Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2015 г.

А. Н. Бородин

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

В работе продолжено изучение класса гипергеометрических диффузий начатое в [1]. Преобразование Лапласа по времени переходной плотности (функция Грина) гипергеометрической диффузии выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса. При определенном выборе параметров частными случаями этой функции являются функции Бесселя, функции параболического цилиндра, функции Куммера. В связи с этим, гипергеометрическая диффузия обобщает такие диффузионные процессы как бесселевские процессы, отраженный процесс Орнштейна–Уленбека и радиальный процесс Орнштейна–Уленбека. Подробное описание класса специальных диффузий можно найти в [2, гл. IV, §16]. Основная проблема, касающаяся общей гипергеометрической диффузии, состоит в том, что не удается обратить преобразование Лапласа по времени переходной плотности, т.е. выразить эту плотность в явном виде. В [1] рассмотрен широкий подкласс гипергеометрических диффузий, который составляют так называемые гиперболические бесселевские процессы. Для этих процессов удается выразить переходную плотность в определенном смысле явно. Для гиперболического бесселевского процесса, исходящего из нуля переходная плотность была вычислена в [3]. Такое название процесса оправдано тем, что в определение его производящего оператора входит гиперболический котангенс, и для предельного значения параметров этот процесс превращается в бесселевский. Функция Грина гиперболического бесселевского процесса выражается через функции Лежандра.

В настоящей работе рассмотрен еще один широкий подкласс гипергеометрических диффузий, для которых удается выразить переходную плотность в определенном смысле явно. Последнее означает, что для определяющего процесс параметра переходная плотность

Ключевые слова: случайные процессы, процесс Орнштейна–Уленбека, гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами НШ 2504.2014.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

задается явно, если этот параметр лежит в определенном интервале. Для других параметрических зон плотность выражается рекуррентно через явный вид плотности, соответствующей первоначальному интервалу. Процессы из этого подкласса естественно назвать отраженными гиперболическими процессами Орнштейна–Уленбека. Название связано с тем, что в определение производящего оператора входит гиперболический тангенс, и для предельного значения параметра этот процесс превращается в отраженный процесс Орнштейна–Уленбека. Естественно сразу рассмотреть гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека, определенный на всей прямой. Отраженный процесс равен модулю от этого процесса, поскольку гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека имеет те же конечномерные распределения, что и этот же процесс со знаком минус.

1. Специальные функции и их свойства. Рассмотрим специальные функции, через которые выражаются функции Грина диффузионных процессов. Сведения о различных свойствах специальных функций можно найти в [4–6], а также в [7, приложении 2].

Гипергеометрическая функция Гаусса при $-1 < x < 1$ определяется следующим рядом

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)x^k}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)k!}.$$

Функция Лежандра первого рода при $-1 < x < 1$ задается равенством

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{\mu/2} F\Big(-\nu, 1+\nu, 1-\mu, \frac{1-x}{2}\Big), \quad \operatorname{Re}\mu < 1.$$

Функции $\widetilde{P}_\nu^\mu(x)$ и $\widetilde{P}_\nu^\mu(-x)$, $|x| < 1$, являются линейно независимыми решениями уравнения Лежандра

$$(1-x^2)Y''(x) - 2xY'(x) + \Big(\nu(1+\nu) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\Big)Y(x) = 0.$$

Отсюда нетрудно вывести, что функции

$$\psi_\nu(x) = \operatorname{ch}^\nu(\theta x)\,\widetilde{P}_\nu^\mu(-\operatorname{th}(\theta x)),$$
$$\varphi_\nu(x) = \operatorname{ch}^\nu(\theta x)\,\widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta x))$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$\frac{1}{2}Z''(x) - \nu\theta\operatorname{th}(\theta x)\,Z'(x) - \frac{\theta^2}{2}(\mu^2-\nu^2)\,Z(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (1.1)$$

Вронскиан этих решений имеет следующее выражение:

$$w\big(\psi_\nu(x), \varphi_\nu(x)\big) = \frac{2\,\theta\,\mathrm{ch}^{2\nu}(\theta x)}{\Gamma(-\mu-\nu)\,\Gamma(1-\mu+\nu)}. \tag{1.2}$$

Отметим некоторые свойства функции Лежандра $\widetilde{P}_\nu^\mu$. Справедливы формулы

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(x) = \widetilde{P}_{-\nu-1}^\mu(x), \tag{1.3}$$

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(0) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^\mu}{\Gamma((1-\nu-\mu)/2)\,\Gamma((2+\nu-\mu)/2)}, \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx}\widetilde{P}_\nu^\mu(x)\Big|_{x=0} = (\mu+\nu)\widetilde{P}_{\nu-1}^\mu(0), \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)^{(\nu+1)/2}\widetilde{P}_\nu^\mu(x)\big) = (\mu-\nu-1)(1-x^2)^{(\nu-1)/2}\widetilde{P}_{\nu+1}^\mu(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dx}\big((1-x^2)^{-\nu/2}\widetilde{P}_\nu^\mu(x)\big) = (\mu+\nu)(1-x^2)^{-1-\nu/2}\widetilde{P}_{\nu-1}^\mu(x). \tag{1.7}$$

При $-1 < x < 1$, $\mathrm{Re}\,\mu < \mathrm{Re}(-\nu) < 1$ справедливо интегральное представление:

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(x) = \frac{2^{-\nu}(1-x^2)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\nu-\mu)\,\Gamma(1+\nu)}\int\limits_0^\infty (x+\mathrm{ch}\,t)^{\mu-\nu-1}\,\mathrm{sh}^{1+2\nu}\,t\,dt. \tag{1.8}$$

Рассмотрим функции $\varphi_\nu(x)$ и $\psi_\nu(x)$, $x \in \mathbf{R}$. В силу (1.6), (1.7), справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx}\frac{\widetilde{P}_\nu^\mu(\mathrm{th}\,x)}{\mathrm{ch}^{\nu+1}\,x} = (\mu-\nu-1)\frac{\widetilde{P}_{\nu+1}^\mu(\mathrm{th}\,x)}{\mathrm{ch}^{\nu+1}\,x}, \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dx}\big(\mathrm{ch}^\nu\,x\,\widetilde{P}_\nu^\mu(\mathrm{th}\,x)\big) = (\mu+\nu)\,\mathrm{ch}^\nu\,x\,\widetilde{P}_{\nu-1}^\mu(\mathrm{th}\,x). \tag{1.10}$$

При $-1 < x < 1$, $\mathrm{Re}(\mu+\nu) < 0$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$ справедливо интегральное представление

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(\mathrm{th}\,x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(1+\nu)\,\mathrm{ch}^\nu\,x}\int_x^\infty e^{u\mu}(\mathrm{sh}\,u-\mathrm{sh}\,x)^\nu du. \tag{1.11}$$

Действительно, из (1.8) имеем

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(\mathrm{th}\,x) = \frac{2^{-\nu}\,\mathrm{ch}^{\nu+1}\,x}{\Gamma(-\nu-\mu)\,\Gamma(1+\nu)}\int\limits_0^\infty (\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,t)^{\mu-\nu-1}\,\mathrm{sh}^{1+2\nu}\,t\,dt.$$

Делая замену переменных $e^u = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \operatorname{ch} t$ $\bigl(\operatorname{sh} t\, dt = \frac{e^u\, du}{\operatorname{ch} x}\bigr)$, из этого интегрального представления выводим

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th} x) = \frac{2^{-\nu} \operatorname{ch}^\nu x}{\Gamma(-\nu-\mu)\,\Gamma(1+\nu)} \int\limits_x^\infty e^{u(\mu-\nu)} \Bigl(\frac{2e^u(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x}\Bigr)^\nu\, du,$$

что совпадает с (1.11). Из (1.3) получаем другое интегральное представление:

при $-1 < x < 1$, $\operatorname{Re}(1-\mu+\nu) > 0$, $\operatorname{Re}\nu < 0$

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th} x) = \frac{\operatorname{ch}^{\nu+1} x}{\Gamma(1+\nu-\mu)\,\Gamma(-\nu)} \int\limits_x^\infty e^{u\mu}(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} x)^{-\nu-1}\, du. \tag{1.12}$$

Частные случаи решений уравнения (1.1): $\varphi_0(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} e^{\mu\theta x}$, $\varphi_{-1}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)\operatorname{ch}(\theta x)} e^{\mu\theta x}$. При $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$\varphi_n(x) = \frac{n!\, \operatorname{ch}^n(\theta x)}{\Gamma(1-\mu+n)} e^{\mu\theta x} P_n^{(-\mu,\mu)}(\operatorname{th}(\theta x)),$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ – полиномы Якоби. Частные случаи: $P_0^{(-\mu,\mu)}(z) = 1$, $P_1^{(-\mu,\mu)}(z) = z - \mu$, $P_2^{(-\mu,\mu)}(z) = \frac{1}{2}(\mu^2 - 1 + 3z(z-\mu))$.

Выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{\nu\to\infty} 2^\nu\, \Gamma(1+\alpha+\nu)\, \widetilde{P}_\nu^{-2\alpha-\nu}\Bigl(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\Bigr) = 2^{-\alpha} D_{-2\alpha}(x\sqrt{2}), \tag{1.13}$$

где $D_{-\rho}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – функция параболического цилиндра

$$\begin{aligned} D_{-\rho}(x) &:= e^{-x2/4} 2^{-\rho/2} \sqrt{\pi} \\ &\times \Bigl\{ \frac{1}{\Gamma(\rho+1)/2)} \Bigl(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{\rho(\rho+2)\cdots(\rho+2k-2)}{(2k)!} x^{2k}\Bigr) \\ &- \frac{x\sqrt{2}}{\Gamma(\rho/2)} \Bigl(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\rho+1)(\rho+3)\cdots(\rho+2k-1)}{(2k+1)!} x^{2k}\Bigr) \Bigr\}. \end{aligned}$$

Докажем (1.13). Согласно Бейтман, Эрдейи [6], формула 3.4(11),

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{\mu/2} 2^{-\mu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \widetilde{P}_\nu^\mu(x) &= \frac{F\bigl(-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(1-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\bigr)} \\ &- \frac{2\,x\,F\bigl(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}, 1-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, x^2\bigr)}{\Gamma\bigl(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}\bigr)\,\Gamma\bigl(-\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}\bigr)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Кроме того, воспользуемся формулами

$$\frac{\Gamma(b+\nu)}{\Gamma(\nu)} \underset{\nu\to\infty}{\sim} \nu^b, \tag{1.15}$$

и

$$\lim_{\beta\to\infty} F\Big(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{\beta}\Big) = M(\alpha,\gamma,x), \tag{1.16}$$

где $M(\alpha,\gamma,x)$ – функция Куммера,

$$M(\alpha,\gamma,x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)x^k}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)k!}.$$

Тогда, применяя (1.14)–(1.16), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{2^{-2\alpha-\nu}\sqrt{\pi}}\Big(1-\frac{x^2}{\nu}\Big)^{-\alpha-\nu/2}\widetilde{P}_{\nu}^{-2\alpha-\nu}\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\Big)\\
&\underset{\nu\to\infty}{\sim} \frac{F\big(\alpha,\frac12+\alpha+\nu,\frac12,\frac{x^2}{\nu}\big)}{\Gamma\big(\frac12+\alpha\big)} - \frac{2x}{\sqrt{\nu}}(\alpha+\nu)^{1/2}\frac{F\big(\frac12+\alpha,1+\alpha+\nu,\frac32,\frac{x^2}{\nu}\big)}{\Gamma(\alpha)}\\
&\underset{\nu\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\bigg(\frac{\Gamma\big(\frac12\big)M\big(\alpha,\frac12,x^2\big)}{\Gamma\big(\frac12+\alpha\big)} + \frac{x\,\Gamma\big(-\frac12\big)M\big(\frac12+\alpha,\frac32,x^2\big)}{\Gamma(\alpha)}\bigg)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}U\big(\alpha,1/2,x^2\big),
\end{aligned}$$

где $U(\alpha,\gamma,x)$ – вторая функция Куммера. Поскольку частное значение этой функции при $\gamma=1/2$ имеет вид

$$U(\alpha,1/2,x^2) = 2^{\alpha}e^{x^2/2}D_{-2\alpha}(x\sqrt{2}),$$

мы получаем (1.13).

2. Гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека. Этот процесс (обозначим его $U_\theta^{(\nu)}(t)$), $t\geqslant 0$, $\nu\geqslant -1$, $\theta>0$, имеет производящий оператор следующего вида

$$\mathbb{L}f(x) = \frac12\,\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \nu\theta\,\mathrm{th}(\theta x)\,\frac{d}{dx}f(x), \quad x\in\mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Пространством состояний этого процесса служит вся прямая. При $\nu=\gamma/\theta^2$ и $\theta\downarrow 0$ процесс в пределе превращается в процесс Орнштейна–Уленбека с производящим оператором

$$\mathbb{L}_0 f(x) = \frac12\,\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \gamma x\,\frac{d}{dx}f(x).$$

При $\lambda := \frac{1}{2}\theta^2(\mu^2-\nu^2) > 0$ уравнение (1.1) принимает вид

$$\mathbb{L}\phi(x) = \lambda\phi(x), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2.2}$$

Выберем $\mu = -\sqrt{\nu^2+2\lambda/\theta^2}$. Тогда $-\mu+\nu > 0$ и $\mu+\nu < 0$, поэтому из (1.11) следует, что $\varphi_\nu(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$, при $\nu > -1$. Из (1.10) следует, что $\frac{d}{dx}\varphi_\nu(x) < 0$, поскольку, в силу (1.12), $\widetilde{P}^{\mu}_{\nu-1}(\operatorname{th} x) > 0$ даже при $-1 < \nu < 0$. В результате имеем, что $\varphi_\nu(x)$ является неотрицательной строго убывающей функцией, и функции $\varphi_\nu(x)$ и $\psi_\nu(x) = \varphi_\nu(-x)$, $x \in \mathbf{R}$, являются фундаментальными решениями уравнения (2.2). Через эти решения выражается функция Грина, отвечающая оператору $\mathbb{L}$, и, согласно (11.6) [1, гл. IV], имеем

$$\begin{aligned} G^{\mu}_{\nu}(x,z) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(U^{(\nu)}_\theta(t) < z)\,dt \\ &= \frac{\Gamma(1-\mu+\nu)\Gamma(-\mu-\nu)}{\theta\operatorname{ch}^{\nu}(\theta z)\operatorname{ch}^{-\nu}(\theta x)}\begin{cases}\widetilde{P}^{\mu}_{\nu}(\operatorname{th}(\theta z))\,\widetilde{P}^{\mu}_{\nu}(-\operatorname{th}(\theta x)), & x \leqslant z,\\ \widetilde{P}^{\mu}_{\nu}(\operatorname{th}(\theta x))\,\widetilde{P}^{\mu}_{\nu}(-\operatorname{th}(\theta z)), & z \leqslant x.\end{cases} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $G^{\mu}_{\nu}(x,z)$ (см. (11.7) [1, гл. IV]) – функция Грина переходной плотности гиперболического процесса Орнштейна–Уленбека относительно меры Лебега. Пусть $p^{\theta}_{\nu}(t,x,z) := \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(U^{(\nu)}_\theta(t) < z)$ – соответствующая переходная плотность гиперболического процесса Орнштейна–Уленбека относительно меры Лебега и $\tilde{p}^{\theta}_{\nu}(t,x,z)$ – относительно меры скорости с плотностью $m_\nu(z) = \frac{2}{\operatorname{ch}^{2\nu}(\theta z)}$. Важно, что в этом случае переходная плотность $\tilde{p}^{\theta}_{\nu}(t,x,z)$ симметрична относительно переменных x, z и ее достаточно выразить только при $x \leqslant z$. Имеем

$$p^{\theta}_{\nu}(t,x,z)\frac{1}{m_\nu(z)} = \tilde{p}^{\theta}_{\nu}(t,x,z) = \frac{1}{m_\nu(z)}\mathcal{L}^{-1}_{\lambda}\bigl(G^{\mu}_{\nu}(x,z)\bigr),$$

где $\mathcal{L}^{-1}_{\lambda}$ – оператор обратного преобразования Лапласа по $\lambda > 0$.

Для критических значений $\nu = 0$ и $\nu = -1$ функция Грина имеет следующие выражения: $G^{\mu}_{0}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda}}$ и

$$G^{\mu}_{-1}(x,z) = \frac{\operatorname{ch}(\theta z)}{\operatorname{ch}(\theta x)\sqrt{\theta^2+2\lambda}}\,e^{-|x-z|\sqrt{\theta^2+2\lambda}}.$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа по λ от функции

$$e^{\mu\theta r} = \exp\bigl(-r\sqrt{\nu^2\theta^2+2\lambda}\bigr)$$

(см. приложение 3 из [2], формулы a и 2), получаем

$$\mathcal{L}_\lambda^{-1}\left(e^{\mu\theta r}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}}\,r\,e^{-\nu^2\theta^2 t/2}\,e^{-r^2/2t}.$$

Используя интегральные представления (1.11) и (1.12), выводим из (2.3), что при $-1<\nu<0$ и $x\leqslant z$

$$\begin{aligned} p_\nu^\theta(t,x,z)&=\tilde p_\nu^\theta(t,x,z)\frac{2}{\operatorname{ch}^{2\nu}(\theta z)}=\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(U_\theta^{(\nu)}(t)<z) \qquad (2.4)\\ &=\frac{\theta\sin(-\pi\nu)\operatorname{ch}(\theta z)\,e^{-\nu^2\theta^2 t/2}}{\sqrt{2}(\pi t)^{3/2}}\\ &\times\int_{-x}^{\infty}du\int_z^{\infty}dv(u+v)\,e^{-(u+v)^2)/2t}\frac{(\operatorname{sh}(\theta u)+\operatorname{sh}(\theta x))^\nu}{(\operatorname{sh}(\theta v)-\operatorname{sh}(\theta z))^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Значения $\nu=-1$ и $\nu=0$ являются критическими точками. Точка $\nu=0$ соответствует броуновскому движению, а $\nu=-1$ соответствует гиперболическому процессу Орнштейна–Уленбека с переходной плотностью

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(U_\theta^{(-1)}(t)<z)=\frac{\operatorname{ch}(\theta z)}{\operatorname{ch}(\theta x)\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\theta^2 t/2-(z-x)^2/2t}. \qquad (2.5)$$

При $\nu\in(k,k+1]$, $k=0,1,\dots$, выражение для переходной плотности может быть вычислено следующим способом.

Из (2.3) следует, что при $x\leqslant z$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\frac{G_\nu^\mu(x,z)}{\operatorname{ch}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\nu+1}(\theta x)}\\ &=\frac{\Gamma(1-\mu+\nu)\Gamma(-\mu-\nu)}{\theta}\frac{d}{dz}\frac{\widetilde P_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta z))}{\operatorname{ch}^{\nu+1}(\theta z)}\frac{d}{dx}\frac{\widetilde P_\nu^\mu(-\operatorname{th}(\theta x))}{\operatorname{ch}^{\nu+1}(\theta x)}. \end{aligned}$$

Далее индекс ν в обозначении μ_ν указывает на то, что μ зависит от ν. Применяя (1.9), получаем

$$\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\frac{G_\nu^{\mu_\nu}(x,z)}{\operatorname{ch}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\nu+1}(\theta x)}=-\frac{\theta^2(\mu_\nu^2-(\nu+1)^2)}{\operatorname{ch}^{2\nu+2}(\theta x)}\,G_{\nu+1}^{\mu_\nu}(x,z).$$

Применяя к этому равенству обратное преобразование Лапласа по λ, имеем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\operatorname{ch}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\nu+1}(\theta x)}\,\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big(G_\nu^{\mu_\nu}(x,z)\big)\Big)\\&=-\frac{\theta^2}{\operatorname{ch}^{2\nu+2}(\theta x)}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big((\mu_\nu^2-(\nu+1)^2)\,G_{\nu+1}^{\mu_\nu}(x,z)\big).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Поскольку $\nu^2=(\nu+1)^2-2\,\nu-1$, то согласно стандартным формулам для обратного преобразования Лапласа (см., например, [2], формулы a и e приложения 3)

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big((\mu_\nu^2-(\nu+1)^2)G_{\nu+1}^{\mu_\nu}(x,z)\big)\\&=e^{(2\nu+1)\theta^2t/2}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\big((\mu_{\nu+1}^2-(\nu+1)^2)G_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}}(x,z)\big)\\&=e^{(2\nu+1)\theta^2t/2}\mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{2\lambda}{\theta^2}G_{\nu+1}^{\mu_{\nu+1}}(x,z)\Big)\\&=\frac{2\,e^{(2\nu+1)\theta^2t/2}}{\theta^2}\Big(\frac{d}{dt}p_{\nu+1}^\theta(t,x,z)+p_{\nu+1}^\theta(0+,x,z)\,\delta_0(t)\Big),\end{aligned}$$

где $\delta_0(t)$ – дельта-функция Дирака.

Подставляя это выражение в (2.6), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\operatorname{ch}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\nu+1}(\theta x)}\,p_\nu^\theta(t,x,z)\Big)\\&=-\frac{2\,e^{(2\nu+1)\theta^2t/2}}{\operatorname{ch}^{2\nu+2}(\theta x)}\Big(\frac{d}{dt}p_{\nu+1}^\theta(t,x,z)+p_{\nu+1}^\theta(0+,x,z)\delta_0(t)\Big).\end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по t, окончательно имеем

$$\frac{p_{\nu+1}^\theta(t,x,z)}{\operatorname{ch}^{2\nu+2}(\theta x)}=-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(2\nu+1)\theta^2s/2}\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\frac{p_\nu^\theta(s,x,z)}{\operatorname{ch}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\nu+1}(\theta x)}\,ds.\tag{2.7}$$

Рекуррентная формула (2.7) позволяет вычислять выражения для переходной плотности гиперболического процесса Орнштейна–Уленбека для ν из интервала $(k,k+1]$, $k=0,1,\dots$, используя соответствующие выражения для интервала $(-1,0]$ (см. (2.4)).

Проиллюстрируем формулу (2.7) для $\nu = -1$. Согласно (2.5) правая часть (2.7) в этом случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_0^t e^{\theta^2 s/2}\frac{d}{dz}\frac{d}{dx}\Big(e^{-\theta^2 s/2}\frac{e^{-(z-x)^2/2s}}{\sqrt{2\pi s}}\Big)\,ds\\
&=\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dx}\frac{(z-x)\,e^{-(z-x)^2/2s}}{\sqrt{2\pi}\,s^{3/2}}\,ds\\
&=\frac{d}{dx}\int_{z-x}^{\infty}\frac{e^{-v^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}\,dt=\frac{e^{-(z-x)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}=p_0^{\theta}(t,x,z),
\end{aligned}
$$

что соответствует переходной плотности при $\nu = 0$.

Отраженный гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека имеет вид $|U_\theta^{(\nu)}(t)|$, $t \geqslant 0$. Область значений этого процесса – неотрицательная полуось. Производящий оператор определяется формулой (2.1) и задается в области $x > 0$. Область определения производящего оператора состоит из ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций f, заданных на интервале $(0,\infty)$ и удовлетворяющих граничному условию $f'(0+) = 0$.

Функция Грина, отвечающая отраженному гиперболическому процессу Орнштейна–Уленбека,

$$
|G|_\theta^\nu(x,z) := \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(|U_\theta^{(\nu)}(\tau)| < z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(|U_\theta^{(\nu)}(t)| < z)\,dt,
$$

при $0 \leqslant x \leqslant z$ имеет вид

$$
\frac{\Gamma(1-\mu+\nu)\Gamma(-\mu-\nu)}{\theta\operatorname{ch}^\nu(\theta z)\operatorname{ch}^{-\nu}(\theta x)}\,\widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta z))\big(\widetilde{P}_\nu^\mu(-\operatorname{th}(\theta x)) + \widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta x))\big),
$$

при $0 \leqslant z \leqslant x$ имеет вид

$$
\frac{\Gamma(1-\mu+\nu)\Gamma(-\mu-\nu)}{\theta\operatorname{ch}^\nu(\theta z)\operatorname{ch}^{-\nu}(\theta x)}\,\widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta x))\big(\widetilde{P}_\nu^\mu(-\operatorname{th}(\theta z)) + \widetilde{P}_\nu^\mu(\operatorname{th}(\theta z))\big).
$$

Переходная плотность отраженного гиперболического процесса Орнштейна–Уленбека относительно меры Лебега выражается через плотность $p_\nu^\theta(t,x,z)$ неотраженного процесса по формуле

$$
|p|_\nu^\theta(t,x,z) = p_\nu^\theta(t,x,z) + p_\nu^\theta(t,x,-z), \qquad x,z \in [0,\infty).
$$

3. Предельное поведение гиперболического процесса Орнштейна–Уленбека. Как мы уже отмечали, при $\nu = \frac{\gamma}{\theta^2}$ и $\theta \downarrow 0$ процесс

$U_\theta^{(\nu)}(t)$, $t \geqslant 0$, в пределе превращается в процесс Орнштейна–Уленбека $U(t)$. Убедимся в этом, изучая предельное поведение функции Грина. Достаточно рассмотреть случай $x \leqslant z$, поскольку плотность меры скорости удовлетворяет соотношению

$$m_{\gamma/\theta^2}(z) = \frac{2}{\operatorname{ch}^{2\gamma/\theta^2}(\theta z)} \underset{\theta\downarrow 0}{\sim} 2\Big(1+\frac{1}{2}\theta^2 z^2\Big)^{-2\gamma/\theta^2} \underset{\theta\downarrow 0}{\sim} 2e^{-\gamma z^2}, \qquad (2.8)$$

а относительно меры скорости функция Грина симметрична.

Имеем

$$\mu = -\frac{\gamma}{\theta^2}\sqrt{1+2\,\lambda\,\theta^2/\gamma^2} \underset{\theta\downarrow 0}{\sim} -\frac{\gamma}{\theta^2} - \frac{\lambda}{\gamma} = -2\,\alpha - \nu,$$

где $\alpha := \frac{\lambda}{2\gamma}$. Применяя формулу удвоения аргумента для гамма-функции $\big(\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\,\Gamma\big(x+\frac{1}{2}\big)\big)$ и (1.15), получаем

$$\Gamma(1-\mu+\nu)\,\Gamma(-\mu-\nu) \underset{\theta\downarrow 0}{\sim} \Gamma(1+2\alpha+2\gamma/\theta^2)\,\Gamma(2\alpha)$$

$$\underset{\theta\downarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(2\alpha)\,2^{2\alpha+2\gamma/\theta^2}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\alpha+1/2+\gamma/\theta^2)\,\Gamma(1+\alpha+\gamma/\theta^2)$$

$$\underset{\theta\downarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(2\alpha)\,2^{2\alpha}\theta}{\sqrt{\gamma\pi}}\Big(2^{\gamma/\theta^2}\Gamma(1+\alpha+\gamma/\theta^2)\Big)^2 = \frac{\Gamma(2\alpha)\,2^{2\alpha}\theta}{\sqrt{\gamma\pi}}2^{2\nu}\Gamma^2(1+\alpha+\nu).$$

Применяя (2.3) при $x \leqslant z$, (2.8) и (1.13), имеем

$$G_\nu^\mu(x,z) \underset{\theta\downarrow 0}{\sim} \frac{2^{2\alpha+2\nu}\,\Gamma^2(1+\alpha+\nu)\Gamma(2\alpha)\,e^{\gamma(x^2-z^2)/2}}{\sqrt{\gamma\pi}}$$

$$\times\,\widetilde{P}_\nu^{-2\alpha-\nu}\Big(\frac{z\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\nu}}\Big)\widetilde{P}_\nu^{-2\alpha-\nu}\Big(-\frac{x\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\nu}}\Big)$$

$$\underset{\theta\downarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(\lambda/\gamma)e^{\gamma(x^2-z^2)/2}}{\sqrt{\gamma\pi}}D_{\lambda/\gamma}(z\sqrt{2\gamma})\,D_{\lambda/\gamma}(-x\sqrt{2\gamma}).$$

Правая часть этой формулы является (см. [2, гл. VI, §16]) функцией Грина процесса Орнштейна–Уленбека с параметром γ относительно меры Лебега. В [2] приведена симметричная функция Грина относительно меры скорости процесса.

Литература

1. А. Н. Бородин, *Гипергеометрическая диффузия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 29–44.
2. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Лань, С.-Петербург, 2013.

3. J.-C. Gruet, *Windings of hyperbolic Brownian motion.* — In: Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion, Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1997, pp. 35–42.
4. Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения.* Физ.-мат.-лит., Москва, 1963.
5. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* М., Наука, 1979.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2, Наука, М. 1974.
7. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, Second edition, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2002.

Borodin A. N. Hyperbolic Ornstein–Uhlenbeck process.

The the paper we continue the investigation of the class of hypergeometric diffusions started in [1]. The wide subclass of these diffusions consists of hyperbolic Ornstein–Uhlenbeck processes. An explicit formula for the transition density of the hyperbolic Ornstein–Uhlenbeck process is derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 15 октября 2015 г.