Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2015 г.

В. А. Ершов, И. А. Ибрагимов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА

§1. Постановка задачи

Пусть X есть случайная величина, принимающая значения в множестве целых положительных чисел и пусть

$$\mathbf{P}\{X = k\} = \theta(k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Последовательность $\theta = \big(\theta(1), \theta(2), \ldots\big)$ можно трактовать как плотность распределения случайной величины X по отношению к считающей мере μ на $(1, 2, \ldots)$, $\mu\big(\{1, 2, \ldots\}\big) = 1$.

Ниже мы рассматриваем задачу оценки параметра θ (плотности распределения θ) по выборке

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \tag{1.1}$$

где наблюдения X_i суть независимые копии X.

Впервые эту задачу рассматривал У. Гренандер (см. [2]). Он исследовал поведение оценок максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_n$ (их определение см. ниже) при $n \to \infty$ в норме l_1. У. Гренандер, в частности, доказал, что

(1) если $\sum_k \sqrt{\theta(k)} < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, \mathbf{E}_\theta\, \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sum_k \sqrt{\theta(k)\,(1 - \theta(k))}; \tag{1.2}$$

(2) если $\theta(k) \sim k^{-\alpha}$, $1 < \alpha < 2$, то при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_\theta\, \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_1 \asymp n^{-\beta}, \quad \beta = 1 - \frac{1}{\alpha}. \tag{1.3}$$

Ключевые слова: непараметрическое оценивание, оценка максимального правдоподобия.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 14-01-00856, а также Программы фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

В этой работе мы продолжаем упомянутые исследования У. Гренандера. При этом мы не ограничиваемся исследованием поведения оценок максимального правдоподобия в норме l_1 и рассматриваем все пространства l_p, $0 < p \leqslant \infty$. При $0 < p < 1$ это метрические пространства последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, таких что $\sum_j |x_j|^p < \infty$, с метрикой $\rho_p(x, y) = \sum_j |x_j - y_j|^p$; при $1 \leqslant p < \infty$ это банахово пространство ограниченных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ с $\sum_j |x_j|^p < \infty$ и нормой $\|x\|_p = \bigl(\sum_j |x_j|^p\bigr)^{1/p}$; под l_∞ мы понимаем банахово пространство ограниченных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$; через c_0 мы обозначаем подпространство l_∞, состоящее из таких $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$, что $\lim_n x_n = 0$. Как мы увидим, соответствующие асимптотические результаты ближе к результатам теории оценивания параметров конечной размерности (ср. [3]), чем к результатам оценивания плотности распределения относительно меры Лебега (ср. [5]).

Определим теперь оценку максимального правдоподобия. Функция правдоподобия нашей задачи

$$L(\theta) = \theta(X_1) \cdot \theta(X_2) \cdots \theta(X_n).$$

Максимизируя последнее выражение по θ при условии, что $\sum_k \theta(k) = 1$, мы получим, что точка максимума $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}_n(1), \widehat{\theta}_n(2), \ldots)$ – оценка максимального правдоподобия – единственна и

$$\widehat{\theta}_n(k) = \frac{\nu_n(k)}{n},$$

где статистика $\nu_n(k)$ равна числу элементов выборки (1.1), равных k.

Статистика $\nu_n(k)$ имеет биномиальное распределение вероятностей с параметрами $(n, \theta(k))$, так что при $0 < p < \infty$

$$\mathbf{E}\,|\widehat{\theta}_n(k)|^p = n^{-p} \sum_{r=1}^{n} r^p \binom{n}{r} \theta(k)^r (1 - \theta(k))^{n-r} \leqslant n^{-p} \Bigl(\sum_{r=1}^{n} r^p \binom{n}{r} \Bigr) \theta(k).$$

Поэтому

$$\mathbf{E} \Bigl(\sum_k |\widehat{\theta}_n(k)|^p \Bigr) \leqslant n^{-p} \sum_{r=1}^{n} r^p \binom{n}{r}$$

и, следовательно, с вероятностью 1 $\widehat{\theta}_n \in l_p$, $0 < p < \infty$.

Распределение статистики $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$ зависит от θ. Ниже, если это не вызывает недоразумения, мы иногда позволяем себе писать $\mathbf{P}\{Y \in A\}$ и $\mathbf{E}\, Y$ вместо $\mathbf{P}_\theta\{Y \in A\}$ и $\mathbf{E}_\theta Y$.

Поскольку $\mathbf{E}\, \max_k |\widehat{\theta}_n(k)| \leqslant \sum_k \left|\frac{\nu_n(k)}{n}\right| \leqslant 1$, то $\widehat{\theta}_n \in c_0$. Таким образом, при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ нормированная разность

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) \in l_p;$$

если $p < 1$ и $\sum_k (\theta(k))^p < \infty$, то с вероятностью 1 $\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) \in l_p$.

§2. Сходимость распределений $\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)$

Рассмотрим нормированную разность

$$\begin{aligned}
\xi_n = \sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) &= \Big(\dots, \frac{\nu_n(k) - n\,\theta(k)}{\sqrt{n}}, \dots\Big) \\
&= \Big(\dots, \frac{\nu_n(k) - n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}} \sqrt{\theta(k)\,(1-\theta(k))}, \dots\Big) \\
&= \Big(\dots, \xi_{nk} \sqrt{\theta(k)\,(1-\theta(k))}, \dots\Big)
\end{aligned}$$

и обозначим $Q_n(p,\theta)$ распределение этой последовательности в l_p (в предположении, что плотность распределения X_j есть θ).

Обозначим $Q(p,\theta)$ распределение в l_p случайной последовательности

$$\xi = (\eta_1, \eta_2, \dots) = \big(\xi_1 \sqrt{\theta(1)\,(1-\theta(1))}, \dots, \xi_k \sqrt{\theta(k)\,(1-\theta(k))}, \dots\big), \quad (2.1)$$

где $(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ – последовательность гауссовских случайных величин, таких что

$$\mathbf{E}\,\xi_k = 0, \quad \mathbf{E}\,\xi_k^2 = 1, \quad \mathbf{E}\,\xi_k \xi_l = -\sqrt{\frac{\theta(k)\,\theta(l)}{(1-\theta(k))\,(1-\theta(l))}}.$$

Теорема 2.1. *Пусть $0 < p < \infty$. Если $\sum_k (\theta(k))^{p/2} < \infty$, то распределения $Q_n(p,\theta)$ сходятся при $n \to \infty$ к распределению $Q(p,\theta)$. Иными словами,*

$$\lim_n \mathbf{E}_\theta\, \phi\big(\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)\big) = \mathbf{E}\, \phi(\xi)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $\phi(x)$ в l_p.

Заметим, что если $p \geqslant 2$, то $\sum_k (\theta(k))^{p/2} \leqslant \sum_k \theta(k) = 1$, так что $Q_n(p,\theta)$ всегда сходится к $Q(p,\theta)$ при $p \geqslant 2$.

Теорема 2.2. *Распределения $Q_n(\infty,\theta)$ сходятся в c_0 к распределению $Q(\infty,\theta)$.*

Доказательство теорем. В соответствии с теоремой Прохорова (см., например, [1]) нам достаточно показать, что

(1) Конечномерные распределения последовательности ξ_n сходятся к конечномерным распределениям последовательности ξ.

(2) Последовательность распределений $Q_n(p,\theta)$ плотна в l_p. Последнее означает, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется компактное множество $A_\varepsilon \subset l_p$, такое что для всех n

$$Q_n(p,\theta)(A_\varepsilon) = \mathbf{P}_\theta\big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) \in A_\varepsilon\big\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Проверим сходимость конечномерных распределений. На основании теоремы Крамера–Волда достаточно доказать, что для любого вектора $(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbf{R}^N$ распределение случайной величины

$$Z_{nN} = \sum_k^N t_k \left(\frac{\nu_n(k) - n\,\theta(k)}{\sqrt{n}}\right)$$

сходится к распределению случайной величины

$$Z_N = \sum_k^N t_k\, \xi_k\, \sqrt{\theta(k)\,(1-\theta(k))}.$$

Последняя случайная величина имеет нормальное распределение со средним ноль и дисперсией

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|Z_N|^2 &= \sum_{k,l=1}^N t_k\, t_l\, \mathbf{E}\,\xi_k\,\xi_l\, \sqrt{\theta(k)\,\theta(l)\,(1-\theta(k))\,(1-\theta(l))}\\ &= \sum_{k=1}^N t_k^2\, \theta(k)\,(1-\theta(k)) - \sum_{k\neq l} t_k\, t_l\, \theta(k)\,\theta(l).\end{aligned}$$

Положим

$$z_{jk} = \begin{cases} 1-\theta(k), & \text{если } X_j = k,\\ -\,\theta(k), & \text{если } X_j \neq k.\end{cases} \tag{2.2}$$

Заметим, что векторы $(z_{j1}, z_{j2}, \dots)$, $j = 1, 2, \dots, n$, независимы. Запишем случайные величины Z_{nN} в виде

$$Z_{nN} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N\, t_k\, z_{jk}.$$

В силу центральной предельной теоремы (в форме Леви), распределения Z_{nN} сходятся к нормальному распределению со средним ноль и дисперсией, равной

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big|\sum_{k=1}^{N} t_k\, z_{1k}\Big|^2 &= \sum_{k=1}^{N} t_k^2\, \mathbf{E}\, z_{1k}^2 + \sum_{k\neq l} t_k\, t_l\, \mathbf{E}\, z_{1k}\, z_{1l} \\ &= \sum_{k=1}^{N} t_k^2 \theta(k)\,(1-\theta(k)) - \sum_{k\neq l} t_k\, t_l\, \theta(k)\,\theta(l) = \mathbf{E}\,|z_N|^2.\end{aligned}$$

Сходимость конечномерных распределений доказана.

Обратимся к доказательству плотности семейства распределений $\{Q_n(p,\theta)\}$. Напомним, что множество $A = \big\{x : x = (x_1, x_2, \ldots)\big\} \subset l_p$ компактно в l_p, $0 < p < \infty$, если

(1) множество A ограничено в l_p;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое N, такое что $\sum\limits_{N}^{\infty} |x_j|^p \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in A$.

Множество A компактно в c_0, если

(1) множество A ограничено в l_∞;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется целое N, такое что $\sup\limits_{j\geqslant N} |x_j| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in A$.

Рассмотрим по отдельности три случая: $0 < p < 2$, $2 \leqslant p < \infty$ и $p = \infty$.

Пусть сперва $0 < p < 2$. Определим последовательность целых чисел $N_r \nearrow \infty$ соотношениями

$$N_r = \Big\{\min N : \sum_{N}^{\infty} (\theta(k))^{p/2} < 2^{-2r}\Big\}.$$

Определим множества $A(m) \subset l_p$ равенствами

$$A(m) = \Big\{x : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \leqslant M,\ \sum_{j=N_r}^{\infty} |x_j|^p \leqslant 2^{-r},\ r \geqslant m\Big\},$$

$$M = 2^m \sum_{k}^{\infty} |\theta(k)|^{p/2}.$$

Множества $A(m)$ – компактные подмножества l_p. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_\theta\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}-\theta)\notin A(m)\}\\ &\leqslant \mathbf{P}_\theta\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}>M\Big\}\\ &+\sum_{r=m}^{\infty}\mathbf{P}_\theta\Big\{\sum_{N_r}^{\infty}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}>2^{-r}\Big\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

По неравенству Чебышева

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_\theta\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}>T\Big\}\\ &\leqslant\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_\theta\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}.\end{aligned}$$

Кроме того, так как $p<2$,

$$\mathbf{E}_\theta\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p\leqslant\ \mathbf{E}_\theta^{p/2}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^2\leqslant 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\theta\Big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}-\theta)\notin A(m)\Big\}&\leqslant\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(k)^{p/2}+\sum_{r=m}^{\infty}2^r\sum_{k=N_r}^{\infty}\theta(k)^{p/2}\\ &\leqslant\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\theta(k)^{p/2}+\sum_{r=m}^{\infty}2^{-r}\leqslant 2^{-m+2}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, для всех n

$$Q_n(p,\theta)\,(A(m))=\mathbf{P}_\theta\big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}-\theta)\in A(m)\big\}\geqslant 1-2^{-m+2}$$

и плотность семейства распределений $\{Q_n\}$ установлена.

Пусть теперь $2\leqslant p<\infty$. Определим теперь числа $N_r\nearrow\infty$ неравенствами

$$N_r=\Big\{\min N:\sum_{k=N}^{\infty}\theta(k)\leqslant 2^{-2r}\Big\} \tag{2.5}$$

и рассмотрим множества $A(m)\subset l_p$, определяемые соотношениями

$$A(m)=\Big\{x\in l_p:\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\leqslant 2^m,\ \sum_{j=N_r}^{\infty}|x_j|^p\leqslant 2^{-r},\quad r=m,m+1,\dots\Big\}.$$

Множества $A(m)$ – компактные подмножества l_p. Заметим, что неравенство (2.3) по-прежнему выполняется (только числа N_r теперь определяются соотношением (2.5)). Для оценки вероятностей в (2.3) нам понадобится следующий вариант неравенства Розенталя (см. [4]).

Лемма 2.1. *Пусть ξ_j – независимые одинаково распределенные величины с $\mathbf{E}\,|\xi_j|^p < \infty$, $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $p \geqslant 2$. Тогда*

$$\mathbf{E}\,\Big|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big|^p \leqslant c(p)\,n^{p/2}\,\mathbf{E}\,|\xi_1|^p, \tag{2.6}$$

где постоянная $c(p)$ зависит только от p.

В терминах z_{jk}, см. (2.2),

$$\nu_n(k) - n\,\theta = \sum_{j=1}^{n} z_{jk}$$

и, в силу неравенства (2.6),

$$\mathbf{E}_\theta\,\Big|\frac{\nu_n(k) - n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^p \leqslant c(p)\,\frac{\mathbf{E}\,\big|z_{jk}\big|^p}{\theta(k)\,(1-\theta(k))} \leqslant \frac{c(p)\,\theta(k)}{\theta(k)\,(1-\theta(k))}.$$

Рассуждая теперь как при выводе неравенства (2.4), мы найдем, что

$$\mathbf{P}_\theta\big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta} - \theta) \notin A(m)\big\} \leqslant c(p)\,2^{-m} + \sum_{r=m}^{\infty} 2^r \sum_{k=N_r}^{\infty} c(p)\,\theta(k) \leqslant c(p)\,2^{-m+2}$$

и потому для всех m

$$Q_n(p,\theta)\,(A(m)) \geqslant 1 - c(p)\,2^{-m+2}.$$

Плотность семейства $\{Q_n(p,\theta)\}$ доказана.

Пусть теперь $p = \infty$. Определим числа N_r исходя из соотношения

$$N_r = \Big\{\min N : \sum_{k=N}^{\infty} \theta(k) \leqslant 2^{-2r}\Big\}. \tag{2.7}$$

Положим

$$A(m) = \{x = (x_1, x_2, \dots) : \sup_j |x_j| \leqslant 2^{m/2},\ \sup_{j \geqslant N_r} |x_j| \leqslant 2^{-r/2},\ r \geqslant m\}.$$

Множества $A(m)$ – компактные подмножества c_0.

$$\mathbf{P}_\theta\big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) \notin A(m)\big\} \leqslant \mathbf{P}_\theta\Big\{\max_k \Big|\frac{\nu_n(k) - n\,\theta(k)}{\sqrt{n}}\Big| > 2^m\Big\}$$

$$+\sum_{r=m}^{\infty}\mathbf{P}_\theta\Big\{\max_{k\geqslant N_r}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n}}\Big|>2^{-r/2}\Big\}.$$

В силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}_\theta\Big\{\Big(\max_{k\geqslant T}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n}}\Big|\Big)^2>A^2\Big\}$$

$$\leqslant\mathbf{P}_\theta\Big\{\sum_{k=T}^{\infty}\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^2\theta(k)\,(1-\theta(k))>A^2\Big\}$$

$$\leqslant\frac{1}{A^2}\sum_{k=T}^{\infty}\mathbf{E}_\theta\Big|\frac{\nu_n(k)-n\,\theta(k)}{\sqrt{n\,\theta(k)\,(1-\theta(k))}}\Big|^2\theta(k)\,(1-\theta(k))\leqslant\frac{1}{A^2}\sum_{k=T}^{\infty}\theta(k).$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_\theta\big\{\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n-\theta))\notin A(m)\big\}\leqslant 2^{-2m}+\sum_{r=m}^{\infty}2^r\sum_{k=N_r}^{\infty}\theta(k)$$

$$\leqslant 2^{-2m}+2^{-m+1}\leqslant 2^{-m+2}.$$

Следовательно, для всех m

$$Q_n(\infty,\theta)\,(A(m))\geqslant 1-2^{-m+2}$$

и плотность семейства $\{Q_n(\infty,\theta)\}$ доказана. □

§3. Функции риска

Пусть l – неотрицательная монотонно неубывающая функция на $[0,\infty)$. В этом разделе мы предполагаем, не оговаривая это каждый раз, что $p\geqslant 1$. Рассмотрим функции риска вида

$$R_n(l,p,\theta)=\mathbf{E}_\theta\,l\big(\sqrt{n}\,\|\widehat{\theta}_n-\theta\|_p\big),$$

$$R_n(l,\infty,\theta)=\mathbf{E}_\theta\,l\big(\sqrt{n}\,\|\widehat{\theta}_n-\theta\|_\infty\big).$$

Теорема 3.1. *Пусть функция $l(x)$ такова, что при всех достаточно больших x выполняется неравенство $l(x)\leqslant e^{\lambda_0 x^2}$, где λ_0 – постоянная, вид которой будет указан ниже. Если $\sum_{k=1}^{\infty}\theta(k)^{p/2}$ сходится, то при $n\to\infty$*

$$\mathbf{E}_\theta\,l\big(\sqrt{N}\,\|\widehat{\theta}_n-\theta\|_p\big)\to\mathbf{E}_\theta\,l\big(\|\xi\|_p\big).\tag{3.1}$$

где случайная гауссовская последовательность ξ определена в (2.1).

Доказательство. Если l – ограниченная монотонная функция, то соотношение (3.1) непосредственно следует из теорем предыдущего раздела. Поэтому, чтобы доказать теорему 3.1, достаточно установить равномерную интегрируемость случайной величины

$$\exp\left\{\lambda_0\, n\, \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_p^2\right\}.$$

В свою очередь, поскольку

$$\mathbf{E}\, e^{\lambda n \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_p^2} = \sum_l^{\infty} \frac{\lambda^l\, n^l}{l!}\, \mathbf{E}\, \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_p^{2l},$$

нам достаточно будет доказать, что при всех n

$$n^l\, \mathbf{E}\, \|\widehat{\theta}_n - \theta\|_p^{2l} \leqslant c^l\, l!, \tag{3.2}$$

где постоянная c не зависит от n. Именно это неравенство мы и доказываем ниже. Мы рассмотрим отдельно два случая: $p \geqslant 2$ и $p < 2$.

Начнем с доказательства (3.2) в случае, когда $p \geqslant 2$. На самом деле, поскольку $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ для $q > p \geqslant 2$, достаточно ограничиться случаем $p = 2$, что и предполагается ниже в этом пункте доказательства. Имея в виду это предположение, мы всюду вместо $\|\cdot\|_2$ пишем далее $\|\cdot\|$. Нам будет удобнее иметь дело не с последовательностью $\xi_n = \sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta)$, а с ее симметризованной версией $\xi_n - \xi_n'$, где ξ_n' – независимая копия ξ_n. Мы построим эту независимую копию следующим образом. Пусть случайные величины

$$\xi_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = k, \\ 0, & \text{если } x_j \neq k, \end{cases}$$

так что

$$\xi_n = \sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n - \theta) = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\xi_{j1} - \theta(1)), \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\xi_{jk} - \theta(k)), \dots\Big).$$

Пусть $\left\{\xi_{jk}',\ j = 1, \dots, n,\ k = 1, 2, \dots\right\}$ – независимая копия $\{\xi_{jk}\}$. Положим

$$\xi_n' = \Big(\dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\xi_{jk}' - \theta(k)), \dots\Big).$$

Таким образом симметризованная версия

$$w_n = \xi_n - \xi_n' = \Big(\dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\xi_{jk} - \xi_{jk}'), \dots\Big).$$

Ниже вместо того, чтобы оценивать $\mathbf{E}\,\|\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n-\theta)\|^{2l}$, мы будем оценивать $\mathbf{E}\,\|w_n\|^{2l}$. Основанием для такой замены служит следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $f(x)$ – определенная на l_2 неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше функция с неотрицательной второй производной $f''(x)$ (последнее означает, что для всех $x,h\in l_2$ выполняется неравенство $(f''(x)\,h,\,h)\geqslant 0$). Пусть $\xi=(\xi_1,\dots)$, $\eta=(\eta_1,\dots)$ – независимые случайные последовательности из l_2, такие что $\mathbf{E}\,\|\xi\|<\infty$ и $\mathbf{E}\,\eta=0$. Тогда*

$$\mathbf{E}\,f(\xi)\leqslant\mathbf{E}\,f(\xi+\eta). \tag{3.3}$$

В частности, если $a\geqslant 2$, то

$$\mathbf{E}\,\|\xi\|^a\leqslant\mathbf{E}\,\|\xi+\eta\|^a. \tag{3.4}$$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x+h)=f(x)+(f'(x),h)+\frac{1}{2}(f''(\widetilde{x})\,h,\,h)\geqslant f(x)+(f'(x),h).$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\,f(\xi+\eta)\geqslant\mathbf{E}\,f(\xi)+\mathbf{E}\,(f'(\xi),\eta).$$

Из независимости ξ и η следует, что

$$\mathbf{E}\,(f'(\xi),\eta)=(\mathbf{E}\,f'(\xi),\mathbf{E}\,\eta)=0.$$

Лемма доказана. $\square$

Из (3.4) следует, что

$$\mathbf{E}\,\|\sqrt{n}\,(\widehat{\theta}_n-\theta)\|^{2l}\leqslant\mathbf{E}\,\|w_n\|^{2l}.$$

Положим $w_n=(w_{n1},\dots,w_{nk},\dots)$, где

$$w_{nk}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\xi_{jk}-\xi'_{jk}).$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\|w_n\|^{2l}=\sum_{k_1+\dots+k_r+\dots=l}\mathbf{E}\,(w_{n1}^{2k_1}\,w_{n2}^{2k_2}\cdots w_{nr}^{2k_r}\cdots)=s_1+s_2+\dots+s_l.$$

Здесь s_a означает сумму $\sum \mathbf{E}\,(w_{n1}^{2k_1}\ldots)$, где суммирование распространено на такие последовательности $(k_1, k_2, \ldots)$, что $\sum k_j = l$ и ровно a из k_j отличны от нуля. Так

$$s_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\, w_{nj}^{2l},$$

$$s_2 = \sum_{j_1, j_2 = 1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 > 0 \\ k_2 > 0 \\ k_1 + k_2 = l}} \mathbf{E}\, w_{nj_1}^{2k_1} w_{nj_2}^{2k_2}$$

и т.д. Для оценки s_1 воспользуемся следующим вариантом неравенства Розенталя.

Лемма 3.2. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные симметричные случайные величины, $\mathbf{E}\,\xi^{2l} < \infty$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\Big|^{2l} \leqslant n^l\, \frac{2l!}{2^l\, l!}\, \mathbf{E}\,|\xi_1|^{2l} \leqslant n^l\, 2^l\, l!\, \mathbf{E}\,|\xi_1|^{2l}.$$

Доказательство. В силу симметрии, все нечетные моменты

$$\mathbf{E}\,\xi_j^{2k+1} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\Big|^{2l} &= \sum_{l_1 + \cdots + l_n = l} \frac{2l!}{2l_1! \cdots 2l_n!} \mathbf{E}\,\xi_1^{2l_1} \cdots \mathbf{E}\,\xi_n^{2l_n} \\
&\leqslant \sum_{l_1 + \cdots l_n = l} \frac{2l!}{2l_1! \cdots 2l_n!} \mathbf{E}^{\frac{2l_1}{2l}}\,\xi_1^{2l} \cdots \mathbf{E}^{\frac{2l_n}{2l}}\,\xi_n^{2l} \\
&= \frac{2l!}{l!} \mathbf{E}\,\xi_1^{2l} \sum_{l_1 + \cdots + l_n = l} \frac{l!}{l_1! \cdots l_n!}\, \frac{l_1! \cdots l_n!}{2l_1! \cdots 2l_n!} \\
&\leqslant \frac{2l!}{2^l\, l!}\, \mathbf{E}\,\xi_1^{2l} \sum_{l_1 + \cdots + l_n = l} \frac{l!}{l_1! \cdots l_n!} = \frac{2l!}{2^l\, l!}\, n^l\, \mathbf{E}\,\xi_1^{2l}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

В силу леммы 3.2,

$$\mathbf{E}\, w_{nj}^{2l} \leqslant \frac{2l!}{2^l\, l!}\, \mathbf{E}\,|\xi_{1j} - \xi_{1j}^{'}|^{2l} \leqslant \frac{2l!}{2^l\, l!} \cdot 2\,\theta(j)\,(1 - \theta(j)),$$

так что

$$s_1 \leqslant 2\,\frac{2l!}{2^l\,l!}\sum\theta(j) \leqslant 2\,\frac{2l!}{2^l\,l!}.$$

Оценим теперь сумму s_2. Эта сумма состоит из слагаемых вида $\mathbf{E}\,w_{nj}^{2k}\,w_{ni}^{2m}$, причем $j \neq i$, $k > 0$, $m > 0$, $k+m = l$. Заметим, что произведения $\xi_{rj}\,\xi_{ri}$ и $\xi_{rj}'\,\xi_{ri}'$ равны нулю. Поэтому математическое ожидание

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,(\xi_{rj}-\xi_{rj}')^k\,(\xi_{ri}-\xi_{ri}')^m &= (-1)^m\mathbf{E}\,\xi_{1j}^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^m + (-1)^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1j}^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^m\\ &= \mathbf{E}\,\xi_{1j}^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^m\big((-1)^k+(-1)^m\big)\\ &= \begin{cases}2\,(-1)^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1j}^k\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^m, & \text{если } k+m>0 \text{ – четное},\\ 0, & \text{если } k+m>0 \text{ – нечетное}.\end{cases}\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,w_{nj}^{2k}\,w_{ni}^{2m} &= n^{-l}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2k\\ m_1+\cdots+m_n=2m}}\frac{2k!}{k_1!\cdots k_n!}\,\frac{2m!}{m_1!\cdots m_n!}\,\mathbf{E}\,\big((\xi_{1j}-\xi_{1j}')^{k_1}\\ &\qquad\cdots(\xi_{nj}-\xi_{nj}')^{k_n}\,(\xi_{1i}-\xi_{1i}')^{m_1}\cdots(\xi_{ni}-\xi_{ni}')^{m_n}\big)\\ &\leqslant n^{-l}\sum\frac{2k!}{k_1!\cdots k_n!}\,\frac{2m!}{m_1!\cdots m_n!}\,2^{2l}\,\mathbf{E}\,\xi_{1j}^{k_1}\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^{m_1}\cdots\mathbf{E}\,\xi_{1j}^{k_n}\,\mathbf{E}\,\xi_{1i}^{m_n}\end{aligned}$$

и суммирование в последней сумме ведется по всем $k_i \geqslant 0$, $m_i \geqslant 0$, таким что $\sum k_i = 2\,k$, $\sum m_i = 2\,m$, $k_i + m_i$ четно. Из последнего соотношения следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,w_{nj}^{2k}\,w_{ni}^{2m} &\leqslant n^{-l}\,\frac{2k!\,2m!}{2\,(m+k)!}\,2^l\\ &\qquad\times\sum_{l_1+\cdots+l_n=l}\Big(\frac{2l!}{2l_1!\cdots 2l_n!}\prod_{r=1}^{n}\frac{(k_r+m_r)!}{k_r!\,m_r!}\Big)\,\theta(i)\,\theta(j).\end{aligned}$$

Далее, для всех целых m, k

$$1 \leqslant \frac{(m+k)!}{k!\,m!} = \binom{m+k}{k} \leqslant 2^{m+k}$$

и потому

$$\mathbf{E}\,w_{nj}^{2k}\,w_{ni}^{2m} \leqslant 2^l\,n^{-l}\,\frac{2l!}{l!}\,2^l\,\theta(i)\,\theta(j)\sum\frac{l!}{l_1!\cdots l_n!} = 2^{2l}\,\frac{2l!}{l!}\,\theta(i)\,\theta(j).$$

Отсюда окончательно находим, что

$$s_2 = \sum_{i,j,m+k=l} \mathbf{E}\, w_{nj}^{2k} w_{ni}^{2m} \leqslant 2^{2l} \frac{2l!}{l!} \binom{l-1}{1} \sum_{i,j} \theta(i)\,\theta(j) = 2^{2l} \frac{2l!}{l!} \binom{l-1}{1}. \tag{3.5}$$

Перейдем теперь к оценке s_k с $k \geqslant 3$. Заметим сперва, что если i, j, k, m, l, r – целые положительные числа, причем числа i, j, k все различны, то произведение $(\xi_{ti} - \xi_{ti}^{'})^m (\xi_{tj} - \xi_{tj}^{'})^l (\xi_{tk} - \xi_{tk}^{'})^r = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}\left((\xi_{ti_1} - \xi_{ti_1}^{'})^{m_1} \cdots (\xi_{ti_r} - \xi_{ti_r}^{'})^{m_r}\right),$$

$r \geqslant 3$, i_j различны, отлично от нуля лишь если в ряде чисел $m_1, \ldots, m_r$ не более, чем два отличны от нуля, а сумма $m_1 + \cdots + m_r$ четна. Поэтому, для $r \geqslant 3$ и $k_1 > 0, \ldots, k_r > 0$, $k_1 + \cdots + k_r = l$, справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, w_{nj_1}^{2k_1} \cdots w_{nj_r}^{2k_r} = n^{-l} \sum \frac{2k_1!}{k_{11}! \cdots k_{1n}!} \cdots \frac{2k_r!}{k_{r1}! \cdots k_{rn}!} \\ \times \mathbf{E}\, \xi_{1j_1}^{k_{11}} \cdots \mathbf{E}\, \xi_{1j_1}^{k_{1n}} \cdots \mathbf{E}\, \xi_{1j_r}^{k_{r1}} \cdots \mathbf{E}\, \xi_{1j_r}^{k_{rn}},\end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем неотрицательным наборам целых чисел, таким что

- $k_{a1} + k_{a2} + \cdots + k_{an} = k_a$;
- среди чисел $k_{1l}, k_{2l}, \ldots, k_{rl}$ имеется не более двух положительных;
- число $k_{1l} + \cdots + k_{rl}$ четно.

Рассуждая далее как при выводе неравенства (3.6), придем к неравенству

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, w_{nj_1}^{2k_1} \cdots w_{nj_r}^{2k_r} \leqslant n^{-l}\, 2^l\, \frac{2k_1! \cdots 2k_r!}{(2k_1 + 2k_2 + \cdots + 2k_r)!} \\ \times \sum_{l_1 + \cdots + l_n = l} \Bigl(\frac{2l!}{2l_1! \cdots 2l_n!} \prod_{m=1}^{n} \frac{(k_{1m} + \cdots + k_{rm})!}{k_{1m}! \cdots k_{rm}!}\Bigr).\end{aligned}$$

Поскольку среди чисел $k_{1m}, \ldots k_{rm}$ не более двух отлично от нуля, то

$$\frac{(k_{1m} + \cdots + k_{rm})!}{k_{1m}! \cdots k_{rm}!} \leqslant 2^{k_{1m} + \cdots + k_{rm}}.$$

В итоге получаем

$$\mathbf{E}\, w_{nj_1}^{2k_1} \cdots w_{nj_r}^{2k_r} \leqslant 2^{2l}\, \frac{2l!}{l!}\, \theta(j_1) \cdots \theta(j_r)$$

и, следовательно,

$$s_r \leqslant 2^{2l}\,\frac{2l!}{l!}\binom{l-1}{r-1}\sum \theta(j_1)\cdots\theta(j_r) \leqslant 2^{2l}\,\frac{2l!}{l!}\binom{l-1}{r-1},$$

а

$$\mathbf{E}\,\|w_n\|^{2l} = s_1 + \cdots + s_l \leqslant 2^{3l}\,\frac{2l!}{l!}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\,e^{\lambda\|w_n\|^2} \leqslant \sum \frac{(8\,\lambda)^l}{l!}\,\frac{2l!}{l!} \leqslant \sum (16\,\lambda)^l = \frac{1}{1-16\,\lambda}.$$

И для всех $\lambda < \frac{1}{16}$ случайные величины $e^{\lambda\|w_n\|^2}$ равномерно интегрируемы. Итак, все доказано, если $p \geqslant 2$.

Пусть теперь $1 \leqslant p < 2$. Как и в предыдущем случае рассмотрим симметризованные величины

$$w_n = (w_{n1}, w_{n2}, \ldots) = \xi_n - \xi_n^{'}$$

и покажем, что для любого целого $l \geqslant 1$

$$\mathbf{E}\,\|\xi_n\|_p^{2lp} \leqslant \mathbf{E}\,\|w_n\|_p^{2lp}.$$

Заметим сперва, что если $x, h \in l_p$, а t вещественно, то $\phi(t) = \|x+th\|_p^p$ есть выпуклая функция аргумента t. Далее, если $f(\,\cdot\,), \phi(\,\cdot\,)$ – выпуклые функции вещественного аргумента, то функция $f(\phi(t))$ – выпуклая функция t. В частности если $l \geqslant 1$, то $\psi(t) = \|x+th\|_p^{2lp}$ – выпуклая функция t.

Если $\psi(t)$ – выпуклая функция t, то $\psi'(t)$ возрастает и

$$\psi(t+h) - \psi(t) = \int_t^{t+h} \psi'(s)\,ds > h\,\psi'(t).$$

Применяя это неравенство к функции $\psi(t) = \|x+th\|_p^{2lp}$, найдем

$$\|x+h\|_p^{2lp} - \|x\|_p^{2lp} > 2\,l\,\|x\|_p^{(2l-1)p} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p\,|x_i|^{p-1}\mathrm{sign}(x_i)\cdot h_i.$$

В частности,

$$\begin{aligned}\|w_n\|_p^{2lp} = \|\xi_n - \xi_n^{'}\|_p^{2lp} > \|\xi_n - \mathbf{E}\,\xi_n\|_p^{2lp} \\ + \; 2\,l\,\|\xi_n - \mathbf{E}\,\xi_n\|_p^{(2l-1)p} \sum_{k=1}^{\infty}\Big\{n^{-p/2}\,p\,\Big|\sum_{j=1}^{n}(\xi_{jk} - \theta(k))\Big|^{p-1} \\ \times\; \mathrm{sign}\Big(\sum_{j=1}^{n}(\xi_{jk} - \theta(k))\Big)\sum_{j=1}^{n}(\xi_{jk}^{'} - \theta(k))\Big\}.\end{aligned}$$

Беря математическое ожидание от обеих частей последнего соотношения, придем к искомому неравенству

$$\mathbf{E}\,\|\xi_n - \mathbf{E}\,\xi_n\|_p^{2lp} \leqslant \mathbf{E}\,\|w_n\|_p^{2lp}. \tag{3.6}$$

Как и выше,

$$\mathbf{E}\,\|w_n\|_p^{2lp} = s_1 + s_2 + \dots + s_l,$$

где на этот раз

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{l=1}^{\infty}\mathbf{E}\,|w_{nj}|^{2lp}, \\ s_2 &= \sum_{j_1,j_2=1}^{\infty}\ \sum_{\substack{k_1>0,\\ k_2>0,\\ k_1+k_2=l}}\mathbf{E}\,|w_{nj_1}|^{2k_1p}\,|w_{nj_2}|^{2k_2p}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Выше мы доказали, что

$$\mathbf{E}\,\big(w_{nj_1}^{2k_1}\dots w_{nj_r}^{2k_r}\big) \leqslant 2^{2l}\,\frac{2l!}{l!}\,\theta(j_1)\cdots\theta(j_r).$$

Отсюда следует, что составляющие s_r слагаемые в свою очередь удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\big(|w_{nj_1}|^{2k_1p}\cdots|w_{nj_t}|^{2k_rp}\big) \leqslant \mathbf{E}^{\,p/2}\big(|w_{nj_1}|^{4k_1}\cdots|w_{nj_r}|^{4k_r}\big) \\ \leqslant 2^{2pl}\Big(\frac{4l!}{2l!}\Big)^{p/2}(\theta(j_1))^{p/2}\cdots(\theta(j_r))^{p/2}.\end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\sum_{j}^{\infty}(\theta(j))^{p/2} = A < \infty$$

и потому

$$\mathbf{E}\,\|w_p\|_p^{2lp} \leqslant 2^{pl}\Big(\frac{4l!}{2l!}\Big)^{p/2}(A+1)^l,$$
$$\mathbf{E}\,\|w_p\|_p^{2l} \leqslant 2^{l}\Big(\frac{4l!}{2l!}\Big)^{1/2}(A+1)^{l/p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,e^{\lambda\|w_n\|_p^2} &\leqslant \sum \frac{2\,(A+1)^{1/p}\lambda}{l!}\Big(\frac{4l!}{2l!}\Big)^{1/2}\\ &= \sum \big(2\,(A+1)^{1/p}\lambda\big)^l\Big(\frac{2l!}{l!\,l!}\Big)^{1/2}\Big(\frac{4l!}{2l!\,2l!}\Big)^{1/2}\\ &\leqslant \sum \big(16\,(A+1)^{1/p}\lambda\big)^l = \frac{1}{1-16\,(A+1)^{1/p}\lambda},\end{aligned}$$

если $\lambda < \frac{1}{16\,(A+1)^{1/p}}$. Теорема доказана. □

В качестве следствия теоремы мы немедленно получаем следующее обобщение равенства У. Гренандера (1.2): если $1 \leqslant p < \infty$ и ряд $\sum_k(\theta(k))^{p/2}$ сходится, то

$$\begin{aligned}\lim_n\ \mathbf{E}_\theta\,\|\widehat{\theta}_n-\theta\|^p &= \mathbf{E}\,|\zeta|^p\sum_k\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2^{\frac{p-1}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)\sum_k\big(\theta(k)\,(1-\theta(k))\big)^{p/2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Здесь ζ – стандартная нормальная случайная величина. Нетрудно показать, что равенство (3.7) остается в силе и для $p < 1$.

Пользуясь методами гл. II монографии [3], можно доказать что оценки $\widehat{\theta}_n$ являются асимптотически эффективными в смысле [3].

Авторы выражают благодарность А. Ю. Зайцеву за ряд полезных замечаний.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М., 1977.
2. U. Grenander, *Abstract Inference.* Wiley, New York, 1981.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Асимптотическая теория оценивания.* Наука, М., 1979.
4. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1987.
5. R. Hasminskii, I. Ibragimov, *On density estimation in the view of Kolmogorov's ideas in approximation theory.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 999–1010.

Ershov V. A., Ibragimov I. A. On a problem of estimation of an infinite-dimensional parameter.

Let X be a random variable taking the positive integer values and let $\mathbf{P}\{X = k\} = \theta(k)$. We consider the problem of estimation of the parameter $\theta = (\theta(1), \theta(2), \dots)$ on the base of the sample $X_1, X_2, \dots X_n$ where the observations X_j are independent copies of X.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия

Поступило 18 ноября 2015 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru