Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2015 г.

А. Ю. Зайцев

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ПРОБЛЕМЕ ЛИТТЛВУДА–ОФФОРДА

Функция концентрации d-мерного случайного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ определяется равенством

$$Q(F,\tau) = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \tau B), \quad \tau \geqslant 0,$$

где $B = \{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \leqslant 1/2\}$ – центрированный шар евклидова пространства $\mathbf{R}^d$ с радиусом 1/2. В частности,

$$Q(F,0) = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y = x).$$

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$, где $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$. Начиная с основополагающих работ Литтлвуда и Оффорда [11] и Эрдёша [9], активно изучается поведение функций концентрации взвешенных сумм $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$. Ниже через F_a будут обозначаться распределения векторов S_a. Первоначальный вариант проблемы Литтлвуда–Оффорда (см. [9] и [11]) относился к оцениванию $Q(F_a, 0)$ для случая, когда X имеет симметричное распределение Бернулли $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = 1/2$.

Полученные за последние десять лет результаты для функций концентрации взвешенных сумм S_a играют важную роль в изучении сингулярных чисел случайных матриц (см., например, работы Нгуена и Ву [12,13], Рудельсона и Вершинина [14,15], Тао и Ву [16,17], Вершинина [18]). Позднее несколько иные оценки функций концентрации взвешенных сумм в проблеме Литтлвуда–Оффорда были также получены в работах Ю. С. Елисеевой, Ф. Гётце и автора [4–8]. Упомянутые выше

Ключевые слова: функции концентрации, неравенства, проблема Литтлвуда–Оффорда, суммы независимых случайных величин.

Работа поддержана грантами РФФИ 13-01-00256 и НШ-2504.2014.1, а также Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

результаты отражают зависимость оценок от арифметической структуры коэффициентов a_k при различных условиях на вектор $a \in (\mathbf{R}^d)^n$ и на распределение $\mathcal{L}(X)$.

В дальнейшем в некоторых формулах будет появляться величина

$$p(v) = G\big\{\{x \in \mathbf{R} : |x| > v\}\big\}, \quad v \geqslant 0,$$

где G – симметризованное распределение $G = \mathcal{L}(X_1 - X_2)$. Запись $A \ll_d B$, означает, что $|A| \leqslant c(d)\, B$, где $c(d) > 0$ зависит только от d. Скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbf{R}^d$ записывается как $\langle x, y\rangle$. Обозначим $\mathfrak{F}_d$ множество всех d-мерных вероятностных распределений и $\mathfrak{D}_d$ – множество всех безгранично делимых распределений из $\mathfrak{F}_d$. Будем обозначать E_y распределение, сосредоточенное в точке $y \in \mathbf{R}^d$. В дальнейшем $\widehat{F}(t)$, $t \in \mathbf{R}^d$, – характеристическая функция распределения $F \in \mathfrak{F}_d$.

Произведения и степени мер понимаются в смысле свертки. Для $D \in \mathfrak{D}_d$, $F \in \mathfrak{F}_d$, и $\lambda \geqslant 0$ через D^λ будем обозначать безгранично делимое распределение с характеристической функцией $\widehat{D}^\lambda(t)$, а через $e(\lambda F)$ – безгранично делимое обобщенное распределение Пуассона с характеристической функцией $\exp\big(\lambda\,(\widehat{F}(t) - 1)\big)$ и спектральной мерой Леви λF. Легко видеть, что

$$e(\lambda F) = e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s F^s}{s!}.$$

Здесь F^0 – вырожденное распределение E_0, сосредоточенное в точке $0 \in \mathbf{R}^d$. Так что

$$e(\lambda F) = e^{-\lambda} E_0 + e^{-\lambda} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^s F^s}{s!}. \tag{1}$$

Нам потребуются простейшие свойства функций концентрации. Прежде всего заметим, что для любого распределения $F \in \mathfrak{F}_d$

$$\lim_{\tau \to 0} Q(F, \tau) = Q(F, 0) \tag{2}$$

(см., например, [10, с. 14]). Для любых распределений $U, V \in \mathfrak{F}_d$

$$Q(U\,V, \tau) \leqslant Q(U, \tau) \quad \text{при всех } \tau \geqslant 0. \tag{3}$$

Следующая лемма 1 непосредственно следует из соотношений (1) и (3).

Лемма 1. *Пусть* $\tau,\lambda\geqslant 0$, $F,U\in\mathfrak{F}_d$ *и* $D=e(\lambda F)\in\mathfrak{D}_d$. *Тогда*

$$0\leqslant Q(U,\tau)-Q(UD,\tau)\leqslant 1-e^{-\lambda}. \tag{4}$$

Введем распределение H с характеристической функцией

$$\widehat{H}(t)=\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\bigl(1-\cos\langle t,a_k\rangle\bigr)\Bigr),\quad t\in\mathbf{R}^d.$$

Заметим, что $H^p=e\bigl(\frac{np}{2}M\bigr)$ является симметричным безгранично делимым распределением со спектральной мерой Леви $\frac{np}{2}M$, где

$$M=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\bigl(E_{a_k}+E_{-a_k}\bigr)\in\mathfrak{F}_d.$$

М. А. Лифшиц обратил внимание автора на то, что распределения H^p могут быть представлены как распределения взвешенных сумм S_a при том же наборе весов $a=(a_1,\dots,a_n)$, который участвует в первоначальной задаче. Только общее распределение случайных величин $X,X_1,\dots,X_n$ при фиксированном p имеет специальный вид $\mathcal{L}(X)=e\bigl(\frac{p}{4}(E_1+E_{-1})\bigr)$.

Приведенная ниже теорема 1 содержится в недавно опубликованной работе [8], см. также [6]. Она связывает проблему Литтлвуда–Оффорда с общими оценками для функций концентрации, в частности, с результатами Т. Арака, содержащимися в работах [1–3] (см. [6]).

Теорема 1. *Для любых* $\tau,u>0$ *справедливо неравенство*

$$Q(F_a,\tau)\ll_d Q(H^{p(\tau/u)},u).$$

В работе [8] получено также более общее утверждение, чем теорема 1. Оно дает полезные оценки, если $p(\tau/u)$ мало, даже если $p(\tau/u)=0$.

Теорема 1 была доказана при $\tau,u>0$. Естественным образом возникает вопрос о нахождении аналога теоремы 1 для $\tau=0$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема 2.

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$Q(F_a,0)\ll_d Q(H^{p(0)},0)=H^{p(0)}\{\{0\}\}. \tag{5}$$

Пусть $A = \big\{x \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(X = x) > 0\big\}$. Ясно, что множество A не более чем счетно. Легко проверить, что

$$p(0) = \sum_{x \in A} (\mathbf{P}(X = x))^2.$$

Согласно (3), величина $Q(H^{p(0)}, 0)$ является невозрастающей функцией переменной $p(0)$. Так что правая часть неравенства (5) минимальна при $p(0) = 1$. Правда в этом случае левая часть неравенства (5) обращается в нуль. Ведь тогда распределение $\mathcal{L}(X)$ не имеет атомов, $A = \varnothing$ и $Q\big(\mathcal{L}(X), 0\big) = 0$. С помощью (3) отсюда легко выводится равенство $Q(F_a, 0) = 0$.

Достоинством теоремы 2 является то, что величина $p(v)$ принимает максимальное значение при $v = 0$. Это выгодно отличает теорему 2 от теоремы 1, дающей при $\tau = u > 0$ оценку $Q(F_a, \tau) \ll_d Q(H^{p(1)}, \tau)$, из которой, конечно, следует, что $Q(F_a, 0) \ll_d Q(H^{p(1)}, 0)$ (см. (2)). Но $p(0)$ может быть существенно больше, чем $p(1)$, а $Q(H^{p(0)}, 0)$ может быть существенно меньше, чем $Q(H^{p(1)}, 0)$. Использование теоремы 2 вместо теоремы 1 позволяет, в частности, заменить $p(1)$ на $p(0)$ в формулировках теорем 5 и 6 работы [6] в частном случае, когда параметры τ_j, $j = 1, \dots, d$, участвующие в формулировках этих теорем, все равны нулю.

Интересно при этом то, что несмотря на сказанное выше, мы выведем теорему 2 все-таки из теоремы 1 с помощью несколько более деликатного предельного перехода.

Доказательство теоремы 2. Хорошо известно, что для любого распределения $F \in \mathfrak{F}_d$ и для любого $x \in \mathbf{R}^d$

$$F\{\{x\}\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2^d\, T^d} \int_{P_T} \exp\big(-i\langle t, x\rangle\big)\, \widehat{F}(t)\, dt,$$

где $P_T \subset \mathbf{R}^d$ – прямое произведение d интервалов $[-T, T]$. Поэтому, для любого распределения $F \in \mathfrak{F}_d$, характеристическая функция которого вещественна и неотрицательна ($\widehat{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}^d$),

$$Q(F, 0) = F\{\{0\}\}.$$

В частности, это верно для $F = H^{p(0)}$.

Согласно теореме 1,

$$Q(F_a, \tau) \ll_d Q(H^{p(\varepsilon)}, \tau/\varepsilon) \quad \text{при всех } \tau, \varepsilon > 0.$$

Устремляя τ к нулю и пользуясь (2), получаем

$$Q(F_a, 0) \ll_d Q(H^{p(\varepsilon)}, 0) \quad \text{при всех } \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Очевидно, что $p(\varepsilon) \leqslant p(0)$ и $H^{p(0)} = H^{p(\varepsilon)} H^{p(0)-p(\varepsilon)}$. Пользуясь неравенством (4), мы убеждаемся в справедливости соотношения

$$0 \leqslant Q(H^{p(\varepsilon)}, 0) - Q(H^{p(0)}, 0) \leqslant 1 - \exp\Big(- \frac{1}{2}\, n\, \big(p(0) - p(\varepsilon)\big)\Big).$$

Поскольку $p(\varepsilon) \to p(0)$, отсюда следует, что

$$Q(H^{p(\varepsilon)}, 0) \to Q(H^{p(0)}, 0) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Устремляя ε к нулю в правой части неравенства (6), получаем утверждение теоремы 2. □

Замечание. Из слабой сходимости вероятностных распределений в общем случае не следует сходимость значений функций концентрации в нуле. Например, так происходит при сходимости непрерывных распределений к дискретным.

Литература

1. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 225–246.
2. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова. I.* — Теория вероятн. и ее примен. **26** (1981), 225–245.
3. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 214 с.
4. Ю. С. Елисеева, *Многомерные оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **412** (2013), 121–137.
5. Ю. С. Елисеева, Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации в проблеме Литтлвуда–Оффорда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 50–69.
6. Yu. S. Eliseeva, F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Arak inequalities for concentration functions and the Littlewood–Offord problem.* — arXiv:1506.09034 (2015).
7. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **57** (2012), 768–777.
8. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *О проблеме Литтлвуда–Оффорда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **431** (2014), 72–81.
9. P. Erdös, On a lemma of Littlewood and Offord, Bull. Amer. Math. Soc., 51 (1945), 898–902.

10. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* Наука, М., 1980.
11. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation.* — Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12** (1943), 277–286.
12. H. Nguyen, V. Vu, *Optimal inverse Littlewood–Offord theorems.* — Adv. Math. **226** (2011), 5298–5319.
13. H. Nguyen, V. Vu, *Small probabilities, inverse theorems and applications.* — In: Erdös Centennial Proceeding, L. Lovász et. al. eds., pp. 409–463, Springer; arXiv:1301.0019, 2013.
14. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218** (2008), 600–633.
15. M. Rudelson, R. Vershynin, *The smallest singular value of a random rectangular matrix.* — Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1707–1739.
16. T. Tao, V. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. **169** (2009), 595–632.
17. T. Tao, V. Vu, *From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 377–396.
18. R. Vershynin, *Invertibility of symmetric random matrices.* — Random Structures Algorithms **44** (2014), 135–182.

Zaitsev A. Yu. Bound for the maximal probability in the Littlewood–Offord problem.

The paper deals with studying a connection of the Littlewood–Offord problem with estimating the concentration functions of some symmetric infinitely divisible distributions. It is shown that the values at zero of the concentration functions of weighted sums of i.i.d. random variables may be estimated by the values at zero of the concentration functions of symmetric infinitely divisible distributions with the Lévy spectral measures which are multiples of the sum of delta-measures at ±weights involved in constructing the weighted sums.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

Поступило 18 ноября 2015 г.