Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

О. М. Фоменко

О СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ДЕДЕКИНДА

Новые продвижения в проблеме Чандрасекхарана и Нарасимхана о среднем квадратичном остаточного члена в асимптотическом распределении целых идеалов поля алгебраических чисел.

§1. Введение, результаты

Пусть K_n – поле алгебраических чисел степени $n = [K_n : \mathbb{Q}]$, $n \geqslant 2$; $n = r_1 + 2r_2$, где r_1 – число вещественных сопряженных, $2r_2$ – число невещественных сопряженных поля K_n. Дзета-функция Дедекинда поля K_n задается посредством

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идет по всем целым ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$ в K_n, $s = \sigma + it$. Очевидно,

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k, K_n)}{n^s},$$

где $d(k, K_n)$ – количество целых идеалов в K_n нормы k. Известно, что $\zeta_{K_n}(s)$ – мероморфная функция во всей комплексной плоскости с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом, скажем, Λ_n. Она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{\zeta_{K_n}(1-s)}{B^{1-s}} \Delta(1-s) = \frac{\zeta_{K_n}(s)}{B^s} \Delta(s),$$

где

$$\Delta(s) := \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}, B := 2^{r_2} \pi^{\frac{n}{2}} |\Delta|^{-\frac{1}{2}},$$

Δ – дискриминант поля.

Ниже нам потребуется функиональное уравнение в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \zeta_{K_n}(1-s) = f(K_n, s) \zeta_{K_n}(s),$$

Ключевые слова: дзета-функция Дедекинда, распределение идеалов, средние значения.

где

$$f(K_n, s) := \frac{1}{2\pi i} B^{1-2s} \frac{\Delta(s)}{\Delta(1-s)} \zeta_{K_n}(s).$$

Пусть $r := r_1 + r_2 - 1$. Отметим, что $\zeta_{K_n}(s)$ не обращается в нуль в точке $s = 0$ при $r = 0$ и имеет в ней нуль r-го порядка при $r > 0$; в каждой отрицательной четной точке $\zeta_{K_n}(s)$ имеет нуль порядка $r + 1$; в каждой отрицательной нечетной точке при $r_2 = 0$ $\zeta_{K_n}(s)$ не обращается в нуль, а при $r_2 > 0$ имеет нуль порядка r_2.

Все это доказано в книге Ландау [1].

Представим

$$D(x, K_n) := \sum_{k \leqslant x} d(k, K_n)$$

в виде суммы главного и остаточного членов

$$D(x, K_n) =: M(x, K_n) + \Delta(x, K_n) = \Lambda_n x + \Delta(x, K_n).$$

По Ландау [1],

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1 - \frac{2}{n+1}}.$$

По поводу дальнейших улучшений этого результата и библиографии см. [2].

В настоящей работе мы интересуемся средним квадратичным

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 \, dy.$$

Предполагается, что

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 dy \sim C(K_n) \cdot x^{2 - \frac{1}{n}}.$$

Задачам такого рода специально посвящена работа Чандрасекхарана и Нарасимхана [3]. В ней была доказана асимптотика

$$\int_1^x \Delta(y, K_2)^2 \, dy = C(K_2) x^{3/2} + O(x \log^3 x), \tag{1.1}$$

где $C(K_2) > 0$, а для общего поля K_n, $n \geqslant 3$, доказана оценка сверху

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 \, dy \ll x^{3 - \frac{4}{n}} \log^n x. \tag{1.2}$$

С тех пор в этом направлении было получено мало результатов. Лау [4] снизил степень логарифма в (1.1) до $\log^2 x$, а в (1.2) – до $\log^{n-1} x$ (для $n = 3, 4$). Автор настоящей работы получил в [2, I] асимптотику

$$\int_1^x \Delta(y, K_3)^2\, dy = C(K_3)x^{5/3} + O(x^{8/5+\varepsilon}), C(K_3) > 0,$$

в случае поля K_3 с группой Галуа C_3, а в работе [5] получил аналогичную асимптотику в случае поля K_3 с группой Галуа S_3 дискриминанта $\Delta < 0$.

В настоящей работе мы уточняем оценку (1.2) для полей K_4 и K_6. В §2 мы рассматриваем поле $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, где $m > 1$ свободно от квадратов, и находим почти правильный порядок величины $\int_1^x \Delta(y, K_4)^2 dy$. Точнее, мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем*

$$x^{\frac{7}{4}} \ll \int_1^x \Delta(y, K_4)^2\, dy \ll x^{\frac{7}{4}+\varepsilon}.$$

Следствие 1. *Пусть $\beta(K_n)$ – наименьшее число такое, что*

$$\frac{1}{x}\int_1^x \Delta(y, K_n)^2\, dy \ll x^{2\beta(K_n)+\varepsilon}$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Из теоремы 1 следует точное значение величины $\beta(K_4)$:

$$\beta(K_4) = \frac{3}{8}.$$

В §3 рассматривается поле K_6, нормальное замыкание поля K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3; Δ (дискриминант поля K_3) < 0. Доказывается следующая

Теорема 2. *При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем*

$$x^{\frac{11}{6}} \ll \int_1^x \Delta(y, K_6)^2\, dy \ll x^{2+\varepsilon}.$$

Следствие 2.

$$\frac{5}{12} \leqslant \beta(K_6) \leqslant \frac{1}{2}.$$

§2. Доказательство теоремы 1

2.1. Граница снизу. В настоящем пункте доказывается утверждение: для всех $x \geqslant 2$ имеем

$$\int_1^x \Delta(y, K_4)^2\, dy \gg x^{\frac{7}{4}}. \tag{2.1}$$

В доказательстве используются соображения из [6, ч. I] (см. также [7]) вместе с вычислениями из работы [8].

Пусть C_j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ – ориентированная ломаная с вершинами в точках

$$-i\infty, -i, j + \frac{3}{2} - i, j + \frac{3}{2} + i, i, i\infty;$$

$$I_{K_4,j}(n, x) := \int_{C_j} x^{j+1-s} \cdot n^{-s} f(K_4, s) \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(j+2-s)}\, ds,$$

где $x > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Приведем несколько вспомогательных результатов, используемых ниже; доказательства сходных фактов см. в [6, I] и [7].

1) Пусть $N \geqslant 0$, целое $h \geqslant 2$ и $\min(x, x + hy) > 0$. Тогда

$$\int_0^y \dots \int_0^y \Delta(x + y_1 + \dots + y_h, K_4)\, dy_1 \dots dy_h$$

$$= \sum_{n \leqslant N} d(n, K_4) \int_0^y \dots \int_0^y I_{K_{4,0}}(n, x + y_1 + \dots + y_n) dy_1 \dots dy_h$$

$$+ \sum_{l=0}^{h} (-1)^{h-l} \binom{h}{l} \sum_{n > N} d(n, K_4) I_{K_4,h}(n, x + ly).$$

2) При $j = 0, 1, 2, \dots$ и $\min(u, u + y) > 0$ имеем

$$\int_0^y I_{K_4 j}(n, u + y_1) dy_1 = I_{K_4,j+1}(n, u + y) - I_{K_4,j+1}(n, u).$$

3) Справедливо соотношение

$$I_{K_4,j}(n,x) = b_j \frac{x^{\frac{3}{4}j+\frac{3}{8}}}{n^{\frac{1}{4}j+\frac{5}{8}}} \cos\left(8\pi\left(\frac{xn}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{j}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}j+\frac{1}{8}}}{n^{\frac{1}{4}j+\frac{7}{8}}}\right) \quad (n=1,2,3,\dots),$$

где b_j зависит от j, $|\Delta|$, O-константа зависит от j, $|\Delta|$.

Переходим непосредственно к доказательству неравенства (2.1). Пусть $x \leqslant X \leqslant 2x$, $1 \leqslant u \leqslant x$, целое $h \geqslant 2$. Используя вспомогательные результаты 1)–3), имеем

$$\int\limits_0^u \left\{ \int\limits_0^y \dots \int\limits_0^y \Delta(X + y_1 + \dots + y_h, K_4)\, dy_1 \dots dy_h \right\} dy$$

$$= \int\limits_0^u \left\{ \sum_{l=0}^{h} (-1)^{h-l} \binom{h}{l} \sum_{n=1}^{\infty} d(n,K_4) I_{K_4,h}(h, X+ly) \right\} dy$$

$$= u\left\{ (-1)^h I_{K_4,h}(1,X) + (-1)^h \sum_{n=2}^{\infty} d(n,K_4) I_{K_4,h}(n,X) \right\}$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{(-1)^{h-l}}{l} \binom{h}{l} \sum_{n=1}^{\infty} d(n,K_4) \left\{ I_{K_4,h}(n, X+lu) - I_{K_4,h+1}(n,X) \right\}$$

$$\geqslant u\left\{ (-1)^h b_h X^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}h} \cos\left(2\pi\left(\frac{X}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\pi}{2}h - \frac{\pi}{4}\right) \right.$$

$$\left. - b_h X^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}h} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d(n,K_4)}{n^{5/8+(1/4)h}} + O\left(x^{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}h}\right) \right\}$$

$$- \left\{ \sum_{l=1}^{h} \binom{h}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n,K_4)}{n^{(1/4)(h+1)} 2b_{h+1}} (X+lu)^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}(h+1)} \right.$$

$$\left. + O\left(x^{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}(h+1)}\right) \right\}$$

$$\geqslant X^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}(h+1)} \left\{ \frac{u}{X^{3/4}} b_h \left[1 + (-1)^h \cos\left(8\pi\left(\frac{X}{|\Delta|}\right)^{1/4} - \frac{\pi}{2}h - \frac{\pi}{4}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \zeta_{K_4}\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}h\right) \right] - b_{h+1} \cdot 2^h \cdot 2 \cdot (h+1)^{h+1} \cdot \zeta_{K_4}\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{4}h\right) \right\}$$

$$+O\left(u\cdot x^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}h}\right)+O\left(x^{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}(h+1)}\right).$$

Для натурального m пусть X_m означает корень уравнения

$$8\left(\frac{X}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{h}{2}-\frac{1}{4}=m.$$

Тогда

$$4\left(\left(\frac{X_{m+2}}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(\frac{X_m}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=1,$$

$$\frac{X_{m+2}}{|\Delta|}-\frac{X_m}{|\Delta|}\ \sim\ \left(\frac{X_m}{|\Delta|}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

При $x\gg 1$ всегда найдется m с условием

$$x+1\leqslant\frac{X_m}{|\Delta|}<\frac{X_{m+1}}{|\Delta|}\leqslant x+2x^{\frac{3}{4}}.$$

Очевидно,

$$\cos\left\{8\pi\left(\frac{X_m}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{h\pi}{2}-\frac{1}{4}\pi\right\}=(-1)^m.$$

Пусть l – одно из чисел m, $m+1$, для которого

$$(-1)^h\cos\left\{8\pi\left(\frac{X_l}{|\Delta|}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{h\pi}{2}-\frac{1}{4}\pi\right\}=(-1)^h(-1)^l=1.$$

Возьмем $X=X_l$. Пусть $h\geqslant 2$ удовлетворяет условию

$$\zeta_{K_4}\left(\frac{5}{8}+\frac{h}{4}\right)<2.$$

Положим $u=c'x^{3/4}$, где $c'>0$ выбрано так, что

$$c'b_h\left\{2-\zeta_{K_4}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}h\right)\right\}>2^{h+1}b_{h+1}\cdot(h+1)^{h+1}\zeta_{K_4}\left(\frac{7}{8}+\frac{h}{4}\right).$$

Тем самым доказано неравенство

$$\int\limits_0^{c'x^{3/4}}\left\{\int\limits_0^y\dots\int\limits_0^y\Delta(X_l+y_1+\dots+y_h,K_4)dy_1\dots dy_h\right\}dy$$
$$\gg x^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}(h+1)}. \qquad (2.2)$$

Положим $\tilde{c} = hc' + 2|\Delta|$; посредством (2.2) получаем

$$x^{\frac{3}{8}+\frac{3}{4}(h+1)} \ll \int\limits_0^{\tilde{c}x^{3/4}} |\Delta(|\Delta|x + y_1, K_4)|dy_1$$

$$\times \int\limits_0^{c'x^{3/4}} \Big\{ \int\limits_0^y dy_2 \dots \int\limits_0^y dy_h \Big\} dy \ll x^{\frac{3}{4}h} \int\limits_{|\Delta|x}^{|\Delta|x+\tilde{c}x^{\frac{3}{4}}} |\Delta(y, K_4)|\, dy,$$

откуда следует

$$x^{\frac{9}{8}} \ll \int\limits_{|\Delta|x}^{|\Delta|x+\tilde{c}x^{3/4}} |\Delta(y, K_4)|dy.$$

При $X := |\Delta|x$, $\tilde{c}x^{3/4} = \tilde{\tilde{c}}X^{3/4}$ имеем поэтому

$$X^{9/8} \ll \int\limits_X^{X+\tilde{\tilde{c}}X^{3/4}} |\Delta(y, K_4)|\, dy,$$

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^x |\Delta(y, K_4)|dy \\ &\gg \sum_{j=0}^{[\frac{1}{2}\tilde{\tilde{c}}^{-1}x^{1/4}]} \int\limits_{x/2+j\tilde{\tilde{c}}x^{3/4}}^{x/2+(j+1)\tilde{\tilde{c}}x^{3/4}} |\Delta(y, K_4)|\, dy \\ &\gg x^{11/8}, \end{aligned}$$

если $x > x_1$, откуда при $x \geqslant 2$ следует неравенство

$$\int\limits_0^x |\Delta(y, K_4)|\, dy \gg x^{\frac{11}{8}}. \tag{2.3}$$

Используя теперь (2.3) и неравенство Коши, доказываем утверждение (2.1). $\square$

2.2. Граница сверху. В настоящем пункте доказывется утверждение: для всех $x \geqslant 1$ имеем

$$\int_1^x \Delta(y, K_4)^2\, dy \ll x^{\frac{7}{4}+\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Пусть $\sigma(K_n)$ – нижняя грань таких σ, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^T |\zeta_{K_n}(\sigma + it)|^2\, dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Известно [9], что $\sigma(K_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. Опираясь на метод Тонга [6, III], можно доказать следующую формулу:

$$\int_1^x \Delta(y, K_4)^2\, dy = C(K_4) \cdot x^{\frac{7}{4}} + R(x, K_4), \tag{2.5}$$

где

$$R(x, K_4) \ll x^{c+\varepsilon},$$
$$c = 2 - \frac{3 - 4\sigma(K_4)}{8(1 - \sigma(K_4)) - 1};$$

при этом требуется выполнение неравенства

$$\sigma(K_4) \leqslant \frac{5}{8}. \tag{2.6}$$

Ясно, что формулы (2.5) и (2.6) вместе дают границу (2.4). Если бы можно было получить улучшение $\sigma(K_4) \leqslant c < \frac{5}{8}$, то соотношение (2.4) заменилось бы асимптотикой. К сожалению, в настоящее время это невозможно. Наша цель – получение границы (2.4) на основе неравенства (2.6), причем мы не будем опираться на формулу (2.5), а поступим проще; об этом см. конец пункта.

Переходим к доказательству (2.6). Напомним, что $K_4 = \mathbb{Q}\sqrt[4]{m})$, где $m > 1$ – неквадрат; m_0 – бесквадратная часть числа m. Рассмотрим поля $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{m_0})$, $K_8 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$. K_8 – нормальное расширение над $\mathbb{Q}$ степени 8 с группой Галуа G, изоморфной диэдральной группе D_4 порядка 8. Воспользуемся результатами работы [10]. Пусть ψ – двумерное комплексное неприводимое представление группы G с кондуктором N (подробности см. в [10]). Вводим L -функцию Артина, ассоциированную с ψ:

$$L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

Функцию $\theta(\tau, K_8)$ определяем соотношением

$$\theta(\tau, K_8) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n, \quad q = \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau).$$

По теории Гекке–Вейля–Ленглендса, $\theta(\tau, K_8)$ является параболической формой (новой формой) веса 1 с характером $\varepsilon(n) = \left(\frac{-1}{n}\right)$ на конгруэнц-подгруппе $\Gamma_0(N)$. Как показано в [2, II], имеет место разложение

$$\zeta_{K_4}(s) = \zeta(s) \cdot L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right) \times L(s, K_8/\mathbb{Q}, \psi) \cdot U_1(s) \quad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right), \tag{2.7}$$

где $U_1(s)$ означает ряд Дирихле, который абсолютно сходится при $\sigma > \frac{1}{2}$.

Очевидно,

$$\zeta_{K_2}(s) = \zeta(s)\ L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right).$$

Нам необходимо показать, что при $\sigma > \frac{5}{8}$

$$\int_1^T |\zeta_{K_4}(\sigma + it)|^2\, dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Из (2.7) с применением неравенства Коши следует, что при $\sigma > \frac{5}{8}$

$$\int_1^T |\zeta_{K_4}(\sigma + it)|^2\, dt \ll \left\{ \int_1^T |\zeta_{K_2}(\sigma + it)|^4\, dt \right\}^{1/2} \times \left\{ \int_1^T |L(\sigma + it, K_8/\mathbb{Q}, \psi)|^4\, dt \right\}^{1/2}.$$

По Ивичу [11],

$$\int_1^T |L(\sigma + it, K_8/\mathbb{Q}, \psi)|^4\, dt \ll T^{1+\varepsilon} \quad \left(\sigma > \frac{5}{8}\right).$$

Поэтому нам достаточно получить оценку

$$\int_1^T |\zeta_{K_2}(\sigma+it)|^4\,dt \ll T^{1+\varepsilon} \quad \left(\sigma > \frac{5}{8}\right). \tag{2.8}$$

Для этого воспользуемся метдом Ивича [12]. Сначала введем некоторые обозначения из [12]. Пусть для $A \geqslant 4$ величина $M \geqslant 1$ определяется соотношением

$$\sum_{r\leqslant R} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_r\right)\right|^A \ll T^{M+\varepsilon}, \tag{2.9}$$

где вещественные числа $t_1,\dots,t_R$ такие, что

$$|t_r| \leqslant T, \quad r=1,\dots,R, \quad |t_r-t_s| \geqslant 1$$

для $r \neq s$ и $r,\ s \leqslant R$ и

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_r\right)\right| \geqslant V > 0$$

для $r=1,\dots,R$.

Из (2.9) выводится, что

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^A dt \ll T^{M+\varepsilon};$$

точная нижняя грань всех таких чисел M обозначается через $M(A)$. Отметим, что результаты $M(4)=1$ (Ингам, см. [13]) и $M(12) \leqslant 2$ (Хис–Браун [14]) являются классическими; Ингам доказал и асимптотику

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^4 dt = \frac{T\log^4 T}{2\pi^2} + O(T\log^3 T).$$

Сформулируем теперь аналогичные факты для $\zeta_{K_2}(s)$. Вводится сходная величина $M(A,K_2) \geqslant 1$. Известны оценка

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \ll T^{1+\varepsilon} \tag{2.10}$$

и (даже) асимптотика [15]

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = a_0 T(\log T)^2 + O(T\log T).$$

Тем самым, $M(2, K_2) = 1$. Можно также показать, что

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^6 dt \ll T^{2+\varepsilon}; \tag{2.11}$$

иначе говоря, $M(6, K_2) \leqslant 2$. Одним из способов доказатеьлства неравенств (2.10) и (2.11) является их вывод из соответствующих дискретных вариантов. Пусть $\{t_\nu\}$ — "хорошо распределенная" система чисел такая, что $T \leqslant t_\nu \leqslant 2T$, $|t_\mu - t_\nu| \geqslant 1$ для $\mu \neq \nu$. Тогда должны выполняться неравенства

$$\sum_\nu \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|^2 \ll T^{1+\varepsilon},$$

$$\sum_\nu \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|^6 \ll T^{2+\varepsilon}.$$

Поскольку

$$\zeta_{K_2}(s) = \zeta(s) L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right),$$

последние соотношения следуют соответственно из соотношений

$$\sum_\nu \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|^4 \ll T^{1+\varepsilon},$$

$$\sum_\nu \left|L\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right), \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right|^4 \ll T^{1+\varepsilon}$$

и

$$\sum_\nu \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right)\right|^{12} \ll T^{2+\varepsilon},$$

$$\sum_\nu \left|L\left(\frac{1}{2}+it_\nu\right), \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right|^{12} \ll T^{2+\varepsilon}.$$

Как уже отмечалось, неравенства с $\zeta(s)$ являются классическими (Ингам, Хис–Браун, Ивич); неравенства с $L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right)$ доказал Мюрман [16].

При получении (2.8) методом Ивича [12] нам удобно доказывать несколько более общий факт.

Предположим, что вещественные числа $t_1, \dots, t_R$ удовлетворяют условиям

$$\log^2 T \leqslant |t_r| \leqslant T \text{ для } r \leqslant R, \ |t_r - t_s| \geqslant \log^C T \text{ для } r \neq s \leqslant R, \quad (2.12)$$

$C \geqslant 0$ фиксировано,

$$|\zeta_{K_2}(\sigma + it_r)| \geqslant V > T^{\varepsilon}, \quad (2.13)$$

где $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ фиксировано. Граница сверху для R приведет к границам типа

$$\sum_{r \leqslant R} |\zeta_{K_2}(\sigma + it_r)|^m \ll T^{1+\varepsilon}, \quad (2.14)$$

если собрать $O(\log T)$ подсумм, где

$$V \leqslant |\zeta_{K_2}(\sigma + it_r)| < 2V.$$

Если выбрать t_r так, чтобы

$$|\zeta_{K_2}(\sigma + it_r)| = \max_{r \log^C T \leqslant t \leqslant (r+1) \log^C T} |\zeta_{K_2}(\sigma + it)|, \ r = 1, 2 \dots,$$

и затем рассмотреть отдельно t_1, $t_3, \dots$ и t_2, $t_4, \dots$, ясно, что (2.14) дает

$$\int_1^T |\zeta_{K_2}(\sigma + it)|^m \, dt \ll T^{1+\varepsilon}. \quad (2.15)$$

Нам достаточно доказать следующее утверждение:

если $m(\sigma, K_2)$ определяется как точная верхняя грань всех чисел m из (2.15), то

$$m(\sigma, K_2) \geqslant 2/(3 - 4\sigma) \quad (2.16)$$

для каждого фиксированного σ, $1/2 < \sigma \leqslant 5/8$.

Ниже в процессе доказательства (2.16) мы, следуя [12], в правой части $\ll$-неравенств для простоты опускаем множители $T^{\varepsilon} \log^C T$. Начнем с формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n, K_2) e^{-n/Y} n^{-s} = (2\pi i)^{-1} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^w \zeta_{K_2}(s + w) \Gamma(w) dw,$$

где $s = \sigma + it_r$, $1/2 < \sigma < 1$, $1 \ll Y \ll T^C$. Перенося линию интегрирования на $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2} - \sigma$, мы проходим простой полюс в точке $w = 1 - s$ с вычетом $O(1)$ и простой полюс в точке $w = 0$ с вычетом $\zeta_{K_2}(s)$. Таким образом,

$$\sum_{n \leqslant Y} d(n, K_2) e^{-n/Y} n^{-s} = \zeta_{K_2}(s) + O(1)$$
$$+ (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\operatorname{Re} w = 1/2 - \sigma} \zeta_{K_2}(s + w)\Gamma(w) Y^w \, dw.$$

Отсюда с использованием формулы Стирлинга для каждого $s = \sigma + it_r$, удовлетворяющего (2.12), имеем

$$\zeta_{K_2}(\sigma + it_r) \ll 1 + \left| \sum_{n \leq Y} d(n, K_2) e^{-n/Y} \cdot n^{-\sigma - it_r} \right|$$
$$+ \int\limits_{-\log^2 T}^{\log^2 T} \left| \zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2} + it_r + iv\right) \right| Y^{\frac{1}{2} - \sigma} e^{-|v|} \, dv.$$

В силу (2.13) это влечет либо

$$V \ll \left| \sum_{n \leqslant Y} d(n, K_2) e^{-n/Y} n^{-\sigma - it_r} \right|$$
$$\ll \log T \cdot \max_{M \leqslant Y/2} \left| \sum_{M < n \leqslant 2M} d(n, K_2) e^{-n/Y} n^{-\sigma - it_r} \right|, \tag{2.17}$$

либо

$$V \ll Y^{\frac{1}{2} - \sigma} \left| \zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2} + it_r'\right) \right|, \tag{2.18}$$

где

$$\left| \zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2} + it_r'\right) \right| = \max_{-\log^2 T \leqslant v \leqslant \log^2 T} \left| \zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2} + it_r + iv\right) \right|.$$

Здесь можно выбрать $Y = Y(r)$ как функцию от r.

Докажем, что

$$m(\sigma, K_2) \geqslant 2/(3 - 4\sigma)$$

для $1/2 < \sigma \leqslant 5/8$ (как отмечалось выше, это справедливо также для $\sigma = 1/2$).

Достаточно доказать

$$R \ll TV^{-2/(3-4\sigma)}.$$

Рассмотрим отдельно подмножества A и B множества $\{t_r\}$, так что $t_r \in A$, если V в (2.13) удовлетворяет неравенству $V \leqslant T^{(3-4\sigma)/4}$ и $t_r \in B$, если $V > T^{(3-4\sigma)/4}$. Если $R_1 = |A|$ и $R_2 = |B|$, то $R = R_1 + R_2$ и

$$\begin{aligned} R_1 \ll{} & Y_1^{2-2\sigma}V^{-2} + TV^{-2/(3-4\sigma)} \\ & + Y_1^{1/2-\sigma}V^{-1}\sum_{t_r \in A}\left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it_r'\right)\right|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из (2.17), (2.18) и леммы о больших значениях полиномов Дирихле [12, лемма 3.4]. При этом M ($M \leqslant Y/2 = Y_1/2$) выбирается в (2.17) таким образом, что $\gg R_1/\log T$ чисел $t_r \in A$ удовлетворяют (2.17) с этим особым M. Используя $M(2, K_2) = 1$ и неравенство Коши, имеем

$$R_1 \ll Y_1^{2-2\sigma}V^{-2} + TV^{-2/(3-4\sigma)} + TV^{-2}Y_1^{1-2\sigma},$$

и в силу неравенства $V \leqslant T^{(3-4\sigma)/4}$ выбор $Y_1 = T$ дает

$$R_1 \ll TV^{-2/(3-4\sigma)} + T^{2-2\sigma}V^{-2} \ll TV^{-2/(3-4\sigma)}. \tag{2.19}$$

Оценивая R_2, мы рассуждаем аналогично, но теперь применяется неравенство Гельдера. В результате имеем

$$\begin{aligned} R_2 \ll{} & Y_2^{2-2\sigma}V^{-2} + TV^{-2/(3-4\sigma)} \\ & + Y_2^{1/2-\sigma}V^{-1}R_2^{5/6}\left(\sum_{t_r \in B}\left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it_r'\right)\right|^6\right)^{1/6}, \end{aligned}$$

откуда, используя $M(6, K_2) \leqslant 2$, получаем

$$R_2 \ll Y_2^{2-2\sigma}V^{-2} + TV^{-2/(3-4\sigma)} + Y_2^{3-6\sigma}T^2V^{-6}. \tag{2.20}$$

Выбирая $Y_2 = T^{2/(4\sigma-1)}V^{-4/(4\sigma-1)} \gg 1$, имеем из (2.20), что

$$R_2 \ll TV^{-2/(3-4\sigma)} + T^{(4-4\sigma)/(4\sigma-1)}V^{-6/(4\sigma-1)}. \tag{2.21}$$

Второй член справа в (2.21) не превосходит первого, если

$$T^{(5-8\sigma)/(4\sigma-1)} \leqslant V^{4(5-8\sigma)/(4\sigma-1)(3-4\sigma)}.$$

Так как $1/2 < \sigma \leqslant 5/8$ и $V > T^{(3-4\sigma)/4}$, это выполняется и, таким образом, из (2.19) и (2.21) мы получаем

$$R = R_1 + R_2 \ll TV^{-2/(3-4\sigma)},$$

что эквивалентно утверждению (2.16); из этого утвеждения следует, в частности, оценка (2.8). Тем самым, мы доказали неравенство (2.6).

Остается вывести утверждение (2.4). Мы применим метод, заимствованный из доказательства [13, теорема 12.7] и использующий функциональное уравнение для $\zeta_{K_4}(s)$, неравенство (2.6) и выпуклость средних значений. Подробности см. в книге Титчмарша [13] и в статье автора [5, доказательство леммы 7].

Доказательство теоремы закончено. □

§3. Доказательство теоремы 2

Мы опускаем доказательство границы снизу

$$\int_1^x \Delta(y, K_6)^2\, dy \gg x^{\frac{11}{6}},$$

поскольку в нем используется та же схема, что и в случае (2.1), и основывается она на работах [6, 8].

Переходим к границе сверху: для всех $x \geqslant 1$ имеем

$$\int_1^x \Delta(y, K_6)^2\, dy \ll x^{2+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Основой доказательства служит неравенство

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_6}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt \ll T^{2+\varepsilon}, \tag{3.2}$$

т.е. (в понятных обозначениях)

$$M(2, K_6) \leqslant 2.$$

Доказательство оценки (3.2) опирается на разложение дзета-функции Дедекинда $\zeta_{K_6}(s)$. Рассмотрим кубическое поле K_3 над $\mathbb{Q}$ с группой Галуа S_3; дискриминантом поля K_3 является $\Delta = df^2$, где $d \neq 1$ бесквадратно. Нормальным замыканием такого поля K_3 является поле

$K_6 = K_3(\sqrt{\Delta})$ с группой Галуа $\mathrm{Gal}(K_6/\mathbb{Q}) = S_3$. Среди промежуточных полей между $\mathbb{Q}$ и K_6, наряду с полем K_3 и сопряженными с ним полями K_3', K_3'', имеется квадратичное поле $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Будем рассматривать случай $\Delta < 0$. Тогда, как показано в [17],

$$\zeta_{K_3}(w) = \zeta(s)L(s,F), \tag{3.3}$$

где $L(s,F)$ – L-функция Гекке голоморфной параболической собственной формы Гекке F веса 1 относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(|\Delta|)$. Из [18] с учетом (3.3) следует разложение

$$\zeta_{K_6}(s) = \zeta_{K_2}(s)L(s,F)^2. \tag{3.4}$$

Опираясь на (3.4) и неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_1^T \left|\zeta_{K_6}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \int_1^T \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it\right)^2 \cdot L(s,F)^4\right| dt \\
&\leqslant \left\{\int_1^T \left|\zeta_{K_2}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^6 dt\right\}^{1/3} \cdot \left\{\int_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,F\right)\right|^6 dt\right\}^{2/3} \\
&\ll (T^{2+\varepsilon})^{1/3} \cdot (T^{2+\varepsilon})^{2/3} \ll T^{2+\varepsilon},
\end{aligned}$$

где мы использовали (2.11) и известную оценку Ютилы [19]

$$\int_1^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,F\right)\right|^6 dt \ll T^{2+\varepsilon}.$$

Неравенство (3.2) доказано. Из (3.2) и свойств выпуклости средних значений сразу следует (3.1); по этому поводу см. [20, с. 360]. □

Литература

1. E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.* Leipzig, 1927.
2. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Дедекинда.* I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 184–197; **429** (2014), 178–192.
3. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *On the mean value of the error term of a class of arithmetical functions.* — Acta Math. **112** (1964), 41–67.
4. Y.-K. Lau, *On the mean square formula of the error term for a class of arithmetical functions.* — Monatsh. Math. **128** (1999), 111–129.
5. О. М. Фоменко, *Теоремы о средних значениях для одного класса рядов Дирихле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 201–223.

6. K.-C. Tong, *On divisor problems.* I, III. — Acta Math. Sinica **5** (1955), 313–324; **6** (1956), 515–541.
7. О. М. Фоменко, *Теоремы о средних значениях для автоморфных L-функций.* — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 5, 243–261.
8. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math., Vol. **899**, Springer, Berlin, 1981, pp. 148–165.
9. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* — Math. Ann. **152** (1963), 30–64.
10. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
11. A. Ivić, *On zeta-functions associated with Fourier coefficients of cusp forms.* — Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), Salerno, 1992, 231–246.
12. A. Ivić, *Exponent pairs and the zeta-function of Riemann.* — Studia Sci. Math. Hungar. **15** (1980), 157–181.
13. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-functions*, 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
14. D. R. Heath-Brown, *The twelfth power moment of the Riemann zeta-function.* — Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **29** (1978), 443–462.
15. K. Ramachandra, *Application of a theorem of Montgomery and Vaughan to the zeta-fucntion.* — J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), 482–486.
16. T. Meurman, *The mean twelfth power of Dirichlet L-functions on the critical line*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Mathematica Dissertationes, No. 52, Helsinki, 1984, 44 pp.
17. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
18. Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха, М., 1969.
19. M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums*, Bombay, 1987.
20. A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, Wiley, New York etc., 1985.

Fomenko O. M. On the mean square of the error term for Dedekind zeta functions.

Let K_n be a number field of degree n over $\mathbb{Q}$. Denote by $D(x, K_n)$ the number of all non-zero integral ideals in K_n with norm $\leqslant x$. The Dedekind zeta function $\zeta_{K_n}(s)$ is a meromorphic function with a simple pole at $s = 1$, with residue, say, Λ_n. Define

$$\Delta(x, K_n) := D(x, K_n) - \Lambda_n x.$$

The history of estimates of $\Delta(x, K_n)$ begins with

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{1-\frac{1}{n}} \quad \text{(Weber (1896))}$$

and

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{\frac{n-1}{n+1}} \quad \text{(Landau (1917))}$$

If $n > 2$, then

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 \, dy \ll x^{3-\frac{4}{n}} \log^n x.$$

which is a result of Chandrasekharan and Narasimhan (1964).

In this paper the following new results are obtained.

1) For $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, $m > 1$ is square-free, the author proves

$$x^{\frac{7}{4}} \ll \int_1^x \Delta(y, K_4)^2 dy \ll x^{\frac{7}{4}+\varepsilon}.$$

2) For K_6, the normal closure of a cubic field K_3 with the Galois group S_3 and discriminant $\Delta < 0$, the author proves

$$x^{\frac{11}{6}} \ll \int_1^x \Delta(y, K_6)^2 \, dy \ll x^{2+\varepsilon}.$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 19 октября 2015 г.