Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

В. Г. Журавлев

ДЕЛЯЩИЕСЯ РАЗБИЕНИЯ ТОРА И МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА

Введение

0.1. Вкладывающиеся развертки тора и их дифференцируемость. Рассматриваются перекладывающиеся развертки

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \tag{0.1}$$

двумерного тора $\mathbf{T}$, состоящие из трех параллелограммов T_0, T_1, T_2, перекладывание которых равносильно преобразованию сдвига тора $\mathbf{T}$ на некоторый вектор. Важным понятием, используемым в настоящей работе, является вложение

$$T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{0.2}$$

развертки T в объемлющий тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Одним из следствий вложимости (0.2) будет существование разбиения

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2, \tag{0.3}$$

тора $\mathbb{T}^2$ на три орбитных разбиения $\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k-1}(T_k)$.

Пусть $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из $\Sigma = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$, и $[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ обозначает отрезок из первых n членов последовательности ξ. Тогда по теореме 3.1 можно определить $[\xi]_n$-производные, переводящие развертки T из (0.1) в перекладывающиеся развертки тора

$$T^{[\xi]_n} = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n} \tag{0.4}$$

такого же типа, т.е. снова состоящие из трех параллелограммов $T_0^{[\xi]_n}$, $T_1^{[\xi]_n}$, $T_2^{[\xi]_n}$ и вкладывающиеся

$$T^{[\xi]_n} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$$

в тот же тор $\mathbb{T}^2$.

Ключевые слова: индуцированные разбиения тора, множество ограниченного остатка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00360.

0.2. Множества ограниченного остатка. Для любой начальной точки x_0 на торе $\mathbb{T}^2$ определим функцию распределения $r(i, x_0; T_k^{[\xi]_n})$, равную количеству первых i точек $x_0 = S^0(x_0), S^1(x_0), S^2(x_0), \ldots$ из орбиты $\mathrm{Orb}(x_0)$, попавших в область $T_k^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$ из разбиения (0.4). Обозначим через $\delta(i, x_0; T_k^{[\xi]_n}) = r(i, x_0; T_k^{[\xi]_n}) - a(T_k^{[\xi]_n})i$ отклонение количества попаданий $r(i, x_0; T_k^{[\xi]_n})$ точек орбиты $\mathrm{Orb}(x_0)$ в область $T_k^{[\xi]_n}$ от его среднего значения $a(T_k^{[\xi]_n})i$, где коэффициент $a(T_k^{[\xi]_n}) = |T_k^{[\xi]_n}|$ равен площади параллелограмма $T_k^{[\xi]_n}$.

В теореме 5.1 доказано, что параллелограммы $T_k^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$ будут множествами ограниченного остатка, для которых отклонения $\delta(i,x_0; T_k^{[\xi]_n})$ при всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ ограничены некоторой константой из правой части неравенства (5.12).

Ранее в [1] было доказано, что для вкладывающихся в тор (0.2) разверток T образующие их параллелограммы T_k из (0.1) являются множествами ограниченного остатка. Цель настоящей работы – показать, как исходя из некоторой начальной развертки T с помощью операции дифференцирования $[\xi]_n : \ T \to T^{[\xi]_n}$ можно получить бесконечную последовательность вкладывающихся в тор $\mathbb{T}^2$ разверток $T = T^{[\xi]_0}$, $T^{[\xi]_1}, T^{[\xi]_2}, \ldots$, а затем через них, в свою очередь, получать множества ограниченного остатка $T_k = T_k^{[\xi]_0}, T_k^{[\xi]_1}, T_k^{[\xi]_2}, \ldots$ для $k = 0, 1, 2$.

0.3. История вопроса. Производные множество $T^{[\xi]_n}$ также аналогично (0.3) порождают разбиения

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}_0^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_1^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_2^{[\xi]_n} \tag{0.5}$$

тора $\mathbb{T}^2$ на три орбитных разбиения $\mathcal{T}_k^{[\xi]_n}$. По отношению к разбиению тора (0.5) множество $T^{[\xi]_n}$ является его ядром

$$T^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}^{[\xi]_n}). \tag{0.6}$$

Понятие ядра (0.6) было введено и подробно исследовано в [2], [3]. Его основное свойство состоит в том, что ядро $\mathrm{Kr}^{[\xi]_n}$ является разверткой некоторого тора $\mathbf{T}^{[\xi]_n}$, а индуцированное отображение или отображение первого возвращения

$$S'^{[\xi]_n} = S|_{\mathrm{Kr}^{[\xi]_n}} \tag{0.7}$$

– ограничение сдвига S тора $\mathbb{T}^2$ на его подмножество $\mathrm{Kr}^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$– является сдвигом тора $\mathbf{T}^{[\xi]_n}$, изоморфным перекладыванию трех подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr}^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}_0^{[\xi]_n} \sqcup \mathrm{Kr}_1^{[\xi]_n} \sqcup \mathrm{Kr}_2^{[\xi]_n}. \tag{0.8}$$

Связь между множествами ограниченного остатка и свойствами соответствующего индуцированного отображения (0.7) была открыта Рози [4] и Ференци [5]: каждое подмножество $\mathrm{Kr}_k^{[\xi]_n}$ из разбиения (0.8) есть множество ограниченного остатка. Идея Рози-Ференци была реализована в [2], где доказано общее неравенство

$$|\delta(i, X)| < 2 \tag{0.9}$$

для всех множеств $X \subset \mathbb{T}^2$ из последовательности самоподобных фрактальных ядер Рози $\mathcal{R}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{R}_n \supset \ldots$, радиус которых $r(\mathcal{R}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь мы покажем, как $[\xi]_n$-дифференцирования исходной начальной развертки T тора $\mathbb{T}^2$ порождают ядра $T^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}^{[\xi]_n}$ из (0.4), состоящие из множеств ограниченного остатка $T_k^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}_k^{[\xi]_n}$, $k = 0, 1, 2$, и для таких множеств X в теореме 5.1 докажем аналог неравенства (0.9).

Построенные множества ограниченного остатка X являются многомерными аналогами отрезков Гекке [6,7]. Кроме того, отметим, что каждое ядро $T^{[\xi]_n} = \mathrm{Kr}^{[\xi]_n}$ генерирует сбалансированные последовательности, являющиеся многомерными обобщением последовательностей Штурма [8].

§1. Согласованные тройки векторов и их производные

1.1. Согласованные тройки векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$ из множества индексов $\{0,1,2\}$. Пусть v_0, v_1, v_2 – произвольные векторы из $\mathbb{R}^2$ и $\sigma = \{k, l\}$ из Σ. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные тройки векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$, где индексы лишь обозначают векторы.

Определение 1.1. Пусть $\Delta(v)$ обозначает треугольник с вершинами, расположенными в концах векторов v_0, v_1, v_2, и $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть треугольника $\Delta(v)$. Тогда тройку векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ назовем *согласованной*, если выполнено условие

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{1.1}$$

Определение 1.2. Любую согласованную тройку векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будем для краткости называть *звездой*.

Приведем следующие критерии согласованности.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$T_{k,l} = \{\lambda_k v_k + \lambda_l v_l; \quad \lambda_k, \lambda_l \in [0,1]\} \tag{1.2}$$

замкнутый параллелограмм, натянутый на векторы v_k, v_l. Тогда тройка векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ будет согласованной тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1) векторы v_0, v_1, v_2 – попарно неколлинеарны;

2) любые два параллелограмма $T_{k,l}$ и $T_{k',l'}$ для $\{k,l\} \neq \{k',l'\}$ не имеют общих внутренних точек. Здесь $\{k,l\}$ и $\{k',l'\}$ – двуэлементные подмножества из $\{0,1,2\}$.

Критерий 1.2. Обозначим через

$$C_{k,l} = \{\lambda_k v_k + \lambda_l v_l; \quad \lambda_k > 0, \lambda_l > 0\} \tag{1.3}$$

открытый угол, образованный лучами с направлениями векторов v_k, v_l, и пусть

$$C^{-}_{k,l} = -C_{k,l} = \{\lambda_k v_k + \lambda_l v_l; \quad \lambda_k < 0, \lambda_l < 0\}$$

– центрально симметричный угол для $C_{k,l}$. Тройка векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ согласована тогда и только тогда, когда

$$v_m \in C^{-}_{k,l} \tag{1.4}$$

для всех сочетаний $\sigma = \{k,l\} \subset \Sigma$, где $m \in \{0,1,2\}$ – дополнительный к k, l индекс, т.е. $\{k,l,m\} = \{0,1,2\}$.

Критерий 1.3. При любой перестановке $\{k,l,m\}$ индексов $\{0,1,2\}$ векторы $\mathrm{pr}(v_m, v_k)$ и $\mathrm{pr}(v_m, v_l)$ ненулевые и разнонаправлены, где

$$\mathrm{pr}(v,x) = x - \frac{(v,x)}{(v,v)} v \tag{1.5}$$

– проекция вектора $x \in \mathbb{R}^2$ вдоль v на прямую, проходящую через начало координат и ортогональную к вектору v.

1.2. Производные тройки векторов. Из критерия 1.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что векторы v_0 и $v_{12} = v_1 + v_2$ неколлинеарны. Тогда при этом условии только одна из троек*

$$\{v_0, v_1, v_{12}\} \quad \textit{или} \quad \{v_0, v_{12}, v_2\} \tag{1.6}$$

будет согласованной. □

Определение 1.3. Если для согласованной тройки векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ соответствующая тройка векторов $\{v_0^s, v_1^s, v_2^s\} = \{v_m, v_k, v_l\}$ при всевозможных подстановках

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ m & k & l \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

индексов $\{0, 1, 2\}$ удовлетворяют условию леммы 1.1, то будем говорить, что согласованная тройка векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ *нерывождена* или более кратко – звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ *нерывождена.*

Пусть $\{v_0, v_1, v_2\}$ – нерывожденная тройка векторов и $\sigma = \{k, l\} \subset \Sigma$. Зададим на множестве таких троек отображения

$$\{v_0, v_1, v_2\} \quad \xrightarrow{\sigma} \quad \{v_0, v_1, v_2\}^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\} \tag{1.8}$$

по следующему правилу.

Алгоритм 1.1. 1. Исходная тройка векторов переставляется $\{v_m, v_k, v_l\} = \{v_0^s, v_1^s, v_2^s\}$ согласно перестановке (1.7) и разбивается на два подмножества

$$\{v_0^s, v_1^s, v_2^s\} = \{v_0^s\} \sqcup \{v_1^s, v_2^s\}.$$

2. Векторы из второго подмножества складываются $v_{12}^s = v_1^s + v_2^s$ и составляются две новые тройки векторов

$$\{v_0^s, v_1^s, v_{12}^s\}, \quad \{v_0^s, v_{12}^s, v_2^s\}. \tag{1.9}$$

3. Выбираем из (1.9) согласованную тройку $\{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$. Она и будет образом отображения (1.8).

Так определенную тройку $\{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\} = \{v_0, v_1, v_2\}^\sigma$ назовем *σ-производной* тройки векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$.

По определению (1.8) имеет место формула коммутирования

$$\{v_0, v_1, v_2\}^{\{k,l\}} = \{v_0, v_1, v_2\}^{\{l,k\}}. \tag{1.10}$$

Поэтому для нерывожденной тройки $\{v_0, v_1, v_2\}$ существуют $C_3^2 = 3$ ее производные тройки $\{v_0, v_1, v_2\}^\sigma$. Отметим, что если тройка векторов $\{v_0, v_1, v_2\}$ невырождена, то для нее существует любая из трех σ-производных троек $\{v_0, v_1, v_2\}^\sigma$.

1.3. Инвариантность относительно афинных отображений. Непосредственно из критерия 1.1 вытекает следующее свойство инвариантности троек.

Если $\{v_0, v_1, v_2\}$ – согласованная тройка векторов, то их образы $\{Av_0, Av_1, Av_2\}$ относительно произвольного невырожденного аффинного отображения $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ также образуют согласованную тройку.

Данное свойство позволяет, не уменьшая общности, ограничиваться рассмотрением лишь приведенных троек $\{v_0, v_1, v_2\}$, когда какие-то два выбранные вектора из v_0, v_1, v_2 равны единичным векторам $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Если A – невырожденное аффинное отображение, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \{v_0, v_1, v_2\} & \xrightarrow{\sigma} & \{v_0, v_1, v_2\}^\sigma \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ \{Av_0, Av_1, Av_2\} & \xrightarrow{\sigma} & \{Av_0, Av_1, Av_2\}^\sigma \end{array}$$

Кратко диаграмму можно записать в виде формулы коммутируемости

$$A\{v_0, v_1, v_2\}^\sigma = \{Av_0, Av_1, Av_2\}^\sigma \tag{1.11}$$

σ-производных с аффинными отображениями $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, l_2] \tag{2.1}$$

– полная решетка в $\mathbb{R}^2$ с базисом l_1, l_2, т.е. векторы l_1, l_2 линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^2 = \mathbb{R}^2/L$, если отображение

$$T \longrightarrow \mathbb{T}_L^2 : \quad x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение
$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \tag{2.2}$$
и перекладывание
$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.3}$$
на векторы v_0, v_1, v_2, связанные с базисом решетки L равенствами
$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, 2. \tag{2.4}$$
В формуле (2.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для цвета точек x, принадлежащих подмножеству T_k, где $k = 0, 1, 2$.

Заметим, что при переходе (2.4) от векторов переклыдывания v_0, v_1, v_2 к базизу l_1, l_2 решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно для него ввести дополнительное обозначение
$$v_0 = \alpha'. \tag{2.5}$$
В частности, из равенств (2.4) и (2.5) вытекают сравнения
$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$
для всех $k = 0, 1, 2$. Поэтому перекладывание (2.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:
$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.6}$$
на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Примеры: шестиугольник и его деформации. Определим для $m = 0, 1, 2$ параллелограммы T_m, имеющие те же внутренние части
$$T_m^{\mathrm{int}} = T_{k,l}^{\mathrm{int}},$$
что и параллелограммы $T_{k,l}$ из (1.2), где m – дополнительный к $\{k, l\}$ индекс в $\{0, 1, 2\}$. Стороны и вершины параллелограммов $T_{k,l}$ распределим между соответствующими параллелограммами T_m, так чтобы выполнялись следующие условия:

1) каждому T_m принадлежали две смежные стороны и соединяющая их вершина;

2) получающееся при этом объединение $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ является разбиением множества T.

Для определенности положим, что
$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2. \tag{2.7}$$

В результате множество

$$T = T(v) = T(v_0, v_1, v_2) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \tag{2.8}$$

будет перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^2_L$ с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 в случае, если данная тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ согласована.

Приведенная конструкция развертки T не является жесткой. Параллельные стороны параллелограммов T_0, T_1, T_2 допускают малые деформации, при которых измененное множество остается перекладывающейся разверткой тора с прежними векторами перекладывания.

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^2_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^2/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$, полагая

$$\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \operatorname{mod} \mathcal{L}. \tag{2.9}$$

Далее торы $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^2_L$ с изменяющимися решетками L.

В качестве основной решетки $\mathcal{L}$ чаще всего будет выбираться квадратная решетка $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}[e_1, e_2]$ с ортонормированным базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. В этом случае вектор сдвига из (2.9) будем записывать в обычном виде $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. $\triangleright$ Перекладывающаяся развертка T из (2.2) *вкладывается*

$$T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \tag{2.10}$$

в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. Подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$ является *$\mathcal{L}$-различимым*, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \operatorname{mod} \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение

$$T \longrightarrow T \operatorname{mod} \mathcal{L}: \quad x \mapsto x \operatorname{mod} \mathcal{L} \tag{2.11}$$

есть биекция; и поэтому используя отображение (2.11) можем считать развертку T вложенной как множество

$$T \subset \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \tag{2.12}$$

в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$.

2. Векторы перекладывания (2.3) имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \mod \mathcal{L} \tag{2.13}$$

для всех $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \dots$

3. Пусть

$$\mathrm{Orb}'(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 1, \dots, m_k - 1\} \tag{2.14}$$

обозначает *орбиту* подмножества $T_k \subset T$. В силу включения (2.12) будем полагать $\mathrm{Orb}'_k \subseteq \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению орбиты (2.14) удовлетворяют условию

$$\mathrm{Orb}'(T_k) \cap T = \varnothing \tag{2.15}$$

для $k = 0, 1, 2$. $\lhd$

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.14) определить еще *полные* орбиты

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 0, 1, \dots, n_k - 1\}. \tag{2.16}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига α из (2.9) *иррациональным*, когда

$$\text{числа} \quad 1, \alpha_1, \alpha_2 \quad \text{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Здесь α_1, α_2 – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 2.1. *Пусть развертка T вкладывается* (2.10) *в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α сдвига $S = S_\alpha$ из* (2.9) *будет иррациональным* (2.17). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing \tag{2.18}$$

только при условии $j_1 = j_2$ и $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2, \tag{2.19}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.16).

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (2.18), при этом можем считать $j_1 \geqslant j_2$. Тогда из (2.18) следует

$$S^{j_1-j_2}(T_{k_1}) \cap S^0(T_{k_2}) = S^{j_1-j_2}(T_{k_1}) \cap T_{k_2} \neq \varnothing$$

и, значит,

$$S^j(T_{k_1}) \cap T \neq \varnothing, \tag{2.20}$$

где $j = j_1 - j_2$. По условию имеем $0 \leqslant j \leqslant j_1 \leqslant m_{k_1} - 1$. Отсюда, из определения 1.1 и условия (2.15) получаем $j = 0$, т.е. $j_1 = j_2$. Следовательно, из свойства (2.20) будет вытекать $T_{k_1} \cap T_{k_2} \neq \varnothing$, поэтому $k_1 = k_2$ и, тем самым, первое утверждение (2.18) доказано. □

Чтобы доказать второе утверждение теоремы 2.1, нам потребуется

Лемма 2.1. *Множество $\mathcal{T}$, определенное в* (2.19)*, замкнуто*

$$S : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \tag{2.21}$$

относительно сдвига $S = S_\alpha$.

Доказательство леммы. Выберем любое множество $S^j(T_k)$ из орбиты $\mathrm{Orb}(T_k)$ со степенью $0 \leqslant j < m_k - 1$. Тогда выполняется включение

$$S(S^j(T_k)) = S^{j+1}(T_k) \subset \mathrm{Orb}(T_k), \tag{2.22}$$

так как $j \leqslant m_k - 1$.

Если же выбрать множество $S^{m_k-1}(T_k)$ из $\mathrm{Orb}(T_k)$, то имеем

$$S(S^{m_k-1}(T_k)) = S^{m_k}(T_k) \quad \equiv \quad T_k + m_k\alpha \bmod \mathcal{L} \quad \equiv \quad T_k + v_k \bmod \mathcal{L}. \tag{2.23}$$

Поскольку по определению (2.3) можем записать $T_k + v_k \subset T$, то отсюда и (2.23) следует

$$S(S^{m_k-1}(T_k)) \subset T \bmod \mathcal{L}. \tag{2.24}$$

Из включений (2.22) и (2.24) получаем замкнутость (2.21) разбиения $\mathcal{T}$. Лемма доказана. □

Доказательство второго утверждения теоремы. 2.1. По условию множество T имеет внутреннюю точку $x^* \in T$. Это значит существует шар $B_\varepsilon(x^*) \subset T$ с центром в точке x^* радиуса $\varepsilon > 0$. По определению 1.1 множество $T \subset \mathbb{R}^2$ является $\mathcal{L}$-различимым, значит, и его подмножество $B_\varepsilon(x^*)$ также будет $\mathcal{L}$-различимо. Поэтому можем считать шар $B_\varepsilon(x^*)$ вложенным в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$.

Пусть x – произвольная точка на торе $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$. По условию теоремы сдвиг тора $S = S_\alpha$ определен для иррационального вектора α. По теореме Вейля [9] орбита любой точки под действием сдвига S с иррациональным вектором (2.17) всюду плотна на торе $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$. Поэтому найдется такое $j = 0, 1, 2, \ldots$, для которого образ $S^{-j}(x)$ точки $x \in \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ попадет в шар $B_\varepsilon(x^*)$.

Итак, мы имеем точку x_0, удовлетворяющую условию $x_0 = S^{-j}(x) \in B_\varepsilon(x^*)$ и, следовательно, в силу включений $B_\varepsilon(x^*) \subset T \subset \mathcal{T}$ точка x_0 будет принадлежать

$$x_0 = S^{-j}(x) \in \mathcal{T} \tag{2.25}$$

разбиению (2.19). Но по лемме 1.1 разбиение $\mathcal{T}$ замкнуто относительно сдвига S тора $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$. Тогда ввиду включения (2.25) точка $S^j(x_0) = x$ также будет принадлежать разбиению $\mathcal{T}$. Поскольку точка x была произвольной, то тем самым второе утверждение теоремы 2.1 доказано. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ из (2.9), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{2.26}$$

Обозначим соответственно

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2 \tag{2.27}$$

развертку T из (2.2) и *индуцированное разбиение* тора $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется [2, 3] *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ будем использовать обозначения

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{2.28}$$

Ядро (2.28) характеризуется следующим свойством:

Kr – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^2$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}} \tag{2.29}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.9), эквивалентно перекладыванию трех подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \mathrm{Kr}_2. \tag{2.30}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (2.30) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^2$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^2_L$, а индуцированное отображение (2.29) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости шестиугольной развертки тора.

Теорема 2.2. *Развертка $T = T(v)$ вкладывается (2.10) в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *определенное в (2.27) множество $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$ является разбиением тора $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$;*

2) *внутренняя часть T^{int} развертки $T \subset \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ не содержит ни одной из точек x_j орбиты*

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) = \quad \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \ldots, \mathbf{m} - 1\}, \tag{2.31}$$

где

$$\mathbf{m} = m_0 + m_1 + m_2. \tag{2.32}$$

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из теоремы 2.1.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что из вложения $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ следует $T \cap \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) = \varnothing$. Все точки орбиты $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m})$ являются вершинами параллелограммов из орбитного разбиения

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k),$$

составленного из параллелограммов, входящих в орбиту $\mathrm{Orb}'(T_k)$. Отсюда и существования (2.27) разбиения тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2$ выводим $T \cap \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) = \varnothing$.

Методом от противного докажем обратное утверждение. Пусть какой-то параллелограмм $T_k^j = S^j(T_k)$ с индексом $0 < j < n_k$ из разбиения $\mathcal{T}_k$ пересекается $T_k^j \cap T \neq \varnothing$ с разверткой (шестиугольником) T. Предположим, что пересечение $T_k^j \cap T$ содержит внутреннюю точку развертки T. Тогда одна из вершин параллелограмма T_k^j также попадает в T^{int}. Но в этом случае мы приходим к противоречию, поскольку при условии $0 < j < m_k$ указанная вершина будет содержаться в орбите $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m})$.

Наконец, осталось рассмотреть случай, когда

$$\overline{T}_k^j \cap \overline{T} \subset \partial\overline{T}. \tag{2.33}$$

Здесь через $\overline{T}_k^j$ и $\overline{T}$ мы обозначили замыкания T_k^j и T, а $\partial\overline{T}$ – объединение сторон шестиугольника T. Однако, не трудно видеть, что согласно определению (2.27) развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ при прикладывании к ней параллелограммов $T_k^j = S^j(T_k)$ последние не пересекаются с выпуклым шестиугольником T. Следовательно, включение (2.33) не может иметь место. □

§3. Производные разбиения тора

3.1. Производные вкладывающихся троек векторов. Основная теорема.

Определение 3.1. Пусть $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.27) тора $\mathbb{T}^2_L$ с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \tag{3.1}$$

в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Теорема 3.1. *Пусть звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается (3.1) в тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Тогда ее любая σ-производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \tag{3.2}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Доказательство вытекает из теоремы 3.2 частного вида, которая будет приведена ниже.

Чтобы сформулировать указанную теорему, нам потрубуются несколько дополнительных разъяснений.

3.2. Инвариантность вложений согласованных троек векторов. Операция вложения (3.1) звезд v инвариантна

$$\begin{array}{ccc} v & \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}} \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^2_{A\mathcal{L}} \end{array} \tag{3.3}$$

относительно невырожденных аффинных преобразований $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. В диаграмме (3.3) нижнее вложение звезды $Av = \{Av_0, Av_1, Av_2\}$ рассматривается относительно сдвига

$$S_{A\alpha} : \mathbb{T}^2_{A\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^2_{A\mathcal{L}}$$

тора $\mathbb{T}^2_{A\mathcal{L}} = \mathbb{R}^2/A\mathcal{L}$, т.е. вектор сдвига α и решетка тора $\mathcal{L}$ преобразуются тем же преобразованием A.

3.3. Приведенные звезды. Согласно диаграмме (3.3) для любой невырожденной звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ и любого аффинного отображения $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ звезда $Av = \{Av_0, Av_1, Av_2\}$ снова будет невырожденной и для нее существует $\{1,2\}$-производная

$$\{Av_0, Av_1, Av_2\}^{\{1,2\}} = \{(Av_0)', (Av_1)', (Av_2)'\}. \tag{3.4}$$

Дополнительно предположим, что производная тройка (3.4) имеет векторы

$$(Av_0)' = Av_0, \quad (Av_1)' = Av_1, \quad (Av_2)' = Av_1 + Av_2.$$

По определению звезды векторы v_0, v_2 линейно независимы. Поэтому можно выбрать аффинное отображение $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ с условием

$$Av_2 = e_1, \quad Av_0 = e_2.$$

Чтобы не усложнять обозначения, можем с самого начала считать исходную звезду $v = \{v_0, v_1, v_2\}$, содержащую единичные векторы

$$v_2 = e_1, \quad v_0 = e_2. \tag{3.5}$$

Пусть теперь $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ – невырожденная звезда, удовлетворяющая условию (3.5), и такая, что ее $\{1,2\}$-производная

$$\{v_0, v_1, v_2\}^{\{1,2\}} = \{v_0', v_1', v_2'\} \tag{3.6}$$

имеет векторы

$$v_0' = v_0, \quad v_1' = v_1, \quad v_2' = v_1 + v_2. \tag{3.7}$$

Здесь главное ограничение на вектор $v_2' = v_1 + v_2$. Переставляя местами векторы v_1 и v_2 в тройке $\{v_0, v_1, v_2\}$, т.е. снова действую на нее аффинным преобразованием с перестановочной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

всегда можно добится выполнения условия (3.7). Более того, с помощью перестановочных матриц $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ вида (3.8) любую σ-производную звезду v^σ, где $\sigma \in \Sigma$, можно свести к рассмотрению $\{1,2\}$-производных (3.6).

Учитывая, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ невырождена, условие (3.7) будет означать, что оставшийся вектор $v_1 \in \mathbb{R}^2$ имеет координаты

$$v_1 = (x, y), \quad \text{где} \quad -1 < x < 0, \quad -\infty < y < 0 \tag{3.9}$$

в базисе e_1, e_2.

Определение 3.2. Звезду $v = \{v_0, v_1, v_2\}$, удовлетворяющую условиям (3.5) и (3.9), назовем *приведенной.*

Обратно, если $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ – приведенная звезда (3.5) и (3.9), то она обладает свойствами:

1) $\{v_0, v_1, v_2\}$ – согласованная тройка;

2) ее $\{1,2\}$-производная существует и имеет вид

$$\{v_0, v_1, v_2\}^{\{1,2\}} = \{v_0', v_1', v_2'\} = \{v_0, v_1, v_1 + v_2\}. \tag{3.10}$$

Итак, из аффинной инвариантности (3.3) свойста вложимости $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2_{\mathcal{L}}$ следует, что для доказательства приведенной ранее теоремы 3.1 достаточно рассмотреть лишь следующий ее частный случай.

Теорема 3.2. *Пусть приведенная (3.5), (3.9) звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ в тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Тогда ее $\{1,2\}$-производная существует, имеет вид*

$$\{v_0, v_1, v_2\}^{\{1,2\}} = \{v_0', v_1', v_2'\} = \{v_0, v_1, v_1 + v_2\} \tag{3.11}$$

и также вкладывается

$$\{v_0, v_1, v_2\}^{\{1,2\}} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{3.12}$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига S.

Доказательство основывается на точном описании распределения точечных орбит относительно разбиений $\mathcal{T}$ тора $\mathbb{T}^2$.

§4. Структура точечных орбит

4.1. Структура точечной орбиты $\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}')$. Рассмотрим перекладывание $S': T \longrightarrow T$ развертки тора T, являющееся индуцированным отображением $S' = S|_T$ для сдвига тора $S: \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ из (2.9). Подействуем троекратным перекладыванием S' на точку $x_0 = 0$ из T^{int}. Получим следующую внутреннюю точку

$$S'^3(0) = x_{\mathbf{m}} \tag{4.1}$$

из T, где индекс $\mathbf{m}$ был определен в (2.32). Она является первой точкой из орбиты

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m},\mathbf{m}') &= \mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}') \setminus \mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}) \\ &= \{x_j = S^j(0);\ \mathbf{m} \leqslant j \leqslant \mathbf{m}' - 1\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\mathbf{m}' = m_0' + m_1' + m_2' = m_0 + 2m_1 + m_2 = \mathbf{m} + m_1 \tag{4.3}$$

для $\mathbf{m} = m_0 + m_1 + m_2$.

Запишем вторую координату вектора v_1 из (3.9) в виде

$$y = -a - y', \tag{4.4}$$

где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < y' < 1$. Тогда орбиту $\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m},\mathbf{m}')$ можно разложить на следующие последовательности:

$$\begin{array}{llcll} T_0 \ni & x_{\mathbf{m}} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+m_0-1} & \in T_0^j \\ & \downarrow S' & & & \\ T_0 \ni & x_{\mathbf{m}+m_0} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+m_0+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+2m_0-1} & \in T_0^j \\ & \downarrow S' & & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ & \downarrow S' & & & \\ T_0 \ni & x_{\mathbf{m}+(a-1)m_0} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+(a-1)m_0+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+am_0-1} & \in T_0^j \\ & \downarrow S' & & & \\ T_1 \ni & x_{\mathbf{m}+am_0} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+am_0+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+am_0+i'-1} & \in T_1^j \end{array} \tag{4.5}$$

где $i' = 0, 1, 2, \ldots$ – наименьшее число, удовлетворяющее условию $\mathbf{m} + am_0 + i' \leqslant \mathbf{m}'$, т.е. согласно (4.3) – неравенству

$$am_0 + i' \leqslant m_1. \tag{4.6}$$

В диаграмме (4.5) элементы x_* строки с номером $b = 0, 1, \ldots, a$ принадлежат

$$x_{\mathbf{m}+bm_0+j} \in T_k^j \tag{4.7}$$

– соответствующему параллелограмму $T_k^j = S^j(T_k)$ с номером $k = 0, 1$, указанным в диаграмме в левом столбце.

Следующий утверждение описывает структуру точечной орбиты $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}')$.

Предложение 4.1. 1. *Для орбиты* $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}')$ *с номером* $\mathbf{m}'$ *из* (4.3), *определенной в* (2.31), *имеет место следующее разбиение*

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \sqcup \mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}') \sqcup \mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}'). \tag{4.8}$$

Здесь

$$\mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}') \cap T \quad \subset \quad T,$$

где $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}')$ – *орбита* (4.2), *и*

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}') \quad &= \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}') \setminus (\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \sqcup \mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}')) \\ &= \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}') \setminus \mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}'). \end{aligned}$$

2. *Обозначим через* $V_{\mathcal{T}}$ *множество всех вершин параллелограммов* $T_k^j = S^j(T_k)$ *для* $k = 0, 1, 2$, *из которых состоит разбиение* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v_0, v_1, v_2)$, *определенное в* (2.27). *Тогда для начальной орбиты* $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m})$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) = V_{\mathcal{T}} \setminus \{x_0\}, \tag{4.9}$$

где $x_0 = 0$.

3. *Среднее множество* $\mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}')$ *из разложения* (4.8) *состоит*

$$\mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}') = \{x_{\mathbf{m}}, x_{\mathbf{m}+m_0}, \ldots, x_{\mathbf{m}+am_0}\} \tag{4.10}$$

из всех точек, расположенных в левой части диаграммы (4.5), *а последнее множество* $\mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}')$ *из* (4.8) *совпадает*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}') \\ &\quad = \{x_{\mathbf{m}+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+m_0-1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+am_0+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+am_0+i'-1}\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

с множеством всех точек из правой части диаграммы (4.5).

Доказательство. 1. Исходя из определения (4.2) орбиты $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}')$, видим, что (4.8) равносильно разложению

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}'_T(0, \mathbf{m}') \sqcup \mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}, \mathbf{m}'), \tag{4.12}$$

вытекающему из диаграммы (4.5).

2. Из определения (2.27) разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v_0, v_1, v_2)$ следует

$$V_{\mathcal{T}} \subset \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\}. \tag{4.13}$$

Вспоминая соглашение (2.7), проследим движение нулевой вершины $x_0 \in V_0$ под действием сдвига S. Имеем

$$\begin{array}{llcll} V_0 \ni & x_0 & \xrightarrow{S} & x_1 \to \ldots \to x_{m_0-1} & \in V_0^j \\ V_1 \ni & x_{m_0} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+1} \to \ldots \to x_{m_0+m_1-1} & \in V_1^j \\ V_2 \ni & x_{m_0+m_1} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+m_1+1} \to \ldots \to x_{m_0+m_1+m_2-1} & \in V_2^j, \end{array} \tag{4.14}$$

где для вершин параллелограммов T_k использовали обозначения $V_k = V_{T_k}$, $V_k^j = S^j(V_k)$. Из диаграммы (4.14) следует включение

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\} \subset V_{\mathcal{T}},$$

из которого и (4.13) выводим равенство (4.9).

3. Равенства (4.10) и (4.11) непосредственно вытекают из диаграммы (4.5). $\square$

4.2. Доказательство теоремы 3.2. По критерию 2) из теоремы 2.2 для доказательства теоремы 3.1 нужно проверить, что

$$T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}') = \varnothing, \tag{4.15}$$

а для этого достаточно проверить, что развертка T' не пересекается ни с одним множеством из разбиения (4.8) орбиты $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}')$.

С этой целью разложим

$$T' = T'_{\mathrm{new}} \sqcup T'_{\mathrm{old}} \tag{4.16}$$

производную развертку T' на части

$$T'_{\mathrm{old}} = T' \cap T \tag{4.17}$$

и

$$T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} = T'^{\mathrm{int}}_{0,-}. \tag{4.18}$$

Здесь в (4.18) множество $T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{new}}$ является нижней половиной $T'^{\mathrm{int}}_{0,-}$ параллелограмма T'_0.

1. Точки орбиты $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m})$. В силу равенства (4.17) и включения $T'_{\mathrm{old}} = T' \subset T$ имеем

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{old}} = \varnothing, \tag{4.19}$$

а по строению развертки тора T, определению производной T' и равенству (4.9) видим, что

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} = (V_{\mathcal{T}} \setminus \{x_0\}) \cap T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} = \varnothing.$$

Диагональ параллелограмма T_0', проходящая через вершины x_{m_1} и $x_{m_1+m_2}$, кроме этих вершин, не содержит других точек из $\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m})$. Отсюда, (4.18) и (4.19) заключаем

$$\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m})\cap T^{'\mathrm{int}}=\varnothing. \tag{4.20}$$

2. Точки орбиты $\mathrm{Orb}_T'(0,\mathbf{m}')$**.** Из равенства (4.10) предложения 4.1 следует, что

$$\mathrm{Orb}_T'(0,\mathbf{m}')\cap T^{'\mathrm{int}}=\varnothing. \tag{4.21}$$

Среди всех точек из орбиты $\mathrm{Orb}_T'(0,\mathbf{m}')$ лишь первая точка $x_{\mathbf{m}}\in\mathrm{Orb}_T'(0,\mathbf{m}')$ содержится в развертке $\overline{T}'$, так как она является вершиной параллелограмма $T_1'\subset\overline{T}'$.

3. Точки орбиты $\mathrm{Orb}_{\mathrm{new}}'(0,\mathbf{m},\mathbf{m}')$**.** Согласно предложению 4.1 точки x_* орбиты $\mathrm{Orb}_{\mathrm{new}}'(0,\mathbf{m},\mathbf{m}')$ содержатся в параллелограммах $T_k^j=S^j(T_k)$ с номерами $k=0,1$. Поэтому некоторая точка x_* может попасть в разветку T', только если содержащий ее параллелограмм T_0^j или квадрат T_1^j пересекается с T'.

Поскольку существует разбиение тора $\mathcal{T}=\mathcal{T}(v_0,v_1,v_2)=\mathcal{T}_0\sqcup\mathcal{T}_1\sqcup\mathcal{T}_2$ и нас в данном случае интересует лишь нижняя половина $T_{\mathrm{new}}^{'\mathrm{int}}=T_{0,-}^{'\mathrm{int}}$ параллелограмма $T_0'\subset T'$, то образуется связанная цепочка приложенных к T_0' квадратов T_1^j и параллелограмма $T_0^{j'}$, причем первых из ним примыкает к стороне с вершинами x_{n_1} и $x_{n_1+n_2}$ параллелограмма T_0', и в T_0' или T_1^j может содержаться точка x_*.

По (4.5) и (4.11) начальные точки данной орбиты – это $x_{\mathbf{m}+bm_0}\in T_0$ для $b=0,1,\dots,a-1$ и $x_{\mathbf{m}+am_0}\in T_1$. Поэтому будем рассматривать два случая.

А. Случай $x_{\mathbf{n}+bn_0}\in T_0$ представлен ввиде следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
T_0 & \downarrow T_1^{m_1-m_0} & \dots & \downarrow T_1^{m_1-bm_0} & \downarrow T_0^{m_1-bm_0} \\
\Rsh & & & & \Rsh \\
x_{\mathbf{m}+bm_0} & & \dots & & x_{\mathbf{m}'}
\end{array} \tag{4.22}$$

Здесь верхняя строка содержит b квадратов T_1^j, стрелка $\downarrow$ означает прикладывание и знак $\Rsh$ указывет на то, что точка под ним принадлежит верхнему множеству.

Если промежуточных квадратов будет $b+1$, то диаграмма (4.22) примет несколько другой вид

$$\begin{array}{cccccc} T_0 & \downarrow T_1^{m_1-m_0} & \dots & \downarrow T_1^{m_1-bm_0} & \downarrow T_1^{m_1-(b+1)m_0} & \downarrow T_0^{m_1-(b+1)m_0} \\ \Rsh & & & & & \Rsh \\ x_{\mathbf{m}+bm_0} & & \dots & & & x_{2m_1+m_2} \end{array} \tag{4.23}$$

В первом случае точка

$$x_{\mathbf{m}'} \notin \mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m},\mathbf{m}'), \tag{4.24}$$

а во втором $x_{2m_1+m_2} \in \mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m},\mathbf{m}')$ – вершина параллелограмма T'_0 и, значит,

$$x_{2m_1+m_2} \notin T^{'\mathrm{int}}. \tag{4.25}$$

Если же промежуточных квадратов в диаграмме (4.22) будет $c > b+1$, то $T_0^{m_1-cm_0}$ уже не будет пересекаться с параллелограммом T'_0.

Б. Случай. $x_{\mathbf{m}+am_0} \in T_1$. Теперь к параллелограмму $T_0 \subset T$ нужно прикладывать только квадраты T_1^j. Удобно записать движение точек ввиде объединенной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & \downarrow T_1^{m_1-m_0} & \dots & \downarrow T_1^{m_1-am_0} & \downarrow T_1^{m_1-(a+1)m_0} \\ & \Rsh & & \Rsh & \Rsh \\ & x_{\mathbf{m}'+(a-1)m_0} & \dots & x_{\mathbf{m}'} & x_{2m_1+m_2} \end{array} \tag{4.26}$$

В новой ситуации поступим иначе: сначала к параллелограмму $T_0 \subset T$ прикладывем параллелограмм $T_0^{n_1}$. Из построения вытекает включение

$$T^{'\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} \subset T_0^{m_1}. \tag{4.27}$$

Если затем к $T_0^{m_1}$ приложим квадрат $T_1^{m_1+(m_1-m_0)} = T_1^{2m_1-m_0}$, то содержащаяся в нем точка $x_{(\mathbf{m}+am_0)+(2n_1-m_0)} = x_{\mathbf{m}'+(a-1)m_0+m_1}$ ввиду включения (4.27) уже не может попасть

$$x_{\mathbf{m}'+(a-1)m_0+m_1} \notin T^{'\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} \tag{4.28}$$

в нижнюю половину $T^{'\mathrm{int}}_{\mathrm{new}}$ параллелограмма T'_0.

Из (4.22), (4.23) и (4.26) следует свойство

$$\mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m},\mathbf{m}') \cap T^{'\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} = \varnothing. \tag{4.29}$$

Из (4.29), определения (4.18) и диаграммы (4.5) выводим, что

$$\mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m},\mathbf{m}') \cap T^{'\mathrm{int}} = \varnothing. \tag{4.30}$$

Теперь все части (4.8) орбиты $\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}')$ рассмотрены полностью. Из (4.20), (4.21) и (4.30) заключаем, что $T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}') = \varnothing$.

Теорема 3.2, а вместе с ней и теорема 3.1, доказаны полностью. $\square$

§5. Индуцированные множества ограниченного остатка на торе

5.1. Дифференцируемость вложенных звезд. Пусть $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ – нерывожденная звезда (см. определение 1.3). В этом случае для нее существует σ-производная звезда

$$v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$$

для всех сочетаний $\sigma \in \Sigma$. Рассмотрим $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$ – множество всех последовательностей $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ, и пусть $[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ обозначает отрезок из первых n членов последовательности ξ, при этом полагаем, что $[\xi]_0 = \varnothing$. Индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим $[\xi]_n$-*производные*

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \tag{5.1}$$

где $v^{[\xi]_0} = v$ для $n = 0$. Если существует производная (5.1), то будем говорить, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ является $[\xi]_n$-*дифференцируемой*.

Предположим, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Тогда по теореме 3.1 ее $[\xi]_n$-производная звезда

$$v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, v_2^{[\xi]_n}\} \tag{5.2}$$

также вкладывается

$$v^{[\xi]_n} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{5.3}$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига S. По определению (3.1) свойство (5.3) означает, что звезда (5.2) порождает перекладывающуюся развертку тора

$$T^{[\xi]_n} = T(v^{[\xi]_n}) = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n}, \tag{5.4}$$

состоящую из трех параллелограммов $T_0^{[\xi]_n}$, $T_1^{[\xi]_n}$, $T_2^{[\xi]_n}$, и которая вкладывается

$$T^{[\xi]_n} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{5.5}$$

в тор $\mathbb{T}^2$.

5.2. Распределение точек на торе. Для любой начальной точки x_0 на торе $\mathbb{T}^2$ обозначим

$$\mathrm{Orb}(x_0) \quad = \{x_0 = S^0(x_0), \quad x_1 = S^1(x_0), \dots, \quad x_i = S^i(x_0), \dots\}$$

ее *бесконечную орбиту*, и пусть

$$r(i, x_0; T_k^{[\xi]_n}) = \quad \sharp\{x_j = S^j(x_0) \in T_k^{[\xi]_n}, \quad 0 \leqslant j < i\} \tag{5.6}$$

– *функция распределения*, равная количеству первых i точек из орбиты $\mathrm{Orb}(x_0)$, попавших в область $T_k^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$. Кроме того, обозначим через

$$\delta(i, x_0; T_k^{[\xi]_n}) = r(i, x_0; T_k^{[\xi]_n}) - a(T_k^{[\xi]_n})i \tag{5.7}$$

отклонение количества попаданий (5.6) точек орбиты $\mathrm{Orb}(x_0)$ в область $T_k^{[\xi]_n}$ от среднего значения $a(T_k^{[\xi]_n})i$, где коэффициент

$$a(T_k^{[\xi]_n}) = |T_k^{[\xi]_n}|$$

равен площади параллелограмма $T_k^{[\xi]_n}$. Далее мы хотим оценить величину отклонения (5.7). Для этого нам потребуются ввести несколько дополнительных понятий.

Во-первых,

$$\nu(T^{[\xi]_n}) = \frac{|T_{\max}^{[\xi]_n}|}{|T_{\min}^{[\xi]_n}|} \tag{5.8}$$

– верхнюю границу разброса отношений площадей $|T_k^{[\xi]_n}|/|T_{k'}^{[\xi]_n}|$ параллелограммов из развертки (5.4), где

$$|T_{\min}^{[\xi]_n}| = \min_k\{|T_k^{[\xi]_n}|\}, \qquad |T_{\max}^{[\xi]_n}| = \max_k\{|T_k^{[\xi]_n}|\}.$$

Во-вторых, – некоторую метрику $\varrho_{\mathbf{l}}^{[\xi]_n}(x)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, порождаемую $[\xi]_n$-производной звездой $v^{[\xi]_n}$ из (5.2), где

$$\mathbf{l}^{[\xi]_n} = \{l_1^{[\xi]_n}, l_2^{[\xi]_n}\} \tag{5.9}$$

– базис решетки $L^{[\xi]_n}$. Здесь вектора $l_k^{[\xi]_n}$ определяются равенствами $l_k^{[\xi]_n} = v_k^{[\xi]_n} - v_0^{[\xi]_n}$ для $k = 1, 2$ и $T^{[\xi]_n}$ является разверткой тора $\mathbb{T}^2_{L^{[\xi]_n}}$. Указанная *метрика* является шестиугольной, имеющей вид

$$\varrho_{\mathbf{l}}^{[\xi]_n}(x) = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2} |l_k^* \cdot x|, \tag{5.10}$$

при этом l_1^*, l_2^* образуют двойственный для (5.9) базис относительно скалярного поизведения $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ векторов $x = (x_1, x_2)$,

$y = (y_1, y_2)$ из $\mathbb{R}^2$ и $l_0^* = -l_1^* - l_2^*$. По теореме 3.1 решетка $L^{[\xi]_n}$ полная, поэтому двойственный базис $\{l_1^*, l_2^*\}$ существует.

Введение метрики (5.10) мотивировано тем, что через нее удобно оценивать границы для отклонений (5.7). С этой целью определим в данной метрике *относительный диаметр* развертки тора T, полагая

$$d_{\mathbf{1}}^{[\xi]_n}(T^{[\xi]_n}) = \sup_{x,y\in T^{[\xi]_n}} \varrho_{\mathbf{1}}^{[\xi]_n}(x-y). \tag{5.11}$$

5.3. Множества ограниченного остатка. Цель настоящей главы – показать, что параллелограммы $T_0^{[\xi]_n}$, $T_1^{[\xi]_n}$, $T_2^{[\xi]_n}$ из разверток $T^{[\xi]_n}$ являются множествами ограниченного остатка, для которых отклонения $\delta(i, x_0; T_k^{[\xi]_n})$ из (5.7) ограничены некоторой константой при всех значениях $i = 0, 1, 2, \ldots$ Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Предположим, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Предположим также, что она является $[\xi]_n$-дифференцируемой $v^{[\xi]_n}$ для некоторой последовательности $\xi \in \Xi$, и пусть тогда $T^{[\xi]_n} = T(v^{[\xi]_n}) = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n}$ – отвечающая производной звезде $v^{[\xi]_n}$ перекладывающаяся развертка тора (5.4), состоящая из трех параллелограммов $T_0^{[\xi]_n}$, $T_1^{[\xi]_n}$, $T_2^{[\xi]_n}$. Пусть $\delta(i, x_0; T_k^{[\xi]_n})$ для $k = 0, 1, 2$ – отклонения, определенные в* (5.7), *и x_0 – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^2$. Тогда для отклонений имеет место оценка*

$$|\delta(i, x_0; T_k^{[\xi]_n})| \leqslant (1 + \nu(T^{[\xi]_n}))(2 + d_{\mathbf{1}}^{[\xi]_n}(T^{[\xi]_n})) - 1 \tag{5.12}$$

для $k = 0, 1, 2$ и всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь $\nu(T^{[\xi]_n})$ – верхняя граница (5.8) *разброса отношений площадей параллелограммов из развертки $T^{[\xi]_n}$ и $d_{\mathbf{1}}^{[\xi]_n}(T^{[\xi]_n})$ – относительный диаметр* (5.11) *развертки $T^{[\xi]_n}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4.1 из [1]. Для ее применения требуется лишь, чтобы $[\xi]_n$-производная развертка $T^{[\xi]_n}$ вкладывалась бы (5.5) в тор $\mathbb{T}^2$. Данное условие выполняется по теореме 3.1 в силу условия вложимости $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ в тор $\mathbb{T}^2$, а также условия $[\xi]_n$-дифференцируемости $v^{[\xi]_n}$ данной звезды. $\square$

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Индуцированные множества ограниченного остатка.* — Алгебра и анализ (2014), (в печати).

2. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.
3. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
4. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés.* — Seminar on number theory, 1983–1984 (Talence, 1983/1984), Exp. No. 24, 12pp., Univ. Bordeaux, Talence, 1984. exposé 24.
5. S. Ferenczi, *Bounded Remaider Sets.* — Acta Arith. **61**, No. 4 (1992), 319–326.
6. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins.* — Math. Semin. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.
7. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН. Сер. мат. **71**, No. 2, (2007), 287–321.
8. M. Morse, C. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics II: Sturmian trajectories.* — Amer. J. Math. **62** (1940) 1–42.
9. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen* mod *Eins.* — Math. Ann. **77** (1916), 313–352.

Zhuravlev V. G. Dividing toric tilings and bounded remainder sets.

An infinite sequence of dividing two-dimensional toric tilings is constructed by using differentiation of toric developments admitting a rearrangement. We prove that the nucleus of these tilings is a bounded remainder set.

Владимирский государственный университет,
Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 14 апреля 2015 г.