}$ при естественном отождествлении $\rho_\Gamma^{-1}(\xi)$ и $\Gamma_\bullet$.

Что касается слоев

$$\Gamma_\bullet^\xi := \pi_\Gamma^{-1}(\xi), \qquad \xi \in \Gamma_\bullet,$$

они могут быть отождествлены с факторами $\Gamma_\bullet^x$ (2) для вершин x из G-орбиты ξ (т.е. таких $x \in \Gamma$, что $\overline{x} = \xi$). При этом отождествлении меры $\flat_x$ (3) порождают меру на $\Gamma_\bullet^\xi$, которая не зависит от x, и которую мы обозначим $\flat_\xi$. Иными словами,

$$\flat_{\overline{x}}\left(\overline{(x,y)}\right) := \operatorname{card} G_x y. \tag{6}$$

Замечание 7. Отображение σ_Γ из диаграммы (4) является взаимно однозначным тогда и только тогда, когда граф Γ является жестким (rigid) (т.е. его группа автоморфизмов G тривиальна; в теории графов такие графы также называются неподвижными (fixed) [16]), и в этой ситуации меры $\flat_\xi$ совпадают с соответствующими мерами $\sharp_\xi$, т.е. просто со считающей мерой $\sharp_\Gamma$. Действительно, σ_Γ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда любая орбита $G(x,y)$ в $\Gamma\times\Gamma$ разлагается в произведение орбит Gx и Gy. В частности, любая диагональная орбита $G(x,x)$ также должна разлагаться подобным образом, что возможно только в случае, когда группа G тривиальна. С другой стороны, в общем случае слои σ_Γ могут быть весьма большими. Экстремальный пример доставляется бесконечными вершинно-транзитивными графами, для которых $\Gamma_\bullet$ состоит из единственного элемента, в то время как множество $\Gamma_{\bullet\bullet}$ бесконечно.

1.3. Модулярный коцикл и его свойства.

Предложение 8. *Отношение*

$$\Delta_\Gamma(x,y) := \frac{\operatorname{card} G_x y}{\operatorname{card} G_y x}, \qquad x,y\in\Gamma, \tag{9}$$

удовлетворяет мультипликативному цепному тождеству

$$\Delta_\Gamma(x,y)\,\Delta_\Gamma(y,z) = \Delta_\Gamma(x,z) \qquad \forall\, x,y,z\in\Gamma.$$

Доказательство. По определению, $\operatorname{card} G_x y$ совпадает с (левым) индексом совместного стабилизатора

$$G_{xy} = G_x \cap G_y$$

в G_x, или, что то же самое, с отношением соответствующих значений левой меры Хаара m на G:

$$\operatorname{card} G_x y = \frac{m(G_x)}{m(G_x\cap G_y)},$$

откуда

$$\Delta_\Gamma(x,y) = \frac{m(G_x)}{m(G_y)}, \tag{10}$$

и тем самым цепное тождество очевидным образом выполняется. □

Определение 11. *Отношение* Δ_Γ (9) *называется модулярным коциклом графа* Γ.

Замечание 12. Для вершинно-транзитивных графов этот коцикл (в несколько неявной форме) появляется уже в работах Шлихтинга [32, лемма 1] и Трофимова [36, теорема 1]. В явной форме (опять же, только для вершинно-транзитивных графов) коцикл Δ_Γ был впервые определен Соарди и Вёссом [35, лемма 1] (см. также изложение в [40, §1.F]).

Определение 13. *Граф* Γ *называется унимодулярным, если его модулярный коцикл тождественно равен* 1.

Замечание 14. Наша терминология отличается от используемой в [1], где граф называется *унимодулярным*, если его группа автоморфизмов унимодулярна. По нашему мнению, в силу наличия модулярного коцикла Δ_Γ (9) на графах, его тривиальность заслуживает отдельного термина, в то время как, с другой стороны, представляется расточительным использовать два различных термина для обозначения одного и того же явления (унимодулярности группы автоморфизмов). Как бы то ни было, для вершинно-транзитивных графов унимодулярность графа в смысле нашего определения 13 и в смысле [1] совпадают, см. следствие 17 ниже.

Предложение 15. *Модулярный коцикл Δ_Γ инвариантен относительно диагонального действия группы автоморфизмов G на $\Gamma \times \Gamma$.*

Доказательство. Очевидно, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ и $G_{gx}\, gy = gG_x\, y$, откуда

$$\operatorname{card}\, G_{gx}\, gy = \operatorname{card}\, gG_x\, y = \operatorname{card}\, G_x\, y \qquad \forall\, x, y \in G,$$

из чего следует утверждение. □

Предложение 16. *Для любой вершины $x \in \Gamma$ функция*

$$g \mapsto \Delta_\Gamma(x, gx), \qquad g \in G,$$

является модулярной функцией группы автоморфизмов G.

Доказательство. Из формулы (9)

$$\Delta_\Gamma(x, gx) = \frac{m(G_x)}{m(G_{gx})} = \frac{m(G_x)}{m(g\, G_x\, g^{-1})} = \frac{m(G_x)}{m(G_x\, g^{-1})},$$

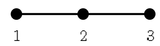
что является в точности модулярной функцией на G. □

Следствие 17. *Вершинно-транзитивный граф является унимодулярным тогда и только тогда, когда его группа автоморфизмов унимодулярна.*

Следствие 18. *Если граф унимодулярен, то его группа автоморфизмов также унимодулярна.*

Замечание 19. Обращение следствия 18 неверно, поскольку существуют *конечные графы* (для которых группа автоморфизмов очевидно конечна, и тем самым унимодулярна), *которые не являются унимодулярными.*

Пример 20. Простейший пример – это граф $\Gamma = I_3$ (здесь и ниже через I_n мы обозначаем подграф $\mathbb{Z}$, состоящий из n последовательных точек):



Его группа автоморфизмов G состоит из двух элементов: тождественного автоморфизма, и инверсии $(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$, так что стабилизаторы G_1 и G_3 тривиальны, в то время, как $G_2 = G$ состоит из двух элементов. Таким образом, внедиагональные значения модулярного коцикла – это

$$\begin{aligned} \Delta_\Gamma(2,1) = \Delta_\Gamma(2,3) = &\ 2, \\ \Delta_\Gamma(1,2) = \Delta_\Gamma(3,2) = &\ 1/2, \\ \Delta_\Gamma(1,3) = \Delta_\Gamma(3,1) = &\ 1. \end{aligned}$$

Замечание 21. Если граф Γ является *жестким*, то он очевидно *унимодулярен*. С другой стороны, имеется много *унимодулярных нежестких графов*. Простейший пример – это граф I_2, группа автоморфизмов которого изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

1.4. Модулярная функция и модулярный фактор-коцикл.

Определение 22. *Согласно предложению* 15*, модулярный коцикл* Δ_Γ *постоянен вдоль* G*-орбит в* $\Gamma \times \Gamma$*, так что он определяет функцию*

$$\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}\big(\overline{(x,y)}\big) := \Delta_\Gamma(x,y), \qquad x,y \in \Gamma,$$

на $\Gamma_{\bullet\bullet}$*, которую мы будем называть* **модулярной функцией**.

Замечание 23. Вообще говоря, на $\Gamma_{\bullet\bullet}$ нет никакой естественной операции композиции, так что модулярная функция $\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}$ *не является* коциклом. Тем не менее, на $\Gamma_{\bullet\bullet}$ имеется естественная *гиперкомпозиция*, для которой результатом умножения двух элементов $\Gamma_{\bullet\bullet}$ является вероятностная мера на $\Gamma_{\bullet\bullet}$ (соответствующая структура – это обобщение гипергрупп, и может быть названа *гипергрупоидом*, ср. обсуждение в [25, 26] в случае вершинно транзитивных графов; также см. общее обсуждение групоидов в этом контексте в [22]), и можно изучать поведение модулярной функции $\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}$ относительно этой операции. Это тесно связано со взаимоотношениями между унимодулярными мерами и обратимыми стационарными мерами для простого случайного блуждания на $\mathcal{G}_\bullet$ (ср. [1, 4]). Мы вернемся к этому сюжету позже.

Определения модулярного коцикла Δ_Γ (9) и мер $\flat_\xi$ (6) немедленно влекут

Предложение 24. *В терминах мер $\flat_\xi$ модулярная функция $\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}$ выражается как*

$$\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}\big(\overline{(x,y)}\big) = \frac{\flat_{\overline{x}}\big(\overline{(x,y)}\big)}{\flat_{\overline{y}}\big(\overline{(y,x)}\big)}.$$

Определение 25. *По предложению* 16*, множества уровня модулярного коцикла Δ_Γ являются объединениями G-орбит в Γ тогда и только тогда, когда группа автоморфизмов G унимодулярна. В этом случае факторизация Δ_Γ дает коцикл на $\Gamma_\bullet$, который мы обозначим $\Delta_{\Gamma_\bullet}$, и будем называть его* **модулярным фактор-коциклом**.

1.5. Примеры.

Пример 26. Мы уже описали модулярный коцикл Δ_Γ для графа $\Gamma = I_3$ в примере 20. Фактор $\Gamma_\bullet$ состоит из 2 орбит

$$\overline{1} = \{1,3\}, \qquad \overline{2} = \{2\}, \tag{27}$$

и внедиагональные значения модулярного фактор-коцикла $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ составляют

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma_\bullet}(\overline{1},\overline{2}) &= \Delta_\Gamma(1,2) = 1/2, \\ \Delta_{\Gamma_\bullet}(\overline{2},\overline{1}) &= \Delta_\Gamma(2,1) = \;\;2 \end{aligned} \tag{28}$$

(поскольку граф Γ конечен, его группа автоморфизмов тоже конечна, и тем самым унимодулярна, так что модулярный фактор-коцикл определен корректно). Наконец, множество $\Gamma_{\bullet\bullet}$ состоит из 5 орбит

$$\begin{aligned} \overline{(1,1)} &= \{(1,1),(3,3)\}, \\ \overline{(1,2)} &= \{(1,2),(3,2)\}, \\ \overline{(1,3)} &= \{(1,3),(3,1)\}, \\ \overline{(2,1)} &= \{(2,1),(2,3)\}, \\ \overline{(2,2)} &= \{(2,2)\}. \end{aligned}$$

Единственные значения модулярной функции $\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}$, отличные от 1, – это

$$\Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}\big(\overline{(1,2)}\big) = 1/2, \qquad \Delta_{\Gamma_{\bullet\bullet}}\big(\overline{(2,1)}\big) = 2.$$

Пример 29. Однородное дерево $T = T_d$ валентности $d \geqslant 3$ унимодулярно, так что модулярный коцикл, модулярный фактор-коцикл и модулярная функция все тождественно равны 1. Заметим, что в этом случае, поскольку граф T вершинно-транзитивен, фактор $T_\bullet$ состоит из единственной точки, в то время как множество $T_{\bullet\bullet}$ можно отождествить с $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, поскольку орбиты $\overline{(x, y)}$ действия группы автоморфизмов на $T \times T$ параметризуются расстояниями $\operatorname{dist}(x, y)$ (т.е. граф T является метрически транзитивным).

Пример 30. Хорошо известно, что группы автоморфизмов однородных деревьев $T = T_d$ из предыдущего примера содержат *неунимодулярные подгруппы*, простейшей из которых является аффинная группа $\mathrm{Aff}(T)$ дерева T, которая содержит все автоморфизмы, сохраняющие некоторую фиксированную точку ω на границе ∂T (например, см. [11]). Нетрудно построить вершинно-транзитивный граф, группа автоморфизмов которого – это в точности $\mathrm{Aff}(T)$. Простейшая конструкция такого сорта – это граф T', введенный Трофимовым [36]: его множество вершин то же, что и у дерева T, а его множество ребер является объединением мноества ребер дерева T и множества дополнительных ребер, полученных соединением всех пар вершин, находящихся на расстоянии 2 друг от друга на всех геодезических, выпущенных из граничной точки ω. Модулярный коцикл на T' задается формулой

$$\Delta_{T'}(x, y) = (d-1)^{\beta_\omega(x,y)}, \tag{31}$$

где

$$\beta_\omega(x, y) := \lim_{z \to \omega} \big[\operatorname{dist}(y, z) - \operatorname{dist}(x, z)\big] \tag{32}$$

– коцикл Буземана на T, заданный граничной точкой ω. Поскольку группа $\mathrm{Aff}(T)$ вершинно-транзитивна на T', фактор $T'_\bullet$ состоит из единственной точки, но модулярный фактор-коцикл не определен в силу неунимодулярности группы $\mathrm{Aff}(T)$. Наконец, орбиты $\overline{(x, y)}$ группы $\mathrm{Aff}(T)$ на $T \times T$ параметризуются расстоянием $\operatorname{dist}(x, y)$ и орирасстоянием $\beta_\omega(x, y)$ (см. [11, 25]), так что можно идентифицировать $T'_{\bullet\bullet}$ с $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$ посредством отображения

$$\overline{(x, y)} \mapsto \big(\operatorname{dist}(x, y), \beta_\omega(x, y)\big),$$

и при этой идентификации модулярная функция на $T'_{\bullet\bullet}$ принимает форму

$$\Delta_{T'_{\bullet\bullet}}(m, n) = (d-1)^n.$$

§2. Инвариантность, унимодулярность и их квазификация

2.1. Пространства корневых графов. Обозначим через $\mathcal{G}_\bullet$ пространство классов изоморфизма локально конечных (включая конечные) связных корневых графов (т.е. графов, снабженных выделенной вершиной). Мы будем обозначать через $\overline{(\Gamma, x)} \in \mathcal{G}_\bullet$ класс изоморфизма корневого графа (Γ, x) (мы уже использовали это обозначение для элементов орбитального фактора (1) отдельного графа). Пространство $\mathcal{G}_\bullet$ снабжено естественной топологией проективного предела, которая превращает его в *польское пространство*: последовательность $\overline{(\Gamma_n, x_n)}$ сходится в $\mathcal{G}_\bullet$ тогда и только тогда, когда для любого радиуса $r > 0$ метрические шары с выделенными центрами $B_r(\Gamma_n, x_n)$ стабилизируются. Тем самым, $\mathcal{G}_\bullet$ является *стандартным борелевским пространством*, и становится *пространством Лебега*, если снабдить его борелевской мерой.

Через $\mathcal{R}$ обозначим корневое отношение эквивалентности на $\mathcal{G}_\bullet$. Его классы эквивалентности являются не более, чем счетными, и состоят из классов изоморфизма всевозможных корневых графов, получаемых из одного "некорневого" графа, т.е., класс эквивалентности элемента $\overline{(\Gamma, x)} \in \mathcal{G}_\bullet$ – это в точности *орбитальный фактор* графа Γ:

$$\mathcal{R}\big[\overline{(\Gamma, x)}\big] := \big\{\overline{(\Gamma, y)} : y \in \Gamma\big\} \cong \Gamma_\bullet$$

(см. выше §1.1). Заимствуя терминологию из теории слоений, мы иногда будем называть классы эквивалентности листами. Отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ является борелевским как подмножество $\mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet$. Поскольку каждый класс $\Gamma_\bullet$ снабжен структурой графа, введенной в §1.1, $\mathcal{R}$ становится *разграфленным отношением эквивалентности* (легко убедиться, что эта структура является борелевской как подмножество $\mathcal{G}_\bullet \times \mathcal{G}_\bullet$).

Точно так же, как и $\mathcal{G}_\bullet$, можно определить пространство $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ классов изоморфизма двукорневых графов (т.е. классов изоморфизма $\overline{(\Gamma, x, y)}$ графов Γ, снабженных двумя выделенными вершинами x и y), ср. определение $\Gamma_{\bullet\bullet}$ в §1.1.

Все отображения, определенные диаграммой (5), расширяются со множеств $\Gamma_{\bullet\bullet}, \Gamma_\bullet \times \Gamma_\bullet$ и $\Gamma_\bullet$, отвечающих индивидуальному графу Γ, до соответствующих "глобальных" отображений между пространствами

$\mathcal{G}_{\bullet\bullet}, \mathcal{R}$ и $\mathcal{G}_{\bullet}$, что дает следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_{\bullet\bullet} \arrow[rrrr, leftrightarrow, "\ddot{\iota}"] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[ddrr, bend right, "\pi"'] & & & & \mathcal{G}_{\bullet\bullet} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[ddll, bend left, "\pi'"] \\
& \mathcal{R} \arrow[rr, leftrightarrow, "\iota"] \arrow[dr, "\rho"] & & \mathcal{R} \arrow[dl, "\rho'"'] & \\
& & \mathcal{G}_{\bullet} & &
\end{tikzcd} \tag{33}$$

Отображения, фигурирующие на этой диаграмме, обозначаются так же, как и на диаграмме (4) с опущенным подстрочным индексом Г. Легко проверить, что все эти отображения измеримы относительно соответствующих борелевских структур, и, более того, отображения (определенные в §1.2 для индивидуальных графов)

$$\xi \mapsto \sharp_{\xi}, \qquad \xi \mapsto \flat_{\xi},$$

сопоставляющие точкам $\xi \in \mathcal{G}_{\bullet}$ соответствующие меры на слоях $\rho^{-1}(\xi)$ и $\pi^{-1}(\xi)$, соответственно, также измеримы в естественном смысле. Полистные модулярные функции из определения 22 также соединяются в одну глобальную борелевскую модулярную функцию $\Delta_{\bullet\bullet}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$.

Ниже мы также будем использовать подмножества

$$\mathring{\mathcal{G}}_{\bullet} \subset \bar{\mathcal{G}}_{\bullet} \subset \breve{\mathcal{G}}_{\bullet} \subset \mathcal{G}_{\bullet}$$

состоящие из всех корневых графов, отвечающих жестким графам, унимодулярным графам, и графам с унимодулярной группой автоморфизмов, соответственно. Все эти подмножества, очевидно, являются объединениями $\mathcal{R}$-классов, и нетрудно проверить, что они борелевские в $\mathcal{G}_{\bullet}$.

Замечание 34. Как следует из замечания 7, отображение σ является взаимно-однозначным над прообразом $\rho^{-1}(\mathring{\mathcal{G}}_{\bullet})$ множества жестких графов $\mathring{\mathcal{G}}_{\bullet} \subset \mathcal{G}_{\bullet}$, и инволюции $\ddot{\iota}, \iota$ совпадают на $\rho^{-1}(\mathring{\mathcal{G}}_{\bullet})$.

Определение 35. *Согласно предложению* 16, *сужение модулярной функции* $\Delta_{\bullet\bullet}$ *на* $\pi^{-1}(\breve{\mathcal{G}}_{\bullet})$ *факторизуется в мультипликативный коцикл* $\Delta_{\bullet}$ *на сужении отношения эквивалентности* $\mathcal{R}$ *на* $\breve{\mathcal{G}}_{\bullet}$. *Иными словами,* $\Delta_{\bullet}$ *получается соединением модулярных фактор-коциклов* $\Delta_{\Gamma_{\bullet}}$ (*определение* 25) *на классах эквивалентности* $\breve{\mathcal{G}}_{\bullet}$ *в единый "глобальный" коцикл. Можно проверить, что коцикл* $\Delta_{\bullet}$ *измерим, и мы* *будем называть его* **модулярным коциклом** *на отношении эквивалентности $\mathcal{R}$ (строго говоря, на сужении $\mathcal{R}$ на $\breve{\mathcal{G}}_\bullet$).*

2.2. Инвариантные и унимодулярные меры. Имеется два понятия инвариантности для мер на $\mathcal{G}_\bullet$. Первое из них является специализацией классического понятия инвариантности относительно отношения эквивалентности, введенного Фельдманом и Муром [13]: мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ $\mathcal{R}$-**инвариантна**, если она инвариантна относительно любого *частичного преобразования* отношения эквивалентности $\mathcal{R}$. В частности, в случае *орбитального отношения эквивалентности*, порожденного действием счетной группы, это понятие совпадает с обычной инвариантностью меры относительно группового действия. В действительности нам будет удобнее использовать равносильное определение (также сформулированное Фельдманом и Муром) в терминах считающих мер на отношении эквивалентности $\mathcal{R}$:

Определение 36 ([13]). *(Левая)* **считающая мера** $\mathrm{M}_\mathcal{R}$ *на $\mathcal{R}$, определенная мерой μ на $\mathcal{G}_\bullet$ – это мера, полученная интегрированием считающих мер $\sharp_\xi$ на слоях проекции ρ по мере μ на базе $\mathcal{G}_\bullet$:*

$$d\,\mathrm{M}_\mathcal{R}(\xi,\eta) := d\mu(\xi)\, d\sharp_\xi(\eta),$$

или, в более короткой форме,

$$\mathrm{M}_\mathcal{R} := \int \sharp_\xi \, d\mu(\xi). \tag{37}$$

Определение 38 ([13, 20, 21]). *Мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ называется $\mathcal{R}$-**инвариантной**, если соответствующая считающая мера $\mathrm{M}_\mathcal{R}$ инвариантна относительно инволюции ι на $\mathcal{R}$.*

Мы несколько переформулируем первоначальное определение второго понятия, введенного Бенжамини и Шраммом [9] (см. также [2, 1]), для того, чтобы сделать более прозрачным его сходство с вышеприведенным определением инвариантных мер. Разница между определением 36 и определением 41 ниже заключается в том, что отношение эквивалентности $\mathcal{R}$ заменяется на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$, а система считающих мер $\{\sharp_\xi\}_{\xi\in\mathcal{G}_\bullet}$ на слоях проекции $\rho : \mathcal{R} \to \mathcal{G}_\bullet$ заменяется на систему мер $\{\flat_\xi\}_{\xi\in\mathcal{G}_\bullet}$ на слоях проекции $\pi : \mathcal{G}_{\bullet\bullet} \to \mathcal{G}_\bullet$.

Определение 39. *(Левая)* **считающая мера** $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ *на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$, определенная мерой μ на $\mathcal{G}_\bullet$, – это мера, полученная интегрированием мер $\flat_\xi$ на* *слоях проекции π по мере μ на базе $\mathcal{G}_\bullet$:*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}} := \int \flat_\xi \, d\mu(\xi). \tag{40}$$

Определение 41. *Мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ называется* **унимодулярной**, *если соответствующая считающая мера $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ инвариантна относительно инволюции $\ddot{\imath}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$.*

Замечание 42. Как следует из замечания 7, *понятия инвариантности и унимодулярности совпадают для мер, сосредоточенных на множестве жестких графов $\mathring{\mathcal{G}}_\bullet$*. Заметим, что, как правило, таковы меры, возникающие из "естественных" вероятностных конструкций (к примеру, см. [27, 20, 1] по поводу мер, возникающих из *пополненных деревьев Гальтона–Ватсона*). Мы называем это явление *принципом Татта*, поскольку Татт был, по-видимому, первым, кто описал его для конечных графов, занимаясь "переписью" планарных триангуляций [37, 38]:

> ...похоже, что для больших n почти все элементы K' с n ребрами должны быть несимметричными ... [38, с. 106]

2.3. Квазификация. Понятие инвариантности меры относительно отношения эквивалентности может быть **квазифицировано** с заменой инволютивной инвариантности соответствующей считающей меры на ее квазиинвариантность, что является обобщением обычной квазиинвариантности относительно группового действия, см. [13]. Ниже мы применяем ту же идею к понятию унимодулярности.

Определение 43. *Мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ называется* **квазиинвариантной**, *если она квазиинвариантна относительно всех частичных преобразований отношения эквивалентности $\mathcal{R}$, или, что равносильно, если соответствующая считающая мера $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{R}$ инволютивно квазиинвариантна; мера μ называется* **квазиунимодулярной**, *если соответствующая считающая мера $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ инволютивно квазиинвариантна.*

Если мера μ квазиинвариантна, то производная Радона–Никодима

$$\Delta_\mu(\xi,\eta) := \frac{d\,\iota\mathrm{M}_{\mathcal{R}}}{d\,\mathrm{M}_{\mathcal{R}}}(\xi,\eta), \qquad (\xi,\eta) \in \mathcal{R},$$

удовлетворяет цепному тождеству, и называется **коциклом Радона–Никодима** меры μ относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ [13].

Неформально это определение коцикла Радона–Никодима часто записывается как

$$\Delta_\mu(\xi,\eta) = \frac{d\,\mu(\eta)}{d\,\mu(\xi)}. \tag{44}$$

Нашим основным техническим средством является

Теорема 45. *Любая квазиинвариантная мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ также квазиунимодулярна, и производная Радона–Никодима считающей меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ относительно инволюции $\ddot{\imath}$ равна*

$$\frac{d\,\ddot{\imath}\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}}{d\,\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}} = \frac{\sigma^{-1}\Delta_\mu}{\Delta_{\bullet\bullet}}, \tag{46}$$

где $\sigma^{-1}\Delta_\mu$ – это результат поднятия коцикла Радона–Никодима Δ_μ с $\mathcal{R}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ с помощью проекции σ.

Набросок доказательства. По определению $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$, для любого $\theta = \big(\overline{(\Gamma,x,y)}\big) \in \mathcal{G}_{\bullet\bullet}$

$$d\,\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}(\theta) = d\mu\big(\overline{(\Gamma,x)}\big)\, d\mathfrak{b}_{\overline{(\Gamma,x)}}\big(\overline{(\Gamma,x,y)}\big),$$

в то время как для инволюции

$$d\,\ddot{\imath}\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}(\theta) d\,\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}\big(\overline{(\Gamma,y,x)}\big) = d\mu\big(\overline{(\Gamma,y)}\big)\, d\mathfrak{b}_{\overline{(\Gamma,y)}}\big(\overline{(\Gamma,y,x)}\big),$$

откуда в силу формулы (44) и предложения 24

$$\begin{aligned} \frac{d\,\ddot{\imath}\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}}{d\,\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}}(\theta) &= \frac{d\mu\big(\overline{(\Gamma,y)}\big)}{d\mu\big(\overline{(\Gamma,x)}\big)} \cdot \frac{\mathfrak{b}_{\overline{(\Gamma,y)}}\big(\overline{(\Gamma,y,x)}\big)}{\mathfrak{b}_{\overline{(\Gamma,x)}}\big(\overline{(\Gamma,x,y)}\big)} \\ &= \frac{\Delta_\mu\big(\overline{(\Gamma,x)},\overline{(\Gamma,y)}\big)}{\Delta_{\bullet\bullet}\big(\overline{(\Gamma,x,y)}\big)} = \frac{\Delta_\mu(\sigma(\theta))}{\Delta_{\bullet\bullet}(\theta)}. \qquad \square \end{aligned}$$

Замечание 47. Для мер μ на $\mathcal{G}_\bullet$, отвечающих стационарным необратимым графам (относительно простого случайного блуждания на $\mathcal{G}_\bullet$), коцикл Радона–Никодима из левой части уравнения (46) был ранее введен и рассмотрен (хотя и в несколько иной форме) Бенжамини и Кюрьеном [4, §4].

Обозначим через $\mathcal{R}^1$ борелевское подмножество $\mathcal{R}$, которое состоит из всех пар $\big(\overline{(\Gamma,x)},\overline{(\Gamma,y)}\big)$, таких что $\overline{x}$ и $\overline{y}$ являются соседями в их общем классе эквивалентности (снабженном структурой графа, описанной в §1.1), и обозначим через $\mathcal{G}^1_{\bullet\bullet} = \sigma^{-1}(\mathcal{R}^1)$ подмножество $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$, состоящее из классов изоморфизма таких двукорневых графов $\overline{(\Gamma, x, y)}$, что их корни x и y являются соседями в Γ.

Теорема 48. *Следующие условия на меру μ на $\mathcal{G}_\bullet$ равносильны:*

- (QI) *μ квазиинвариантна;*
- (QI^1) *ограничение считающей меры $\mathrm{M}_\mathcal{R}$ на множество $\mathcal{R}^1 \subset \mathcal{R}$ квазиинвариантно относительно инволюции ι на $\mathcal{R}$;*
- (QU) *μ квазиунимодулярна;*
- (QU^1) *ограничение считающей меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на множество $\mathcal{G}^1_{\bullet\bullet} \subset \mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ квазиинвариантно относительно инволюции $\ddot{\iota}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$.*

Набросок доказательства. (QI) $\iff$ (QI^1). Эта эквивалентность в действительности справедлива для произвольного разграфленного отношения эквивалентности в предположении связности полистных графов. Импликация (QI) $\implies$ (QI^1) очевидна, в то время как импликация (QI^1) $\implies$ (QI) следует из еще одного общего условия, равносильного квазиинвариантности меры μ (см. [13]): для любого μ-пренебрежимого подмножества $A \subset \mathcal{G}_\bullet$ его насыщение

$$\mathcal{R}[A] = \bigcup_{\xi \in A} \mathcal{R}[\xi]$$

также μ-пренебрежимо. В силу условия (QI^1), если множество A пренебрежимо относительно меры μ, то объединение A^1 всех соседей точек из A также пренебрежимо. Поскольку структура графа на классах отношения эквивалентности $\mathcal{R}$, введенная в §2.1, такова, что все полистные графы счетны и связны, итерация этой процедуры ведет к пренебрежимости всего насыщения $\mathcal{R}[A]$.

(QI) $\implies$ (QU). Было уже доказано в теореме 45 выше.

(QU) $\implies$ (QU^1). Очевидно.

(QU) $\implies$ (QI) и (QU^1) $\implies$ (QI^1). Отображение $\sigma : \mathcal{G}_{\bullet\bullet} \to \mathcal{R}$ заключается в схлопывании каждого из слоев $\pi^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathcal{G}_\bullet$, проекции $\pi : \mathcal{G}_{\bullet\bullet} \to \mathcal{G}_\bullet$ на соответствующий слой $\rho^{-1}(\xi)$ проекции $\rho : \mathcal{R} \to \mathcal{G}_\bullet$, см. диаграмму (33).

Очевидно, образ типа каждой из мер $\flat_\xi$ на $\pi^{-1}(\xi)$ является типом соответствующей меры $\sharp_\xi$ на $\rho^{-1}(\xi)$. В силу этого, по определению мер $\mathrm{M}_\mathcal{R}$ на $\mathcal{R}$ и $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ (определение 36 и определение 39, соответственно), тип меры $\mathrm{M}_\mathcal{R}$ является образом типа меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ под действием отображения σ. Поскольку инволюции $\ddot{\iota}$ и ι на $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ и $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$, соответственно, полу-сопряжены посредством σ, тип меры $\iota\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ также является образом типа меры $\ddot{\iota}\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$. Таким образом, эквивалентность мер $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ и $\ddot{\iota}\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ влечет эквивалентность мер $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ и $\iota\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$ на $\mathcal{R}$. То же рассуждение, примененное к ограничению меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на $\mathcal{G}^1_{\bullet\bullet}$, доказывает импликацию $(\mathrm{QU}^1) \Longrightarrow (\mathrm{QI}^1)$. □

Следствие 49. *Всякая унимодулярная мера на $\mathcal{G}_\bullet$ квазиинвариантна.*

2.4. Унимодулярность и квазиинвариантность. Теперь мы сформулируем и докажем необходимое и достаточное условие унимодулярности произвольной меры μ на $\mathcal{G}_\bullet$ в терминах ее коцикла Радона–Никодима Δ_μ относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$.

Теорема 50. *Мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ унимодулярна тогда и только тогда, когда*

(i) *она сосредоточена на множестве $\breve{\mathcal{G}}_\bullet \subset \mathcal{G}_\bullet$,*
(ii) *она квазиинвариантна относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$, и*
(iii) *ее коцикл Радона–Никодима совпадает с модулярным коциклом $\Delta_\bullet$ на $\breve{\mathcal{G}}_\bullet$.*

Доказательство. Если условия (i)–(iii) выполняются, то мера μ унимодулярна по теореме 45. Обратно, если μ унимодулярна, то она квазиинвариантна по теореме 48, и в силу теоремы 45 поднятие ее коцикла Радона–Никодима посредством отображения σ совпадает (mod 0) с модулярной функцией $\Delta_{\bullet\bullet}$, что означает, что множество

$$A = \{(\xi,\eta) \in \mathcal{R} : \Delta_{\bullet\bullet} \text{ непостоянна на слое } \sigma^{-1}(\xi,\eta)\}$$

$\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$-пренебрежимо. В силу квазиинвариантности меры μ, $\mathcal{R}$-насыщение множества A (объединение всех произведений $\mathcal{R}[\xi] \times \mathcal{R}[\xi]$, $\xi \in \mathcal{G}_\bullet$, которые пересекают A) также $\mathrm{M}_{\mathcal{R}}$-пренебрежимо. Но это насыщение – это в точности $\mathcal{R} \setminus \rho^{-1}(\breve{\mathcal{G}}_\bullet)$ по определению множества $\breve{\mathcal{G}}_\bullet$, так что мера μ сосредоточена на $\breve{\mathcal{G}}_\bullet$. □

Следствие 51. *Инвариантная* (*соответственно, унимодулярная*) *мера на $\mathcal{G}_\bullet$ унимодулярна* (*соответственно, инвариантна*) *тогда и только тогда, когда она сосредоточена на $\bar{\mathcal{G}}_\bullet$.*

Следствие 52 ([1, Proposition 2.2]). *Мера μ унимодулярна тогда и только тогда, когда ограничение соответствующей считающей меры $\mathrm{M}_{\mathcal{G}_{\bullet\bullet}}$ на множество $\mathcal{G}^1_{\bullet\bullet} \subset \mathcal{G}_{\bullet\bullet}$ инвариантно относительно инволюции $\ddot{\imath}$ на $\mathcal{G}_{\bullet\bullet}$.*

Доказательство. Два коцикла на $\mathcal{R}$ совпадают тогда и только тогда, когда их сужения на $\mathcal{R}^1$ совпадают. □

Замечание 53. Нетрудно привести пример инвариантной неунимодулярной меры: достаточно взять дельта-меру, отвечающую вершинно-транзитивному графу с неунимодулярной группой автоморфизмов. Эта мера очевидно инвариантна (поскольку соответствующий $\mathcal{R}$-класс состоит всего из одной точки) и неунимодулярна. Умножение этого графа на случайный жесткий граф, распределенный согласно некоторой инвариантной мере, дает пример неатомарной меры с тем же свойством. Более того, в этой ситуации нет никакой унимодулярной меры, которая была бы эквивалентна данной инвариантной мере. Также несложно построить похожий пример унимодулярной неинвариантной меры (возьмем любую инвариантную≡унимодулярную меру на жестких корневых графах, и умножим эти графы на конечный неунимодулярный граф). Скорее всего существуют также примеры *чисто неатомарных унимодулярных мер, которые не эквивалентны никакой инвариантной мере.*

2.5. Дискретные унимодулярные меры. Очевидно, что отдельный класс отношения эквивалентности несет инвариантную вероятностную меру тогда и только тогда, когда он конечен, и в этом случае соответствующая инвариантная мера равномерно распределена на классе эквивалентности. Теорема 50 полностью тривиализует задачу описания унимодулярных мер, сосредоточенных на классе $\mathcal{R}$-эвивалентности $\Gamma_\bullet$ (т.е. на орбитальном факторе) отдельного графа Γ.

Определение 54. *Если модулярный фактор-коцикл $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ на $\Gamma_\bullet$ корректно определен (т.е. если его группа автоморфизмов унимодулярна), то мы будем говорить, что этот коцикл* суммируем, *если для некоторого ($\equiv$ всякого) $\xi \in \Gamma_\bullet$*

$$\sum_{\eta \in \Gamma_\bullet} \Delta_{\Gamma_\bullet}(\xi, \eta) < \infty. \tag{55}$$

Теорема 50 немедленно влечет

Теорема 56. *Орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ связного локально конечного графа несет унимодулярную меру (которая в этом случае единственна) тогда и только тогда, когда группа автоморфизмов Γ унимодулярна, и модулярный фактор-коцикл $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ суммируем.*

Следствие 57 ([6]). *Для любого конечного графа Γ орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ несет единственную унимодулярную меру.*

Замечание 58. По формуле (10) условие (55) равносильно условию

$$\sum_{\xi \in \Gamma_\bullet} \frac{1}{\mathfrak{m}(\xi)} < \infty, \tag{59}$$

где $\mathfrak{m}(\xi)$ обозначает общее значение левых мер Хаара $m(G_x)$ G-стабилизаторов точек x из орбиты $\xi \in \Gamma_\bullet$. В этой форме теорема 56 была получена в [1, теорема 3.1] путем довольно длинных выкладок. Заслуживает упоминания тот факт, что условие (59) также возникает в теории древесных решеток под именем условия конечности кообъема как необходимое и достаточное условие существования *неравномерных решеток* [12] (также см. [5, Section 1.5] и [10, Section 2.1]). Мы вернемся к взаимосвязи этих условий позже.

Пример 60. В свете следствия 51 простейшим примером конечного графа Γ, для которого инвариантная и унимодулярная меры на орбитальном факторе $\Gamma_\bullet$ различны, является простейший неунимодулярный конечный граф, т.е. граф $\Gamma = I_3$. Как мы уже объяснили в примере 26, его орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ состоит из двух точек (27), а модулярный фактор-коцикл описывается формулой (28). Таким образом, инвариантная мера ν на $\Gamma_\bullet$ имеет веса

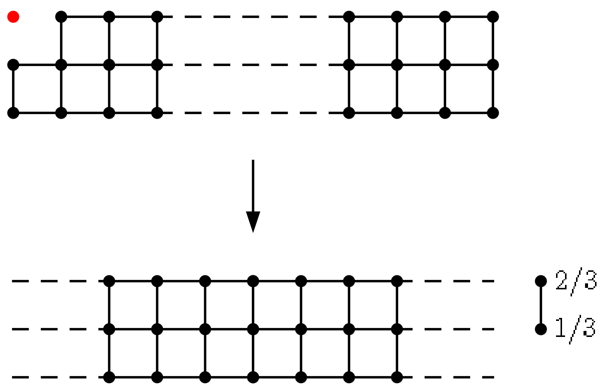
$$\nu\left(\overline{1}\right) = \nu\left(\overline{2}\right) = 1/2,$$

тогда как унимодулярная мера μ на $\Gamma_\bullet$ имеет веса

$$\mu\left(\overline{1}\right) = 2/3, \qquad \mu\left(\overline{2}\right) = 1/3.$$

Пример 61. Обозначим через Γ_n произведение $I_3 \times I_n$, из которого удалена одна “угловая” вершина.

Поскольку графы Γ_n являются жесткими, их орбитальные факторы совпадают с Γ_n, и соответствующие инвариантная ν_n и унимодулярная μ_n меры совпадают с равномерным распределением на Γ_n. Обозначим через Γ предельный граф $I_3 \times \mathbb{Z}$. Его орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$



($\equiv$ класс эквивалентности в $\mathcal{G}_\bullet$, отвечающий графу Γ) состоит из двух орбит

$$\overline{(1,*)} = \{(1,n) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(3,n) : n \in \mathbb{Z}\}$$

и

$$\overline{(2,*)} = \{(2,n) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Точно так же, как в предыдущем примере, инвариантная мера ν на $\Gamma_\bullet$ имеет вид

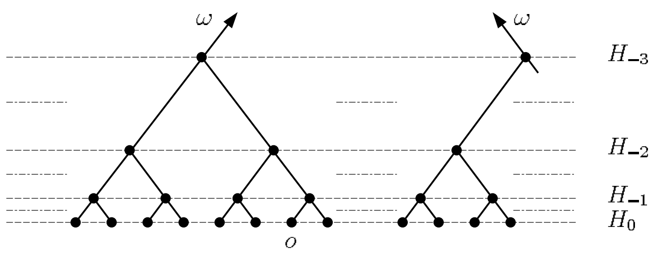
$$\nu\big(\overline{(1,*)}\big) = \nu\big(\overline{(2,*)}\big) = 1/2,$$

в то время как унимодулярная мера μ на $\Gamma_\bullet$ имеет вид

$$\mu\big(\overline{(1,*)}\big) = 2/3\ , \qquad \mu\big(\overline{(2,*)}\big) = 1/3.$$

При $n \to \infty$ меры $\nu_n = \mu_n$ сходятся в $*$-слабой топологии пространства вероятностных мер на $\mathcal{G}_\bullet$ к мере μ, что является иллюстрацией замкнутости класса унимодулярных мер $\mathcal{U}$ в $*$-слабой топологии [9], в то время как класс инвариантных мер $\mathcal{I}$ не замкнут. Мы вернемся к интерпретации этого феномена в терминах отношения эквивалентности $\mathcal{R}$ с использованием теоремы 50 позже.

Пример 62. Условие суммируемости (55) может выполняться и в случае, когда орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ бесконечен (аналогом этого факта в теории древесных решеток является существование неравномерных решеток, см. выше замечание 58). Как отмечалось в [1, Section 3], простейшим примером являются *оришары в однородных деревьях.* Заметим, что эта терминология отнюдь не используется в статье [1], авторы которой игнорируют тот факт, что такие графы уже были хорошо известны в геометрическом и алгебраическом контекстах (см. [11, 31]). В последних работах эти графы также фигурируют под именем *canopy trees*, введенным в обиход в [3]. К сожалению, несмотря на явную ссылку на [40] в [3], определение этих графов иногда также приписывается [3] (например, в [7]). Приведенная ниже иллюстрация заимствована из книги [40, Section 12.C]. Здесь представлен подграф Γ



однородного дерева $T = T_d$ (в нашем случае $d = 3$), определенный выбором вершины $o \in T$ и граничной точки $\omega \in \partial T$ следующим образом: Γ – это объединение орисфер

$$H_n = \{x \in T : \beta_\omega(o, x) = n\}, \qquad n \in \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\},$$

(ср. пример 29 и пример 30). Орбитами группы автоморфизмов Γ являются в точности орисферы H_n, так что орбитальный фактор $\Gamma_\bullet$ может быть отождествлен с $\mathbb{Z}_-$. Модулярный коцикл на Γ задается тогда той же формулой (31), что и для графа Трофимова. Тем не менее, в отличие от графа Трофимова, в этой ситуации группа автоморфизмов Γ унимодулярна (поскольку орисферы остаются неподвижными), так что модулярный фактор-коцикл $\Delta_{\Gamma_\bullet}$ на $\Gamma_\bullet$ корректно определен, и

$$\Delta_{\Gamma_\bullet}(n, n') = (d-1)^{n'-n}, \qquad n, n' \in \mathbb{Z}_-,$$

(ср. с формулой (32) для модулярной функции на графе Трофимова), так что условие (55) очевидным образом выполнено.

2.6. Эргодическое разложение унимодулярных мер. Напомним, что мера m на пространстве Лебега (X, m) называется эргодичной относительно несингулярного дискретного отношения эквивалентности R на X, если любое измеримое R-насыщенное ($\equiv \mathcal{R}$-инвариантное) множество или m-пренебрежимо, или имеет полную меру m. Фактор-пространство пространства (X, m), отвечающее σ-алгебре измеримых R-инвариантных множеств, называется пространством эргодических компонент меры m относительно отношения эквивалентности R. Условные меры соответствующего фактор-отображения также являются R-квазиинвариантными, и называются эргодическими компонентами меры m. Возникающее при этом разложение меры m в интеграл ее эргодических компонент является единственным (mod 0). Ключевым свойством эргодического разложения, которое мы будем использовать ниже, является то, что коциклы Радона–Никодима условных мер совпадают с коциклом Радона–Никодима исходной меры [13].

Множество $\mathcal{U}$ унимодулярных мер на $\mathcal{G}_\bullet$ очевидно является выпуклым. Нижеследующий результат описывает крайние унимодулярные меры в терминах $\mathcal{R}$-эргодичности для отношения эквивалентности $\mathcal{R}$.

Теорема 63. *Унимодулярная мера на $\mathcal{G}_\bullet$ является крайней тогда и только тогда, когда она эргодична как $\mathcal{R}$-квазиинвариантная мера.*

Доказательство. Согласно вышеупомянутому свойству эргодического разложения, если мера μ не эргодична, то ее эргодические компоненты также унимодулярны в силу теоремы 50, так что мера μ не является крайней в $\mathcal{U}$. Обратно, если мера μ не крайняя в $\mathcal{U}$, то она представима как нетривиальная выпуклая комбинация $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ двух других унимодулярных мер μ_1, μ_2. Поскольку коциклы Радона–Никодима всех этих мер совпадают с модулярным коциклом $\Delta_\bullet$, производная Радона–Никодима $d\mu_1/d\mu$ является глобально непостоянной и полистно постоянной измеримой функцией, что возможно только если мера μ неэргодична. $\square$

Как следствие мы немедленно получаем

Теорема 64. *Любая унимодулярная мера μ на $\mathcal{G}_\bullet$ единственным образом разлагается в интеграл крайних унимодулярных мер, и это разложение совпадает с эргодическим разложением меры μ относительно отношения эквивалентности $\mathcal{R}$.*

Замечание 65. По-видимому, следующее довольно расплывчатое определение σ-алгебры $\mathcal{I}$ из [1, с. 1470] представляет собой попытку (в отсутствие адекватного языка) сказать, что $\mathcal{I}$ является σ-алгеброй $\mathcal{R}$-инвариантных измеримых множеств:

> Пусть $\mathcal{I}$ обозначает σ-алгебру событий (в борелевской σ-алгебре на $\mathcal{G}_\bullet$), которые инвариантны относительно некорневых изоморфизмов. Для избежания путаницы в дальнейшем заметим, что это определение не зависит от меры μ, так что даже в случае отсутствия нетривиальных некорневых изоморфизмов μ-п.в. σ-алгебра $\mathcal{I}$ все же не равна $(\mathrm{mod}\ 0)$ σ-алгебре μ-измеримых множеств.

Если это действительно так, то наша теорема 63 совпадает с теоремой 4.7 из [1], которая была доказана с использованием эквивалентности экстремальности в $\mathcal{U}$ и эргодичности соответствующей меры на пространстве траекторий простого случайного блуждания на $\mathcal{G}_\bullet$ относительно сдвига по времени. Этот факт аналогичен хорошо известному свойству цепей Маркова с конечной стационарной мерой: эргодичность сдвига в пространстве траекторий равносильна неприводимости пространства состояний [30, 19].

Обозначим через $\widehat{\mathcal{G}}_\bullet \subset \check{\mathcal{G}}_\bullet$ объединение $\mathcal{R}$-классов, вдоль которых модулярный коцикл $\Delta_\bullet$ суммируем. Тогда теорема 50 в сочетании с [23, теорема 23 и замечание 28] влечет

Теорема 66. *Дискретные эргодические компоненты унимодулярной меры μ – это в точности те условные меры, которые сосредоточены на $\mathcal{R}$-классах из множества $\widehat{\mathcal{G}}_\bullet$. Иными словами, диссипативной частью меры μ является ее ограничение на $\widehat{\mathcal{G}}_\bullet$.*

Литература

1. D. Aldous, R. Lyons, *Processes on unimodular random networks.* — Electron. J. Probab. **12**, No. 54 (2007), 1454–1508 (electronic).
2. D. Aldous, J. M. Steele, *The objective method: probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence.* In: Probability on discrete structures, Encyclopaedia Math. Sci., vol. **110**, pp. 1–72, Springer, Berlin, 2004.
3. M. Aizenman, S. Warzel, *The canopy graph and level statistics for random operators on trees.* — Math. Phys. Anal. Geom. **9**, No. 4 (2006), 291–333 (2007).
4. I. Benjamini, N. Curien, *Ergodic theory on stationary random graphs.* — Electron. J. Probab. **17**, No. 93 (2012), 20 pp. (electronic).

5. H. Bass, A. Lubotzky, *Tree Lattices*, Progress in Mathematics, vol. **176**. With appendices by H. Bass, L. Carbone, Lubotzky, G. Rosenberg and J. Tits. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001, .
6. I. Benjamini, R. Lyons, Y. Peres, O. Schramm, *Group-invariant percolation on graphs.* — Geom. Funct. Anal. **9**, No. 1 (1999), 29–66.
7. I. Benjamini, R. Lyons, O. Schramm, *Unimodular random trees.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **35**, No. 2 (2015), 359–373.
8. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **470**, Springer, Berlin–New York, 1975.
9. I. Benjamini, O. Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs.* — Electron. J. Probab. **6**, No. 23 (2001), 13 pp. (electronic).
10. L. Carbone, *Non-uniform lattices on uniform trees.* — Mem. Amer. Math. Soc. **152**, No. 724 (2001), xii+127.
11. D. I. Cartwright, V. A. Kaimanovich, W. Woess, *Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44**, No. 4 (1994), 1243–1288.
12. L. Carbone, G. Rosenberg, *Lattices on nonuniform trees.* — Geom. Dedicata **98** (2003), 161–188.
13. J. Feldman, C. C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras. I.* — Trans. Amer. Math. Soc. **234**, No. 2 (1977), 289–324.
14. L. Garnett, *Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion.* — J. Funct. Anal. **51**, No. 3 (1983), 285–311.
15. O. Häggström, *Infinite clusters in dependent automorphism invariant percolation on trees.* — Ann. Probab. **25**, No. 3 (1997), 1423–1436.
16. F. Harary, *Methods of destroying the symmetries of a graph.* — Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) **24**, No. 2 (2001), 183–191 (2002).
17. F. Harary D. Ranjan, *Breaking symmetry in complete graphs by orienting edges: asymptotic bounds.* — Inform. Process. Lett. **67**, No. 5 (1998), 227–230.
18. В. А. Кайманович, *Броуновское движение на слоениях: энтропия, инвариантные меры, перемешивание.* — Функц. анализ и его прил. **22**, No. 4 (1988), 82–83.
19. V. A. Kaimanovich, *Measure-theoretic boundaries of Markov chains,* 0-2 *laws and entropy*. In: Harmonic analysis and discrete potential theory (Frascati, 1991), pp. 145–180. Plenum, New York, 1992.
20. V. A. Kaimanovich, *Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **18**, No. 3 (1998), 631–660.
21. V. A. Kaimanovich, *Random walks on Sierpiński graphs: hyperbolicity and stochastic homogenization.* In: Fractals in Graz 2001, Trends Math., pp. 145–183. Birkhäuser, Basel, 2003.
22. V. A. Kaimanovich, *Amenability and the Liouville property.* — Israel J. Math. **149** (2005), 45–85.
23. V. A. Kaimanovich, *Hopf decomposition and horospheric limit sets.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **35**, No. 2 (2010), 335–350.
24. V. A. Kaimanovich, M. Lyubich, *Conformal and harmonic measures on laminations associated with rational maps.* — Mem. Amer. Math. Soc. **173**, No. 820 (2005), vi+119.

25. V. A. Kaimanovich, W. Woess, *Construction of discrete, non-unimodular hypergroups.* In: Probability measures on groups and related structures, XI (Oberwolfach, 1994), pp. 196–209. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
26. V. A. Kaimanovich, W. Woess, *Boundary and entropy of space homogeneous Markov chains.* — Ann. Probab. **30**, No. 1 (2002), 323–363.
27. R. Lyons, R. Pemantle, Yu. Peres, *Ergodic theory on Galton–Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **15**, No. 3 (1995), 593–619.
28. J. R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. **2**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of 1997 original.
29. F. Paulin, *Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes.* — Markov Process. Related Fields **5**, No. 2 (1999), 163–200.
30. M. Rosenblatt, *Markov Processes. Structure and Asymptotic Behavior*, Springer–Verlag, New York, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **184**.
31. M. A. Ronan, J. Tits, *Twin trees. II. Local structure and a universal construction.* — Israel J. Math. **109** (1999), 349–377.
32. G. Schlichting, *Polynomidentitäten und Permutationsdarstellungen lokalkompakter Gruppen.* — Invent. Math. **55**, No. 2 (1979), 97–106.
33. Я. Г. Синай, *Гиббсовские меры в эргодической теории.* — Успехи матем. наук **27**, No. 4(166) (1972), 21–64.
34. D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 50 (1979), 171–202.
35. P. M. Soardi and W. Woess, *Amenability, unimodularity, and the spectral radius of random walks on infinite graphs.* — Math. Z. **205**, No. 3 (1990), 471–486.
36. В. И. Трофимов, *Группы автоморфизмов графов как топологические группы.* — Матем. заметки **38**, No. 3 (1985), 378–385.
37. W. T. Tutte, *A census of planar triangulations.* — Canad. J. Math. **14** (1962), 21–38.
38. W. T. Tutte, *On the enumeration of convex polyhedra.* — J. Combin. Theory Ser. B **28**, No. 2 (1980), 105–126.
39. W. Woess, *Topological groups and recurrence of quasitransitive graphs.* — Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **64** (1994), 185–213.
40. W. Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups.* Cambridge Tracts in Mathematics, vol. **138**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Kaimanovich V. A. Invariance, quasi-invariance and unimodularity for random graphs.

We interpret the probabilistic notion of unimodularity for measures on the space of rooted locally finite connected graphs in terms of the theory of measured equivalence relations. It turns out that the right framework for this consists in considering quasi-invariant (rather than just invariant) measures with respect to the root moving equivalence relation. We define a natural modular cocycle of this equivalence relation, and show that unimodular measures are precisely those quasi-invariant measures whose Radon–Nikodym cocycle coincides with the modular cocycle. This embeds the notion of unimodularity into the very general dynamical scheme of constructing and studying measures with a prescribed Radon–Nikodym cocycle.

Department of Mathematics and Statistics,
University of Ottawa, 585 King Edward,
Ottawa ON, K1N 6N5, Canada
E-mail: vkaimano@uottawa.ca,
vadim.kaimanovich@gmail.com

Поступило 23 ноября 2015 г.