Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

Г.В. Кузьмина

МЕТОД МОДУЛЕЙ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Рассматривается распространение метода модулей семейств кривых на задачи об экстремальном разбиении, в которых ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют полюсы любых порядков.

§1

1.1. Одним из основополагающих реультатов геометрической теории функций является "общая теорема коэффициентов" Дженкинса. Эта теорема (сокращенно, ОТК) реализует припцип Тейхмюллера для широкого круга экстремальных задач, она является центральной темой монографии Дженкинса [1]. Первоначально ОТК была получена в [2], более общая форма ОТК получена в [3] и приводится в ряде последующих работ ее автора.

ОТК привела к значительному упрощению и униформизации результатов теории однолистных функций и к решению новых по постановке экстремальных задач. Эта теорема (уже в первоначальной форме) содержит в качестве следствий практически все известные результаты теории однолистных функций. Успех применения ОТК зависит от правильного выбора квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, допустимого семейства областей Δ_j и допустимого семейства функций $f_j(z)$ по отношению к этому дифференциалу.

ОТК и другим результатам Дженкинса посвящена его фундаментальная обзорная статья [4].

Естественно, имеется достаточно широкий круг экстремальных задач, к которым ОТК неприменима. Одной из причин этого является наличие нормирующих условий ОТК. Кроме того, в ОТК не расматриваются задачи, в которых квадратичный дифференциал имеет полюсы лишь первого порядка.

Ключевые слова: модуль семейства кривых, задача об экстремальном разбиении, квадратичный дифференциал.

1.2. Примерно в одно время с ОТК Дженкинс [5, 6] доказал общий принцип, устанавливающий связь между квадратичными дифференциалами и модулями нескольких семейств кривых. Этот результат сыграл определяющую роль в создании метода модулей кривых как современного метода теории функций.

Данная работа продолжает исследование в [7]. В первой части этой работы приводится, как и в [7], краткое описание результата в [5, 6] и последующих результатов в задачах об экстремальном разбиении. Везде в работе мы следуем терминологии в [5].

В [5, 6] рассматривается конечная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ и множество $A = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ различных точек на $\mathfrak{R}$. На $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus A$ расматривается свободное семейство $\mathcal{H} = \{H_k\}_{k=1}^{n_1+n_2}$ гомотопических классов локально спрямляемых кривых следующих двух типов. Первый тип состоит из классов $H_i, i = 1, \ldots, n_1$, замкнутых жордановых кривых, не гомотопных нулю на $\mathfrak{R}'$. Если $\mathfrak{R}$ действительно имеет граничные компоненты, то второй тип состоит из классов $H_i, i = n_1+1, \ldots, n_2$, дуг на $\mathfrak{R}'$, соединяющих некоторые граничные элементы $\mathfrak{R}$. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n_1+n_2}$ – система положительных чисел.

Устанавливается связь между следующими двумя экстремальными проблемами. Первой из них является проблема модуля $P(\alpha_1, ..., \alpha_{n_1+n_2})$, состоящая в нахождении $\inf \int\limits_{\mathfrak{R}} \rho^2 dA$ в классе метрик, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\gamma_k} \rho |dz| \geqslant \alpha_k$$

для каждой спрямляемой кривой $\gamma_k \in H_k, k = 1, \ldots, n_1 + n_2$.

Второй из рассматриваемых проблем является задача об экстремальном разбиении в допустимом семействе областей, ассоциированным с семейством $\mathcal{H}$. Это семейство определяется следующим образом.

Назовем двусвязную область D, лежащую на $\mathfrak{R}'$, ассоциированной с классом H первого типа, если класс простых замкнутых кривых, лежащих в D и разделяющих ее граничные компоненты, содержится в H. Четырехугольник D, лежащий на $\mathfrak{R}'$ и имеющий пару противоположных сторон на границе $\mathfrak{R}$, называем ассоциированным с классом

H второго типа, если класс дуг, лежащих в D и соединяющих упомянутые стороны D, содержится в H. В обоих случаях модуль области D для указанного класса H называем ассоциированным с классом H.

Под допустимым семейством $\mathcal{D}$ областей, ассоциированным со свободным семейством гомотопических классов кривых $H_i, i = 1, \dots, n_1 + n_2$, понимается конечное число областей, каждая из которых ассоциирована с некоторым классом Hi и не более чем одна из которых ассоциирована с любым из этих классов. Пусть $M_i(D_i)$ – модуль области D_i, ассщциированный с классом $H_i, i = 1, \dots, n_1 + n_2$.

Рассматривается вопрос о максимуме суммы $\sum\limits_{i=1}^{n_1+n_2} \alpha_k^2 M_i(D_i)$ в семействе $\mathcal{D}$.

В [5, 6] показано, что две указанные величины равны друг другу, экстремальная система областей единственна и существует единственный квадратичный дифференциал, структура траекторий которого определяет экстремальную систему областей.

Указанная теорема Дженкинса инспирировала исследования ряда авторов, посвященных различным вопросам теории квадратичных дифференциалов, включая их роль в задачах об экстремальном разбиении и их связи с топологией и дифференциальной геометрией.

Следует указать, что принцип, установленный в [5], использовался Дженкинсом при решении конкретных задач в его более ранних работах. Так, посредством распространения результата в [5] Дженкинсом была решена проблема Гронуолла для класса S. Подход, примененный в указанных работах, позволил эффективно использовать в них результаты метода симметризации.

Еще в [5] было отмечено, что результаты этой работы могут быть распространены на тот случай, когда семейство $\mathcal{H}$ содержит, помимо классов H_i, рассматриваемых выше, классы кривых третьего типа: классы H_1 замкнутых кривых, гомотопных точечным контурам в отмеченных точках $b_1 \in \mathfrak{R}$. Общий результат, представляющий собой упомянутое выше распространение теоремы Дженкинса [5] (в случае римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$) установлен в [8]. Позднее в работах Емельянова [9], Емельянова и Кузьминой [10], Солынина [11] результаты в [5] были распространены на тот случай, когда семейство $\mathcal{H}$ состоит из классов четырех типов. Здесь классы четвертого типа состоят из дуг с концами в отмеченных точках на $\mathfrak{R}$. В этих случаях ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют полюсы второго порядка с радиальной и спиральной структурой траекторий. Эти результаты потребовали введения понятия приведенного модуля двуугольника. Напомним определение.

Пусть D – односвязная область гиперболического типа, представляющая собой двуугольник с вершинами в различных или совпадающих точках a_1 и a_2 (для определенности считаем, что $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$). Будем предполагать, что область D удовлетворяет следующему условию $(*)$. Пусть $\zeta = g(z)$ – конформный гомеоморфизм двуугольника D на полосу $0 < \operatorname{Im}\zeta < h$, нормированный условиями $\operatorname{Re} g(a_1) = -\infty, \operatorname{Re} g(a_2) = +\infty$. Пусть ϵ_1, ϵ_2 – достаточно малые положительные числа. Тогда в компоненте связности $\Delta_k(\epsilon_k)$ множества $D \cap U(a_k, \epsilon_k)$, $a_k \in \partial\Delta_k(\epsilon_k)$, справедливо равенство

$$g(z) = (-1)^{k-1}\{A_k \log(z - a_k) + \tilde{g}_k(z))\}, \quad k = 1, 2,$$

где $A_k > 0$, $\tilde{g}_k(z)$ – регулярная функция. Ясно, что $\phi_k = h/A_k$ – внутренний угол области D в вершине a_k.

Пусть область D удовлетворяет условию $(*)$. Обозначим через $S_k(\epsilon_k)$ дугу окружности $|z-a_k| = \epsilon_k$, принадлежащую границе области $\Delta_k(\epsilon_k)$. Пусть $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ – четырехугольник в D с противоположными сторонами $S_k(\epsilon_k)$, $k = 1, 2$. Через $M^{(2)}(D(\epsilon_1, \epsilon_2))$ обозначаем модуль четырехугольника $D(\epsilon_1, \epsilon_2)$ для класса кривых, разделяющих стороны $S_1(\epsilon_1)$ и $S_2(\epsilon_2)$. Предел

$$M^{(2)}(D) := \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \to)} \{M^{(2)}(D(\epsilon_1, \epsilon_2)) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\phi_k} \log \epsilon_k\} \qquad (1)$$

назовем приведенным модулем двуугольника D для класса кривых в D, соединяющих стороны D, и обозначим через $M^{(2)}(D, a_1, a_2)$.

Пусть теперь D – треугольник на $\mathbb{C}$ с вершинами a_0, a_1, a_2 и пусть γ – граничная дуга области D, соединяющая точки a_1, a_2. Пусть $U(a_0, \epsilon)$ – круг $|z - a_0| < \epsilon$, $\Delta(a_0, \epsilon)$ – компонента связности множества $D \cap U(a_0, \epsilon), a_0 \in \partial\Delta(a_0, \epsilon), S(a_0, \epsilon)$ – дуга окружности $|z - a_0| = \epsilon$, принадлежащая границе области $\Delta(a_0, \epsilon)$. Пусть выполняется условие $(*)$: для конформного гомеоморфизма $\zeta = g(z)$ области D на полуполосу $\{-\infty < \operatorname{Re}\zeta < 0, 0 < \operatorname{Im}\zeta < h\}$, нормированного условием

$\operatorname{Re} g(a_0) = -\infty$, в области $\Delta(a_0, \epsilon)$ справедливо равенство

$$g(z) = A \log(z - a_0) + \tilde{g}_k(z),$$

где $A > 0, \tilde{g}_k(z)$ – регулярная функция. Рассмотрим предел

$$M(D, a_0, \gamma) := \lim_{\epsilon \to 0} \big\{ M^{(2)}(D(\epsilon)) + \frac{1}{\phi} \log \epsilon \big\}, \tag{1'}$$

где $D(\epsilon) = D \setminus \overline{\Delta}(a_0, \epsilon)$ – четырехугольник с противоположными сторонами $S(a_0, \epsilon)$, γ и рассматривается модуль этого четырехугольника относительно семейства кривых, разделяющих его указанные стороны, ϕ – внутренний угол треугольника D в вершине a. Этот предел называется приведенным модулем треугольника D относительно его вершины a.

1.3. Остановимся кратко на результате в [10, 11]. Для краткости, мы не рассматриваем случай спиральной структуры траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала (см. [10]).

Пусть $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность,

$$A = \{a_k\}_{k=1}^{n}, \quad B^{(0)} = \{b_l^{(0)}\}_{l=1}^{m}, \quad B = \{b_k\}_{k=1}^{r}$$

– множества отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ и на границе $\mathfrak{R}$, если она существует, где точки из $B^{(0)}$ и B принадлежат $\mathfrak{R}$ (одно или два из указанных трех точечных множеств может отсутствовать). Предполаем, что в окрестности каждой точки из $A, B^{(0)}, B$ выбран фиксированный локальный параметр.

На $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \{A \cup B^{(0)} \cup B\}$ рассматриваются гомотопические классы локально спрямляемых жордановых кривых следующих четырех типов. Классы $H_1, \ldots, H_{n_1}$ первого типа и классы $H_{n_1+1}, \ldots, H_{n_1+n_2}$ второго типа и области, ассоциированные с этими классами (двусвязные области и четырехугольники) определяются также как в [5].

Третий тип состоит из классов $H_{n_1+n_2+1}, \ldots, H_{n_1+n_2+m}$, каждый из которых состоит из замкнутых кривых, отделяющих одну из точек $b_l^{(0)}$ от других отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ и от границы $\mathfrak{R}$, если она существует; эти кривые гомотопны точечной кривой в $b_l^{(0)}$. Односвязную область D на $\mathfrak{R}' \cup b_l^{(0)}, b_l^{(0)} \in D$, назовем ассоциированной с классом H третьего типа, если семейство замкнутых жордановых кривых в D, отделяющих точку $b_l^{(0)}$ от границы D, содержится в H. Приведенный модуль $M(D, b_l^{(0)})$ области D относительно точки $b_l^{(0)}$ назовем ассоциированным с классом H.

Наконец, если $B \neq \varnothing$, то четвертый тип состоит из классов

$$H_{n_1+n_2+m+s} := H_s^{(1)}, \quad s = 1, \dots, p,$$

дуг на $\mathfrak{R}'$ с концами в точках $b_k', b_k'' \in B$ (эти точки могут совпадать). Предполагается, что каждая из точек множества B является концом дуг, принадлежащих одному или нескольким классам четвертого типа. Двуугольник D на $\mathfrak{R}'$, имеющий вершины в точках $b_{k'}, b_{k''}$ множества B, называется ассоциированным с классом H четвертого типа, если семейство дуг в D, соединяющих вершины D, содержится в H. Мы предполагаем, что область D удовлетворяет условию $(*)$ относительно своих вершин (см. определение §1.2). Приведенный модуль $M^{(2)}(D, b_{k'}, b_{k''})$ двуугольника D относительно класса кривых, разделяющих его вершины, назовем ассоциированным с классом H.

Предполагается, что все классы H_i определяются системами точек $A, B^{(0)}, B$ таким образом, что для каждой из областей D, ассоциированных с одним из этих классов, модуль D, ассоциированный с этим классом,ограничен сверху(в случае приведенного модуля двуугольника снизу) некоторой постоянной, зависящей только от положения точек из $A, B^{(0)}, B$, но не отвыбора области D.

Пусть

$$\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n_1+n_2+m}, \quad h = \{h_s\}_{s=1}^{p}$$

– множества положительных чисел. Предполагается, что для областей рассматриваемого семейства выполняется условие согласования углов и весов: внутренние углы ϕ_k двуугольников $D_s^{(1)}$ в вершинах b_k удовлетворяют условию

$$\phi_k = 2\pi h_k / \sum_{s \in I_k} h_s, \quad k = k'(s), k''(s), \tag{2}$$

где I_k – множество всех индексов $s \in \{1, \dots, p\}$ таких, что дуги из класса $H_{n_1+n_2+m+s} := H_s^{(1)}$ имеют точку c предельной концевой точкой в одном или в двух направлениях (в последнем случае соответствующий индекс s присутствует в I_k дважды).

Семейство всех допустимых систем областей D_i, ассоциированных с семейством $\mathcal{H}$ и удовлетворяющих последнему условию, обозначим через $\mathcal{D}(\alpha, h)$.

Для фиксированных систем α и h на семействе $\mathcal{D}(\alpha, h)$ определен функционал

$$\mathcal{M}(\alpha, h) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i^2 M(D_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \alpha_i^2 M^{(1)}(D_i)$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} \alpha_{n_1+n_2+l}^2 M(D_{n_1+n_2+l}, b_l) - \sum_{s=1}^{p} h_s^2 M^{(2)}(D_s^{(1)}, b_{k'(s)}, b_{k''(s)}). \quad (3)$$

В [9–11] показано, что экстремальная система областей рассматриваемой экстремальной задачи единственна и является системой характеристических областей ассоциированного квадратичного дифференциала $Q(z)dz$, этот дифференциал определяется условиями задачи единственным образом. Мы не приводим здесь полную формулировку этого результата, отсылая к замечанию 1 к теореме 1 (см. §2 настоящей работы).

Отметим, что в [11] рассматривается задача об экстремальном разбиении более общего вида: наряду с описанными выше классами кривых четырех типов рассматриваются гомотопические классы дуг на $\mathfrak{R}$, идущих от одной граничной компоненты $\mathfrak{R}$ к другой из этих компонент, и классы дуг, идущих от отмеченной точки на $\mathfrak{R}$ к граничной компоненте $\mathfrak{R}$. Соответственно этому, допустимое семейство областей содержит четырехугольники и треугольники, ассоциированные с этими классами дуг. Ниже мы используем результаты в [11].

Указанные выше результаты привели к различным приложениям. Важными в теории задач об экстремальном разбиении являются т.н. градиентные теоремы. Приведем одну из них в случае $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathcal{M}(b_k)$ обозначаем функционал (3), рассматриваемый как функция от $b_k \in B(0) \cup B$.

Градиентная теорема (см. [9–11]). *Пусть $b_k \in B^{(0)} \cup B$, $b_k \neq \infty$. Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \mathcal{M}(b_k) = \pi Q_k'(b_k), \quad \text{здесь} \quad Q_k(z) = (z - b_k)^2 Q(z),$$

где $Q(z)dz^2$ – ассоциированный квадратичный дифференциал задачи о максимуме функционала (3), нормированный соответствующими условиями.

§2

2.1. Для распространения результатов в [10, 11] требуется рассмотреть задачи об экстремальном разбиении, в которых ассоциированный квадратичный дифференциал имеет полюсы порядка $\geqslant 3$, следовательно, имеет в своей структуре траекторий концевые области.

Будем рассматривать области, подобные концевым областям квадратичных дифференциалов. Пусть c – точка $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Пусть D – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$, c – граничная точка D. Будем считать, что область D удовлетворяет следующему условию (в дальнейшем условие $(**)$). Однолистное конформное отображение $\zeta = g(z)$ области D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ имеет в окрестности точки c разложение вида

$$\begin{aligned} g(z) &= \alpha(z-c)^{-(n/2-1)} + \quad \text{более высокие степени } (z-c), \\ &\quad \text{если } c \neq \infty, \\ g(z) &= \alpha z^{n/2-1} + \quad \text{более высокие степени } 1/z, \\ &\quad \text{если } \ c = \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha \neq 0, \quad n \geqslant 3$ – натуральное число. Область D, удовлетворяющая

указанному условию, подобна в малом концевой области квадратичного дифференциала, имеющего в точке c полюс порядка $n \geqslant 3$. Ясно, что эта область имеет в точке c внутренний угол величины $2\,\pi/(n-2)$. Существуют $n-2$ области, для каждой из которых точка c является граничной, а отображение её на верхнюю или нижнюю полуплоскость реализуется гиперэллиптическим интегралом с разложением указанного выше вида (с чередованием знаков $+$ и $-$). Имеется $n-2$ предельных направлений, в которых граничные дуги указанных областей стремятся к точке $z = c$, соседние направления образуют друг с другом равные углы $2\pi/(n-2)$. Упомянутые области будем обозначать через $D_1(c), \ldots, D_{n-2}(c)$, указанные лучи – через $l_k(c), k = 1, \ldots, n-2$. В достаточно малой окрестности точки c область $D_k(c)$ лежит внутри угла, образованного лучами $l_k(c)$ и $l_{k+1}(c)$.

Наряду с областями $D_k(c)$ имеется система областей $\tilde{D}_k(c), k = 1, \ldots, n-2$, также имеющих точку c общей граничной точкой. Отображение $\zeta = \tilde{g}_k(z)$ области $\tilde{D}_k(c)$ на верхнюю полуплоскость связано с отображением $\zeta = g_k(z)$ области $D_k(c)$ равенством $(\tilde{g}_k'(z))^2 =$

$-(g_k'(z))^2(z)$. Граничные дуги областей $\tilde{D}_k(c)$ имеют в точке c касательные, образующие друг с другом углы $2\pi/(n-2)$. Указанные лучи обозначим через $\tilde{l}_k(c) := l_{k-1/2}(c), k = 1, \ldots, n-2$. В достаточно малой окрестности точки c область $\tilde{D}_k(c)$ лежит внутри угла, образованного лучами $l_{k-1/2}(c)$ и $l_{k+1/2}(c)$; лучи $l_{k+1/2}(c), k = 1, \ldots, n-2$, лежат на биссектрисах углов, образованных лучами $l_k(c)$ и $l_{(k+1)}(c)$.

Вернемся к областям $D_k(c)$. Пусть по-прежнему $c \neq \infty$. Рассмотрим область, получаемую из области $D_k(c)$ удалением соответствующей окрестности точки c. Пусть $\epsilon > 0$ и достаточно мало. Пусть $z_k(\epsilon)$ и $z_{k+1}(\epsilon)$ – точки пересечения окружности $|z-c| = \epsilon$ соответственно с лучами $l_k(c)$ и $l_{k+1}(c)$ и пусть $z_{k+1/2}(\epsilon)$ – точка пересечения той же окружности с лучом $l_{k+1/2}(c)$. Пусть $\gamma_k(\epsilon)$ и $\gamma_{k+1}(\epsilon)$ – кривые, на которых соответственно

$$\operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Re}\zeta(z_k(\epsilon)), \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Re}\zeta(z_{k+1}(\epsilon)),$$

$\tilde{\gamma}_k(\epsilon) := \gamma_{k+1/2}(\epsilon)$ – кривая, на которой

$$\operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im}\zeta(z_{k+1/2}(\epsilon)).$$

Пусть $\epsilon > 0$ и достаточно мало. В дальнейшем через $N(c,\epsilon)$ обозначаем окрестность точки c, ограниченную дугами кривых $\gamma_k(\epsilon)$, $\gamma_{k-1/2}(\epsilon)$, $k = 1, \ldots, n-2$: $N(c,\epsilon)$ представляет собой объединение множеств

$$\mathrm{Int}\bar{\gamma}_k(\epsilon), \;\; \mathrm{Int}\bar{\gamma}_{k-1/2}(\epsilon), \quad k = 1, \ldots, n-2.$$

Через $D_k(c,\epsilon)$ обозначаем область,получаемую из $D_k(c)$ удалением замыкания окрестности $N(c,\epsilon)$. $D_k(c,\epsilon)$ – четырехугольник, противоположными сторонами которого служат дуги кривых $\gamma_k(\epsilon)$ и $\gamma_{k+1}(\epsilon)$.

Области, подобные полосообразным областям квадратичных дифференциалов с ненулевыми внутренними углами в их отмеченных граничных точках, рассматривались ранее. Ниже мы имеем дело с другими случаями.

Кроме областей $D_k(c), k = 1, \ldots, n-2$, могут существовать области другого типа, также имеющие точку c своей граничной точкой, но обладающие в ней нулевыми внутренними углами, эти области подобны в малом полосообразным областям квадратичных дифференциалов. Рассмотрим указанные случаи. Пусть D – односвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с отмеченными граничными точками c_1 и c_2 (различными или совпадающими). Сначала будем считать, что однолистное конформное отображение $\zeta = g(z)$ области D на полосу $0 < \operatorname{Im}\zeta < h$ в окрестности точки c_1 имеет разложение вида (4) с $c = c_1, n = n_1, \alpha = \alpha_1$, а в окрестности точки c_2 имеет разложение вида (4) с $c = c_2, n = n_2, \alpha = \alpha_2$, где $n_1, n_2 \geqslant 3$. Это условие показывает, что область D имеет в точках c_1, c_2 нулевые внутренние углы и граничные дуги области D стремятся к точкам c_1, c_2 по тем же предельным направлениям, что и граничные дуги соответствующих из областей $D_k(c_1), D_l(c_2)$.

Пусть теперь однолистное конформное отображение $\zeta = g(z)$ области D на полосу $0 < \operatorname{Im}\zeta < h$ в окрестности точки c_1 имеет разложение вида (4) с $c = c_1, n = n_1 \geqslant 3, \alpha = \alpha_1$, а в окрестности точки c_2 выполняется условие $(*)$:

$$g(z) = A\log(z - c_2) + \ldots, A \neq 0.$$

В этом случае область D имеет в точке c_1 внутренний угол $\phi = h/A \neq 0$.

Ниже мы будем рассматривать области, получаемые из областей последних двух типов удалением окрестностей $\overline{N}(c_1)$ и $\overline{N}(c_2)$ в первом случае, окрестности $\overline{N}(c_1)$ во втором случае. Эти области являются соответственно четырехугольниками и треугольниками на $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$.

2.2. Введенные в §2.1 понятия позволяют распространить результаты метода модулей, установленные в [9–11], на семейства систем областей, содержащих области, подобные концевым областям квадратичных дифференциалов.

Начнем с определения гомотопических классов кривых, с которыми ассоциированы допустимые системы областей. Пусть на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$ заданы множества точек

$$A = \{a_k\}_{k=1}^{i}, \quad B^{(0)} = \{b_l^{(0)}\}_{l=1}^{m}, \quad B = \{b_l\}_{l=1}^{r}, \quad C = \{c_j\}_{j=1}^{J}.$$

Пусть $\overline{\mathbb{C}}'$ получается из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением указанных точечных множеств. На $\overline{\mathbb{C}}'$ рассмотрим гомотопические классы жордановых кривых следующих шести типов. Первые три типа кривых определяются также, как и выше (в случае $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$ второй из рассматривавшихся в [9–11] гомотопических классов отсутствует). Именно, к первому типу отнесем классы замкнутых кривых, не гомотопных нулю на $\overline{\mathbb{C}}'$, ко второму типу – классы кривых, гомотопных точечной кривой в точке $b_l^{(0)} \in B^{(0)}, l = 1, \ldots, m$, к третьему типу – классы дуг, имеющих предельные концевые точки в обоих направлениях (в различных или совпадающих) точках $b_l \in B$.

Следующие три типа гомотопических классов связаны с наличием множества $C = \{c_j\}$ точек, играющих роль полюсов ассоциированного квадратичного дифференциала порядков $\geqslant 3$. Так, каждой точке $c_j \in C$ соответствует $n_j - 2$ гомотопических классов кривых $H_{j,k}, k = 1, \ldots, n_j - 2$, четвертого типа. Дуги класса $H_{j,k}$ имеют точку c_j предельной точкой в обоих направлениях. Имеется $n_j - 2$ направлений в точке c_j, смежные из которых образуют друг с другом равные углы $2\pi/(n_j - 2)$ (характеристические направления). Дуги каждого из классов $H_{j,k}, k = 1, \ldots, n_j - 2$, имеют точку c_j предельной точкой в двух смежных из $n_j - 2$ характеристических направлений (одних и тех же для данного класса $H_{j,k}$). Дуги классов $H_{j,k}$ асимптотически подобны траекториям квадратичного дифференциала, имеющего в точке c_j полюс n_j-го порядка.

К пятому типу гомотопических классов отнесем классы $H_i^{(5)}$ дуг на $\overline{\mathbb{C}}'$, имеющих концевыми точками в обоих направлениях (различные или совпадающие) точки c_j, c_j' множества C. Эти дуги образуют в каждой из точек c_j, c_j' нулевые углы друг с другом, предельные направления этих дуг в точках c_j, c_j' совпадают с предельными характеристическими направлениями в этих точках.

Наконец, к шестому типу гомотопических классов отнесем классы $H_i^{(6)}$ дуг, имеющих одну из концевых точек в некоторой точке $c_j \in C$, а другую концевую точку – в некоторой точке $b_k \in B$. Дуги каждого из указанных гомотопических классов имеют одни и те же предельные направления в точках c_j, эти направления совпадают с одним из характеристических направлений в каждой из этих точек.

Под свободным семейством $\mathcal{H}$ гомотопических классов кривых на $\overline{\mathbb{C}}'$ понимаем множество классов H_i^{μ}, где $\mu = 1, \ldots, 6, i = 1, \ldots, m_\mu$, указанных шести типов. Классы $H_i^{(4)} (m_4 = \sum\limits_{j=1}^{J} (n_j - 2))$ будем обозначать также через $H_{j,k} (j = 1, \ldots, J; k = 1, \ldots, n_j - 2)$, отмечая этим их связь с точками c_j множества C. Некоторые из указанных классов могут отсутствовать. Предполагается, что все рассматриваемые классы существуют и различны.

Области на $\overline{\mathbb{C}}$, ассоциированные с классами кривых первых трех из указанных типов, определяются также как и выше. В соответствии с тем, какой из трех случаев имеет место, модуль $M(D)$ двусвязной области D для класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, приведенный модуль $M(D, b_l^{(0)})$ односвязной области D относительно точки $b_l^{(0)} \in B^{(0)}$ или же приведенный модуль $M^{(2)}(D, b_k', b_k'')$ двуугольника D относительно класса кривых, разделяющих его вершины, будем называть ассоциированным с соответствующим из классов $H_i^{(\mu)}, \mu = 1, 2, 3$.

Область $D, \quad c_j \in \partial D$, на $\overline{\mathbb{C}}'$ назовем ассоциированной с классом $H_i^{(4)} = H_{j,k}$ четвертого типа, если дуги в D, имеющие концами в обеих направлениях точку c_j, принадлежат этому классу. Аналогично определяются области, ассоциированные с классами пятого и шестого типов.

Под допустимой системой областей $D_i^{(\mu)}$, ассоциированной с семейством $\mathcal{H}$ классов $H_i^{(\mu)}$, понимаем конечное число неналегающих областей на $\overline{\mathbb{C}}$, каждая из которых ассоциирована с некоторым классом $H_i^{(\mu)}$ и не более чем одна из которых ассоциирована с каждым из таких классов. Предполагаем, что выполняются следующие условия. Если $D_i^{(4)}$ – область, ассоциированная с классом $H_i^{(4)}$ четвертого типа, то считаем, что область $D_i^{(4)}$ удовлетворяет условию $(**)$ (см. §1.2). Если область D ассоциирована с классом $H_i^{(5)}$ пятого типа, то считаем, что отображение $\zeta = g(z)$ области D на полосу $0 < \operatorname{Im} \zeta < h$ в окрестности ее вершин $c_j, c_{j'}$ удовлетворяет условию $(**)$ относительно этих точек. Аналогично, область D, ассоциированная с классом $H_i^{(6)}$ шестого типа и имеющая вершинами точки $c_j \in C$ и $b_k \in B$, удовлетворяет относительно этих точек соответственно условиям $(**)$ и $(*)$ (см. §1.2). Семейство всех допустимых систем областей, ассоциированных с семейством $\mathcal{H}$ и удовлетворяющих указанным условиям, обозначаем через $\mathcal{D}$.

2.3. При рассмотрении задачи об экстремальном разбиении в семействе $\mathcal{D}$ будем исходить из аппроксимационных соображений.

Пусть $N(\epsilon)$ – обьединение множеств $\overline{N}(c_j, \epsilon), j = 1, \dots, J$ (см. определение §2.2). Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ – конечносвязная область, получаемая из $\overline{\mathbb{C}}$ удалением множества $N(\epsilon)$. Через $\mathcal{H}(\epsilon)$ обозначаем семейство гомотопических классов кривых, получаемых сужением на $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ классов семейства $\mathcal{H}$.

Через $\mathcal{D}(\epsilon)$ обозначаем семейство областей $D_i^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, 3$, и $D_i^{(\mu)}(\epsilon)$, $\mu = 4, 5, 6$, на $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$, получающихся из областей $D_i^{(\mu)}, \mu = 1, \ldots, 6$ семейства $\mathcal{D}$ удалением множества $N(\epsilon)$. Модули областей $D_i^{(\mu)}(\epsilon)$ первых трех типов определены выше. Области $D_i^{(4)}(\epsilon)$ и $D_i^{(5)}(\epsilon)$ – четырехугольники с противоположными сторонами на границе множества $N(\epsilon)$. Через $M^{(1)}(D_i^{(4)}(\epsilon))$ (соответственно, $M^{(2)}(D_i^{(5)}(\epsilon))$ обозначаем модуль указанного четырехугольника относительно семейства кривых, соединяющих (соответственно,разделяющих) его стороны, принадлежащие множеству $N(\epsilon)$. Область $D_i^{(6)}(\epsilon)$ – треугольник в области $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ с вершиной в некоторой точке b_k множества B. Через $M^{(2)}(D_i^{(6)}(\epsilon))$ обозначаем приведенный модуль этого треугольника относительно его вершины b_k.

Пусть $\alpha_i^{(\mu)}, \mu = 1, 2, 4; i = 1, \ldots, m_\mu$, и $h_i^{(\mu)}, \mu = 3, 5, 6; i = 1, \ldots, m_\mu$, – заданные положительные числа; $\alpha_i^{(4)}$ и $h_i^{(5)}$ зависят от ϵ и обозначаются также через $\alpha_i^{(4)}(\epsilon)$ и $h_i^{(5)}(\epsilon)$.

Будем предполагать, что семейство $\mathcal{D}(\epsilon)$ удовлетворяет следующему условию согласования углов и весов (ср. с (2)). Пусть

$$\beta_k(h) = \sum_{i \in I_k^{(3)}} h_i^{(3)} + \sum_{i \in I_k^{(6)}} h_i^{(6)}, \tag{5}$$

где $I_k^{(3)}$ (соответственно,$I_k^{(6)}$) – множество индексов $i \in \{1, \ldots, m_3\}$, для которых дуги класса $H_i^{(3)}$ (соответственно, класса $H_i^{(6)}$), имеют точку $b_k \in B$ своей предельной концевой точкой; множество $I_i^{(6)}$ может быть пустым. Двуугольник $D_i^{(3)}$, имеющий вершинами точки $b_{k'(i)}, b_{k''(i)}$ множества B, имеет в этих вершинах внутренние углы, равные

$$\phi_k = 2\pi h_i^{(3)} / \beta_k(h), \quad k = k'(i), k''(i).$$

Если множество $I_k^{(6)}$ непусто, то треугольник $D_i^{(6)}$, имеющий вершиной точку $b_{k(i)} \in B$, имеет в этой вершине внутренний угол, равный

$$\phi_k = 2\pi h_i^{(6)} / \beta_k(h), \quad k = k(i). \tag{5'}$$

На семействе $\mathcal{D}(\epsilon)$ определен функционал

$$M(\alpha, h) = \sum_{i=1}^{m_1} [\alpha_i^{(1)}]^2 M^{(1)}(D_i^{(1)}) + \sum_{i=1}^{m_2} [\alpha_i^{(2)}]^2 M(D_i^{(2)}(\epsilon), b_i^{(0)}) - \sum_{i=1}^{m_3} [h_i^{(3)}]^2 M^{(2)}(D_i^{(3)}(\epsilon)) + \sum_{i=1}^{m_4} [\alpha_i^{(4)}(\epsilon)]^2 M^{(1)}(D_i^{(4)}(\epsilon)) - \sum_{i=1}^{m_5} [h_i^{(5)}(\epsilon)]^2 M^{(2)}(D_i^{(5)}(\epsilon)) - \sum_{i=1}^{m_6} [h_i^{(6)}]^2 M^{(2)}(D_i^{(6)}(\epsilon)). \quad (6)$$

Следующая теорема непосредственно вытекает из результата в [11]. Как обычно, под множеством Φ для квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ понимаем объединение всех критических траекторий этого дифференциала.

Теорема 1. *Пусть $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ и семейство областей $\mathcal{D}(\epsilon)$ определены выше. Существует квадратичный дифференциал $Q(z,\epsilon)dz^2$, определенный в $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ и удовлетворяющий следующим условиям.*

1) *$Q(z,\epsilon)dz^2$ имеет простые полюсы в точках множества A (возможно, не во всех этих точках), полюсы второго порядка в каждой из точек $b_i(0) \in B^{(0)}$ и $b_k \in B$ и регулярен в остальных точках $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$.*

2) *Внутреннее замыкание множества Φ для дифференциала $Q(z,\epsilon)\,dz^2$ в области $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon)$ пусто и $\overline{\mathbb{C}}(\epsilon) \setminus \overline{\Phi}$ представляет собой объединение областей $D_i^{(\mu)*}(\epsilon)$ семейства $\mathcal{D}(\epsilon)$.*

3) *Длины в $Q(z,\epsilon)$-метрике траекторий дифференциала $Q(z,\epsilon)^2$ в области $D_i^{(\mu)*}(\epsilon)$, $\mu = 1,2,4$; $i = 1,\ldots,m_\mu$, равны $\alpha_i^{(\mu)}$, длины в $Q(z,\epsilon)$-метрике замыканий дуг ортогональных траекторий этого дифференциала в области $D_i^{(\mu)*}(\epsilon)$, $\mu = 3,5,6$; $i = 1,\ldots,m_\mu$, равны $h_i^{(\mu)}$ (для простоты предполагаем, что двусвязные области $D_i^{(1)*}$, $i = 1,\ldots,m_1$, не являются вырожденными).*

Области $D_i^{(\mu)*}(\epsilon), \mu = 1,\ldots,6; i = 1,\ldots,m_\mu$, и только они, реализуют максимум на семействе $\mathcal{D}(\epsilon)$ функционала (6).

Из теоремы 1 в результате предельного перехода при $\epsilon \to 0$ вытекает следующая теорема об экстремальном разбиении в семействе $\mathcal{D}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предыдущие условия. Тогда существует квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$, мероморфный на $\overline{\mathbb{C}}$ и определяемый следующими условиями.*

1) *$Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках $a_k \in A$, полюсы второго порядка в каждой из точек $b_i^{(0)} \in B^{(0)}$ и $b_k \in B$, полюс порядка $n_j \geqslant 3$ в точке $c_j \in C, j = 1, \dots, J$, и не имеет других полюсов на $\overline{\mathbb{C}}$.*

2) *Внутреннее замыкание множества Φ для дифференциала $Q(z)dz^2$ пусто и $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Phi}$ представляет собой объединение областей $D_i^{(\mu)*}, \mu = 1, \dots, 6; i = 1, \dots, m_\mu$, семейства $\mathcal{D}$.*

3) *Длины в Q-метрике траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(\mu)*}, \mu = 1, 2; i = 1, \dots, m_\mu$, равны $\alpha_i^{(\mu)}$. Длины в Q-метрике замыканий дуг ортогональных траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в области $D_i^{(3)*}$, $i = 1, \dots, m_3$, равны h_i.*

Пусть существуют конечные пределы

$$T^{(4)}(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{i=1}^{m_4} [\alpha_i^{(4)}(\epsilon)]^2 \{M^{(1)}(D_i^{(4)*}(\epsilon)) - M^{(1)}(D_i^{(4)}(\epsilon))\},$$

$$T^{(\mu)}(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{i=1}^{m_\mu} [h_i^{(\mu)}]^2 \{M^{(2)}(D_i^{(\mu)*}(\epsilon)) - M^{(2)}(D_i^{(\mu)}(\epsilon))\},$$

$$\mu = 5, 6; \quad h_i^{(5)} := h_i^{(5)}(\epsilon). \tag{7}$$

Тогда в семействе $\mathcal{D}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{m_1} [\alpha_i^{(1)}]^2 [M(D_i^{(1)*}) - M(D_i^{(1)}] + \sum_{i=1}^{m_2} [\alpha_i^{(2)}]^2 [M(D_i^{(2)*}, b_i^{(0)}) - M(D_i^{(2)}, b_i^{(0)})]$$
$$- \sum_{i=1}^{m_3} [h_i^{(3)}]^2 [M^{(2)}(D_i^{(3)*}, b_{k'(i)}, b_{k''(i)}) - M^{(2)}(D_i^{(3)}, b_{k'(i)}, b_{k"(i)})]$$
$$+ T^{(4)} - T^{(5)} - T^{(6)} \leqslant 0. \tag{8}$$

Доказательство. Существование предельного квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ для дифференциала $Q(z, \epsilon)$ теоремы 1 при $\epsilon \to 0$ устанавливается обычным тем на основании принципа сгущения для аналитических функций. Утверждения теоремы 2 относительно полюсов дифференциала $Q(z)\,dz^2$ в точках множеств $B^{(0)}$ и B очевидны. Из структуры траекторий дифференциала $Q(z,\epsilon)dz^2$ в окрестностях точек множества C следует, что точка $c_j \in C$, $j = 1, \ldots, J$, является полюсом дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка n_j. Используя дифференциальные уравнения для функций, отображающих области $D_i^{(\mu)*}(\epsilon)$ теоремы 1 на канонические области, и рассматривая предельный переход при $\epsilon \to 0$, приходим к утверждению теоремы 2 относительно областей $D_i^{(\mu)*}$. Остальные утверждения теоремы 2 непосредственно вытекают из теоремы 1. □

Замечание 1. В случае наличия в семействе $\mathcal{D}$ областей лишь первых трех типов теорема 2 доказана в [9–11], при этом в [9–11] результат полностью конкретизирован; в случае областей лишь первых четырех типов теорема 2 приводится в [7].

Отсутствия понятия приведенного модуля концевой области квадратичного дифференциала, удобного для приложений, составляет трудность распространения результатов об экстремальном разбиении, полученных в [9–11], на более общие случаи. Теорему 2 можно считать продвижением в этом вопросе.

Теорему 2 можно рассматривать как аналог неравенства ОТК [1, 2,3] (если в ОТК не рассматривать области допустимого семейства со спиральной структурой траекторий). Условия конечности пределов (7) достигаются посредством нормирующих условий для областей допустимого семейства. Случаи равенства в (8) устанавливаются также как и в случае ОТК.

Замечание 2. В ряде случаев задачи об экстремальном разбиении, в которых ассоциированные квадратичные дифференциалы имеют полюсы высоких порядков, непосредственно сводятся к задачам, в которых квадратичные дифференциалы имеют полюсы не выше второго порядка. В основе этого лежит тот факт, что квадратичный дифференциал с полюсом порядка $\geqslant 4$, пусть в точке $z = 0$, может быть апроксимирован квадратичным дифференциалом, имеющим $n-2$ полюсы второго порядка, симметрично расположенных на окружности $|z| = \epsilon$ (в случае $n = 3$ еще и простой полюс в точке $z = 0$). Несложное доказательство этого факта известно специалистам, но,возможно, опубликовано не было.

Указанный подход применялся например в [12,13].

Литература

1. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping.* — Ergeb.Math.Grenzeb. (N.S.) Bd.**18**, Springer-Verlag, 1958; 2nd. ed. corrected, 1965. Пер. на русск. яз.1-го изд. Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения. М.,1962.
2. J. A. Jenkins, *A general coefficient theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 262–280.
3. J. A. Jenkins, *An extension of the general coefficient theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 387–407.
4. J. A. Jenkins, *The method of the extremal metric. Handbook of complex analysis: geometric function theory*, Vol. 1, pp. 393–456, North-Holland, Amsterdam, 2002.
5. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.* — Ann. Math. (2) **65** (1957), 440–453.
6. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics.* II. — Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), No. 2, 249–257.
7. Г. В. Кузьмина, *Общая теорема коэффициентов Дженкинса м метод модулей семейств кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **429** (2014), 140–156.
8. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Труды Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–243.
9. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 76–89.
10. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **237** (1997), 74–104.
11. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып.1, 3–86.
12. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении и оценки коэффициентов в классе* $\Sigma(r)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 101–116.
13. Г. В. Кузьмина, *Метод модулей и экстремальные задачи в классе* $\Sigma(r)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 136–152.

Kuz'mina G. V. The module method in certain general extremal decomposition problem.

Results of the module method are extended on extremal decomposition problems for which associated quadratic differentials have poles of arbitrary orders.

С.-Петербургское отделение
Математического института,
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 9 ноября 2015 г.