Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

В. О. Кузнецов

ПОЛЯРИЗАЦИЯ И КРУГОВОЕ УСЕЧЕНИЕ ОБЛАСТИ

Рассматривается изменение разности приведенных модулей односвязной области $D,\ 0 \in D$, и ее кругового усечения $D_r = D \cap \{|z| < r\}$ при поляризации и круговой симметризации.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U_r &= \{|z| < r\}, \quad U = U_1, \\ T_r &= \{|z| = r\}, \quad \mathbb{C}^+ = \{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}, \\ D^+ &= D \cap \mathbb{C}^+, \quad D^* = \{z :\ \bar{z} \in D\}, \\ D^- &= ((D^*)^+)^*, \quad \Delta_{R,\rho} = U_R \setminus [\rho, R], \\ l(\varphi) &= \{z :\ \operatorname{Im}(ze^{-i\varphi}) = 0\}, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пусть B – открытое множество, $0 \in B,\ r > 0$. Под приведенным модулем открытого множества B относительно точки $z = 0$ понимаем приведенный модуль связной компоненты этого множества, содержащей точку $z = 0$, относительно этой точки. Приведенный модуль множества B относительно точки $z = 0$ обозначаем через $m(B)$, связную компоненту множества $B \cap U_r$, содержащую начало координат, через B_r. Приведенный модуль неодносвязной области понимаем в смысле определения в [2]. Под функцией Грина $G(z, \zeta)$ открытого множества B понимаем функцию Грина связной компоненты этого множества, содержащей точку ζ. Функцию Грина $G(z, \zeta)$ множества B будем предполагать доопределенной нулем на $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$.

В [1] показано, что в семействе H односвязных областей D, $0 \in D \subset U_R$, $m(D) = m$, приведенный модуль $m(D_r)$ принимает наименьшее значение в случае $D = \Delta_{R,\rho}$, где ρ определяется из равенства $m(\Delta_{R,\rho}) = m$. Тем самым показано, что в семействе H разность

$$m(D) - m(D_r) \tag{1}$$

Ключевые слова: приведенный модуль, поляризация, симметризация, экстремальная метрика, функция Грина.

достигает своего наибольшего значения в том случае, когда область D симметрична относительно вещественной оси. Цель настоящей работы показать, что при поляризации и круговой симметризации области D разность (1) не уменьшается.

1. Поляризация

Пусть B – содержащая начало координат компонента связности множества, полученного в результате поляризации области D, $0 \in D \subset U_R$, относительно прямой $l(\varphi)$. Через $\widetilde{D}$ будем обозначать наименьшую односвязную область на $\mathbb{C}$, удовлетворяющую условию $B \subset \widetilde{D}$. Поскольку при поляризации приведенный модуль области не уменьшается (см., например, [2]) и $\widetilde{D_r} \subset \widetilde{D}_r$, то $m(\widetilde{D}_r) \geqslant m(\widetilde{D_r}) \geqslant m(D_r)$ при всех $r \in (0, R]$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть D – односвязная область, $0 \in D \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$*

$$m(\widetilde{D}) - m(\widetilde{D}_r) \geqslant m(D) - m(D_r). \tag{2}$$

При доказательстве теоремы 1 нам потребуется следующая

Лемма 1. *Если D, D' – односвязные области и $0 \in D' \subset D \subset U_R$, то при любом $r \in (0, R)$*

$$m(D) - m(D_r) \geqslant m(D') - m(D'_r). \tag{3}$$

Если $D \cap T_r \neq \varnothing$, то равенство в этом неравенстве достигается только в случае $D = D'$.

Доказательство. Пусть $G(z, 0)$, $G_r(z, 0)$, $G'(z, 0)$, $G'_r(z, 0)$ – функции Грина областей D, D_r, D', D'_r соответственно. Тогда

$$h(z) = G(z, 0) + G'_r(z, 0) - G'(z, 0) - G_r(z, 0) \tag{4}$$

– гармоническая в D'_r функция. На $\partial D'_r$ эта функция неотрицательна. Действительно, если $z \in \partial D'_r$, то либо $z \in \partial D'$ и, значит, $G'(z, 0) = G'_r(z, 0) = 0$ и $h(z) = G(z, 0) - G_r(z, 0) \geqslant 0$, либо $|z| = r$ и, значит, $G'_r(z, 0) = G_r(z, 0) = 0$ и $h(z) = G(z, 0) - G'(z, 0) \geqslant 0$. По принципу минимума для гармонических функций

$$h(0) \geqslant 0, \quad z \in D'_r. \tag{5}$$

Поскольку для функции Грина области B имеет место асимптотическое равенство

$$G_B(z,0) = -\log|z| + m(B) + o(1), \tag{6}$$

то из (4) и (5) вытекает справедливость неравенства (3).

Пусть в (3) имеет место знак равенства, то есть

$$m(D) - m(D_r) = m(D') - m(D'_r) \tag{7}$$

и $D \cap T_r \neq \varnothing$. Из (4), (6) и (7) тогда получаем $h(0) = 0$ и по принципу минимума для гармонических функций $h(z) \equiv 0$ в $\overline{D'_r}$. Для $z \in D \cap T_r$ тогда имеем $h(z) = G(z,0) - G'(z,0) = 0$, что возможно только в случае $D = D'$. □

Доказательство теоремы 1. Можем считать, что $\varphi = 0$ и $(D \cup D^*)^+ \cup (D \cap D^*)^-$ – результат поляризации области D. Область, граница которой является объединением конечного числа отрезков на лучах $\{\arg z = \mathrm{const}\}$ и конечного числа замкнутых дуг на окружностях T_r, следуя [1], будем называть *полигональной*.

Докажем сначала утверждение теоремы в том случае, когда множество $\overline{U_R \setminus D}$ является объединением конечного числа замкнутых круговых прямоугольников, на которые разбивает $\overline{U_R}$ полярная сетка прямых $\{z : \operatorname{Im}(z^n) = 0\}$ и окружностей $T_{k\delta}$, $k = 1, \dots, n$, $\delta = R/n$. В этом случае области D_r и $\widetilde{D_r}$ при любом $r \in (0, R]$ являются полигональными. Пусть $z = g(\zeta)$, $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$, – конформный гомеоморфизм круга $\{|\zeta| < 1\}$ на область D_r и пусть $\zeta = f(z)$ – обратное отображение. Поскольку D_r – полигональная область, то (см. [1, Лемма 1]) функция $m(D_t)$ дифференцируема слева в точке $t = r$ и

$$\frac{d}{dt} m(D_t)\Big|_{t=r-0} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_E \frac{|d\zeta|}{|g'(\zeta)|}\,,$$

где $E = g^{-1}(S_r)$, $S_r = \partial D_r \setminus \overline{\partial D_r \cap U_r}$. Геометрический смысл этого равенства становится очевидным, если в интеграле справа сделать замену переменной $\zeta = f(z)$. Получим

$$\frac{d}{dt} m(D_t)\Big|_{t=r-0} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{S_r} |f'(z)|^2\,|dz| = \int\limits_{T_r} \mu_r(z)^2\,|dz|, \tag{8}$$

где

$$\mu_r(z)\,|dz| = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right| |dz|, & \text{если } z \in D_r \cup S_r, \\ 0, & \text{если } z \notin D_r \cup S_r, \end{cases} \tag{9}$$

– экстремальная метрика семейства кривых отделяющих границу области D_r от точки $z = 0$. Таким образом, $d\,m(D_t)\big|_{t=r-0}$ – это площадь "отрезаемого" кольца $\{r - dr < |z| < r\}$ в экстремальной метрике. Отметим, что функция $\mu_r(\theta) = \mu_r(re^{i\theta})$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, поскольку $f'(z) = 0$ в концевых точках дуг множества S_r (см. [1], стр. 152).

Аналогично,

$$\frac{d}{dt} m(\widetilde{D_t})\Big|_{t=r-0} = \int\limits_{T_r} \widetilde{\mu}_r(z)^2\,|dz|, \tag{10}$$

где $\widetilde{\mu}_r(z)$ – экстремальная метрика семейства кривых отделяющих границу области $\widetilde{D_r}$ от точки $z = 0$.

Зафиксируем $r \in (0, R]$ и сравним значения функций Грина $G_r(z,\zeta)$, $\widehat{G}_r(z,\zeta)$ и $\widetilde{G}_r(z,\zeta)$ областей D_r, B_r и $\widetilde{D_r}$ соответственно. Поскольку $B \subset \widetilde{D}$, то

$$\widetilde{G}_r(z,0) \geqslant \widehat{G}_r(z,0), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

В [3, теорема 1] показано, что при всех $z \in \mathbb{C}^+$

$$\widehat{G}_r(z,0) \geqslant \max\{G_r(z,0), G_r(\bar{z},0)\}, \tag{12}$$

$$\widehat{G}_r(z,0) + \widehat{G}_r(\bar{z},0) \geqslant G_r(z,0) + G_r(\bar{z},0). \tag{13}$$

Поскольку функции $\widetilde{G}_r(z,0)$ и $G_r(z,0)$ неотрицательны, и на T_r обращаются в нуль, то из (11–13) вытекает, что при всех $z \in T_r^+$

$$\frac{\partial \widetilde{G}_r(z,0)}{\partial n} \geqslant \max\left\{\frac{\partial G_r(z,0)}{\partial n}, \frac{\partial G_r(\bar{z},0)}{\partial n}\right\},$$

$$\frac{\partial \widetilde{G}_r(z,0)}{\partial n} + \frac{\partial \widetilde{G}_r(\bar{z},0)}{\partial n} \geqslant \frac{\partial G_r(z)}{\partial n} + \frac{\partial G_r(\bar{z})}{\partial n},$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к T_r. Выражая в этих неравенствах производные по нормали через функции $\widetilde{\mu}_r(z)$ и $\mu_r(z)$, для всех $z \in T_r^+$ получим

$$\widetilde{\mu}_r(z) \geqslant \max\{\mu_r(z), \mu_r(\bar{z})\}, \tag{14}$$

$$\widetilde{\mu}_r(z) + \widetilde{\mu}_r(\bar{z}) \geqslant \mu_r(z) + \mu_r(\bar{z}). \tag{15}$$

Воспользуемся теперь следующей леммой о выпуклых функциях.

Лемма 2. *Если $F(t)$ – строго выпуклая неубывающая функция, $d \geqslant c \geqslant b$, $a + d \geqslant b + c$, то*

$$F(a) + F(d) \geqslant F(b) + F(c).$$

В силу леммы 2 из (14) и (15) вытекает, что для всех $z \in T_r^+$

$$\widetilde{\mu}_r^2(z) + \widetilde{\mu}_r^2(\bar{z}) \geqslant \mu_r^2(z) + \mu_r^2(\bar{z}). \tag{16}$$

Из (8),(10) и (16) получаем

$$\frac{d}{dt}\left[m(\widetilde{D_t}) - m(D_t)\right]\Big|_{t=r-0} = \int\limits_{T_r}\left[\widetilde{\mu}_r(z)^2 - \mu_r(z)^2\right]|dz|$$

$$= \int\limits_{T_r^+}\left[\widetilde{\mu}_r(z)^2 + \widetilde{\mu}_r(\bar{z})^2 - \left(\mu_r(z)^2 + \mu_r(\bar{z})^2\right)\right]|dz| \geqslant 0. \tag{17}$$

По теореме Каратеодори о сходимости к ядру функции $m(\widetilde{D}_r)$ и $m(D_r)$ непрерывны на $(0,R]$, а функция $m(\widetilde{D_r})$ непрерывна на промежутках $(r_k, r_{k-1}]$, $k = 1,\dots,n$, где $r_k = (n-k)\delta$. Если $r_1 < r \leqslant R$, то области $\widetilde{D}_r$ и $\widetilde{D_r}$ заведомо совпадают. Из (17) поэтому вытекает, что неравенство (2) справедливо при $r \in (r_1, R]$. Поскольку функции $m(\widetilde{D}_r)$ и $m(D_r)$ непрерывны, то это неравенство справедливо и при $r = r_1$, т.е.

$$m(\widetilde{D}) - m(\widetilde{D}_{r_1}) \geqslant m(D) - m(D_{r_1}). \tag{18}$$

Пусть $r \in (r_2, r_1]$. Поскольку $\widetilde{D_r} \subset \widetilde{D}_r$, то из (17) и леммы 1 получаем

$$m(\widetilde{D}_{r_1}) - m(\widetilde{D}_r) \geqslant m(\widetilde{D_{r_1}}) - m(\widetilde{D_r}) \geqslant m(D_{r_1}) - m(D_r). \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает, что неравенство (2) справедливо при $r \in (r_2, r_1]$. Рассуждая далее таким же образом, установим, что утверждение теоремы в рассматриваемом случае справедливо при всех $r \in (0, R]$.

Пусть теперь D, $0 \in D$, – произвольная односвязная область в U_R. Положим $D^{(1)} = U_R \setminus K^{(1)}$, где $K^{(1)}$ – объединение замкнутых круговых прямоугольников рассмотренной выше полярной сетки, пересекающихся с $\partial D \setminus T_R$. Уменьшив вдвое шаг полярной сетки, построим область $D^{(2)} = U_R \setminus K^{(2)}$, и т.д. В результате получим последовательность областей $D^{(1)} \subset D^{(2)} \subset \cdots \subset D^{(n)} \subset \cdots$, сходящуюся к области D, как к ядру. По теореме Каратеодори $m(\widetilde{D}_r^{(n)}) \to m(\widetilde{D}_r)$ и

$m\big(D_r^{(n)}\big) \to m(D_r)$ при $n \to \infty$ для всех $r \in (0, R]$. Справедливость неравенства (2) для областей $D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots$ установлена выше. Переходя в неравенстве

$$m(\widetilde{D}^{(n)}) - m(\widetilde{D}_r^{(n)}) \geqslant m(D^{(n)}) - m(D_r^{(n)})$$

к пределу при $n \to \infty$, установим справедливость неравенства (2) для области D. $\square$

2. Симметризация

Через $\operatorname{Sym} D$ будем обозначать результат круговой симметризации области D относительно вещественной отрицательной полуоси. Известно (см., например, [2]), что при симметризации приведенный модуль области не уменьшается. Поэтому $m\big((\operatorname{Sym} D)_r\big) \geqslant m(D_r)$ при всех $r \in (0, R]$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть D – односвязная область, $0 \in D \subset U_R$. Тогда при всех $r \in (0, R]$*

$$m(\operatorname{Sym} D) - m\big((\operatorname{Sym} D)_r\big) \geqslant m(D) - m(D_r).$$

Доказательство. Предположим сначала, что множество $K = \overline{U_R \setminus D}$ является объединением конечного числа замкнутых круговых прямоугольников, на которые разбивает $\overline{U_R}$ полярная сетка прямых $\{z : \operatorname{Im}(z^n) = 0\}$ и окружностей $T_{k\delta}$, $k = 1, \ldots, n$, $\delta = R/n$. Примéним описанный в [2] алгоритм симметризации такой области при помощи последовательности поляризаций. Пусть φ_1 кратно $\pi/(2n)$; $\widehat{D}^{(1)}$ – содержащая начало координат связная компонента множества, полученного в результате поляризации области D относительно прямой $l(\varphi_1)$; $\widetilde{D}^{(1)}$ – область, полученная после "затирания" внутренних разрезов области $\widehat{D}^{(1)}$, образованных в результате поляризации; $G_r(z, \zeta)$ и $\widetilde{G}_r^{(1)}(z, \zeta)$ – функции Грина областей D_r и $\widetilde{D}_r^{(1)}$ соответственно.

Положим

$$I\big(f(z)\big) := \int\limits_{T_r} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial n}\right)^2 |dz|,$$

где $\partial/\partial n$ – производная вещественной функции $f(z)$ по внутренней нормали к T_r. Также, как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$I\big(\widetilde{G}_r^{(1)}(z, 0)\big) \geqslant I\big(G_r(z, 0)\big).$$

Производя поляризацию области $\widetilde{D}^{(1)}$ относительно прямой $l(\varphi_2)$, аналогичным способом построим $\widetilde{D}^{(2)}$. Для функции Грина $\widetilde{G}_r^{(2)}(z,\zeta)$ области $\widetilde{D}_r^{(2)}$ будет выполняться неравенство

$$I\big(\widetilde{G}_r^{(2)}(z,0)\big) \geqslant I\big(\widetilde{G}_r^{(1)}(z,0)\big).$$

В [2] показано, что при подходящем выборе прямых $l(\varphi_1)$, $l(\varphi_2)$,..., продолжая этот процесс, за конечное число шагов (обозначим это число через n) будет получена односвязная область $\widetilde{D}^{(n)}$, для которой $\operatorname{Sym}\widetilde{D}^{(n)} = \widetilde{D}^{(n)}$. Для функции Грина $\widetilde{G}_r^{(n)}(z,\zeta)$ области $\widetilde{D}_r^{(n)}$ будет выполняться неравенство

$$I\big(\widetilde{G}_r^{(n)}(z,0)\big) \geqslant I\big(G_r(z,0)\big).$$

Это неравенство справедливо при всех $r \in (0,R]$. Рассуждая также как и при доказательстве теоремы 1, получим, что

$$m(\widetilde{D}^{(n)}) - m(\widetilde{D}_r^{(n)}) \geqslant m(D) - m(D_r), \quad r \in (0,R]. \tag{20}$$

Поскольку после проведения каждой поляризации мы выбирали связную компоненту поляризованного множества, то, в общем случае, $\widetilde{D}^{(n)} \subset \operatorname{Sym} D$. На основании леммы 1 имеем

$$m(\operatorname{Sym} D) - m\big((\operatorname{Sym} D)_r\big) \geqslant m\big(\widetilde{D}^{(n)}\big) - m\big(\widetilde{D}_r^{(n)}\big), \quad r \in (0,R]. \tag{21}$$

Из (20) и (21) вытекает справедливость утверждения теоремы в рассматриваемом случае.

Для доказательства теоремы 2 в случае произвольной односвязной области D рассмотрим опять исчерпание этой области последовательностью областей $D^{(k)}$, $k = 1,2,\ldots$, граница каждой из которых расположена на полярной сетке, а шаг полярной сетки уменьшается с возрастанием k. Для областей этой последовательности утверждение теоремы доказано. Переходя к пределу и применяя теорему Каратеодори о сходимости к ядру, докажем справедливость теоремы в общем случае. □

Следствие 1. *Пусть D – односвязная область, $0<\rho<R$, $0 \in D \subset U_R \setminus \{\rho\}$. Тогда при всех $r \in (0,R)$*

$$m(D) - m(D_r) \leqslant m(\Delta) - m(\Delta_r),$$

где $\Delta = \Delta_R,\rho$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Sym} D \subset \Delta$, то в силу теоремы 2 и леммы 1

$$m(D) - m(D_r) \leqslant m(\operatorname{Sym} D) - m\big((\operatorname{Sym} D)_r\big) \leqslant m(\Delta) - m(\Delta_r). \qquad \square$$

Следствие 2 [4]. *Пусть* $\varepsilon > 0,\ 0 < |a| < r = (1+\varepsilon)^{-1},\ D$ *– односвязная область,* $0 \in D \subset U \setminus \{a\}$. *Тогда*

$$m(r^{-1} D_r) \geqslant m(D) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-|a|}{1+|a|}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Доказательство. Можем считать, что $a > 0$. По следствию 1

$$m(D_r) \geqslant m(D) - \big(m(\Delta_{1,a}) - m(\Delta_{r,a})\big) = m(D) - \frac{1}{\pi}\log\Big(1 + \frac{a\varepsilon}{1+a}\Big).$$

Откуда

$$m(r^{-1}D_r) = m(D_r) + \frac{\log(1+\varepsilon)}{2\pi} \geqslant m(D) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-a}{1+a}\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad \square$$

Литература

1. А. Ю. Солынин, *Минимизация конформного радиуса при круговом сужении области.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 145–164.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
3. А. Ю. Солынин, *Поляризация и функциональные неравенства.* Алгебра и анализ, **8**, вып. 6 (1996), 148–185.
4. В. О. Кузнецов, *О геометрических свойствах экстремальных разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 121–135.

Kuznetsov V. O. Polarization and circular truncation of a domain.

Difference of the reduced module $m(D)$ of a simply connected domain D with respect to $z = 0$ and the reduced module $m(D_r)$ of its circular truncation, where D_r is the connected component of the set $D \cap \{|z| < r\}$, containing the point $z = 0$, is considered. It is proved that in the case of polarization and circular symmetrization of the domain D this difference does not decrease.

Государственный университет
морского и речного флота
им. адмирала С. О. Макарова
E-mail: kvo_kuz@mail.ru

Поступило 5 ноября 2015 г.