Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

В. Г. Журавлев

ДВУМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДОМ ДЕЛЯЩИХСЯ ТОРИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Введение

0.1. Делящиеся торические разбиения. Пусть зададан сдвиг

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^2$$

тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$ и перекладывающаяся развертка $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ меньшего тора $\mathbf{T} \subset \mathbb{T}^2$, состоящая из трех параллелограммов T_0, T_1, T_2. Исходя из некоторой развертки тора T, в [1] были определены ее $[\xi]_n$-производные развертки

$$T^{[\xi]_n} = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n} \tag{0.1}$$

другого тора $\mathbf{T}^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$, также состоящие из трех перекладывающаяся параллелограммов $T_0^{[\xi]_n}$, $T_1^{[\xi]_n}$, $T_2^{[\xi]_n}$. Одно из свойств разверток (0.1) состоит в том, что они порождают разбиения

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}_0^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_1^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_2^{[\xi]_n} \tag{0.2}$$

объемлющего тора $\mathbb{T}^2$, где каждое из множеств $\mathcal{T}_k^{[\xi]_n}$ образуется S_α-трансляциями соответствующего параллелограмма $T_k^{[\xi]_n}$ из разбиения (0.1). По этой причине развертки тора $T^{[\xi]_n}$ называют ядрами разбиений тора $\mathcal{T}^{[\xi]_n}$.

При некоторых явно определяемых условиях, приведенных в следствии 4.1, для ядер $T^{[\xi]_n} \subset \mathbb{T}^2$ их площадь и радиус

$$s(T^{[\xi]_n}) \to 0, \quad r(T^{[\xi]_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{0.3}$$

Здесь в (0.3) площадь $s(T^{[\xi]_n})$ измеряется обычной мерой Хаара, в которой полный тор $\mathbb{T}^2$ имеет единичную площадь, а радиус $r(T^{[\xi]_n})$ – в некоторых нормированных метриках $\tau_v^{[\xi]_n}$, в которых тор $\mathbb{T}^2$ имеет диаметр 1/2.

0.2. Наилучшие приближения на торе. В [1] разбиения (0.2) были использованы для построения множеств ограниченного остатка –

Ключевые слова: делящиеся разбиения тора, наилучшие приближения на торе.
Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

многомерных аналогов отрезков Гекке [2,3] . Цель настоящей работы – применить разбиения (0.2) к нахождению приближений на торе $\mathbb{T}^2$.

Обозначим через $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}^{[\xi]_n})$ конечную орбиту, состоящую из точек $x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ для $j = 1, 2, \ldots, \mathbf{m}^{[\xi]_n} - 1$, где номер $\mathbf{m}^{[\xi]_n}$ однозначно определяется начальной разверткой тора T и выбором ее $[\xi]_n$-производной. Заметим, что точка $x_0 = 0$ не включены в орбиту $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}^{[\xi]_n})$.

Предположим, что вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ сдвига S_α тора $\mathbb{T}^2$ будет иррациональным, т.е. числа $1, \alpha_1, \alpha_2$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$. Тогда в теореме 4.1 доказаны следующие свойства $[\xi]_n$-производных разверток $T^{[\xi]_n}$ из (0.1):

1) *при всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *ни одна из точек орбиты* $\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}^{[\xi]_n})$ *не попадает в область* $T^{[\xi]_n}$, *т.е.*

$$T^{[\xi]_n} \cap \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{n}^{[\xi]_n}) = \varnothing; \tag{0.4}$$

2) *первой попавшей в область* $T^{[\xi]_n}$ *точкой* $x_1, x_2, \ldots$ *является точка*

$$x_{\mathbf{m}^{[\xi]_n}} \in T^{[\xi]_n}. \tag{0.5}$$

Из свойств (0.4) и (0.5) вытекает, что ненулевые точки $x_{\mathbf{m}^{[\xi]_n}}$ являются наилучшими приближениями 0 на торе $\mathbb{T}^2$ в нормированных метриках $\tau_v^{[\xi]_n}$, в которых площади $s(T^{[\xi]_n})$ и радиусы $r(T^{[\xi]_n})$ областей $T^{[\xi]_n}$ стремятся (0.3) к нулю.

При некоторых выборах производных $[\xi]_n$ свойства указанных метрик могут существенно отличаться от свойств стандартных метрик на торе $\mathbb{T}^2$, например, – max-метрики $\tau(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

§1. Перекладывающиеся развертки тора

1.1. Общая конструкция. Пусть $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ – произвольный базис квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$ и

$$\Delta(\mathbf{l}) = \{x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2; \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_1 < 1\} \tag{1.1}$$

– открытый треугольник с вершиной в 0, образованный базисными векторами l_1, l_2. Кроме того, пусть

$$\mathbb{T}^2 \xrightarrow{S} \mathbb{T}^2 : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^2 \tag{1.2}$$

– сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$ с условием

$$\alpha \in \Delta(\mathbf{l}). \tag{1.3}$$

По базису $\mathbf{l}$ и вектору α из (1.3) зададим тройку векторов

$$v = v(\alpha, \mathbf{l}) = \{v_0, v_1, v_2\} \tag{1.4}$$

следующим образом:

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - l_1, \quad v_2 = \alpha - l_2. \tag{1.5}$$

Из принадлежности (1.3) вектора α области $\Delta(\mathbf{l})$ следует, что так заданная (1.5) тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будет *согласованной*. По определению из [1] это означает, что $0 \in \Delta^{\text{int}}(v)$, где $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть треугольника $\Delta(v)$ с вершинами, расположенными в концах векторов v_0, v_1, v_2. Любую согласованную тройку векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будем для краткости называть *звездой*.

Звезды $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ обладают тем свойством, что по ним можно построить перекладывающиеся развертки

$$T = T(v) = T(v_0, v_1, v_2) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2 \tag{1.6}$$

тора $\mathbb{T}^2$ с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 из (1.4). Быть *разверткой* для T означает, что каноническое отображение

$$T \longrightarrow \mathbb{T}^2 : \quad x \mapsto x \bmod \mathbb{Z}^2$$

является биекцией. *Перекладывание* развертки (1.6) задается формулой

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\text{col}(x)}. \tag{1.7}$$

В формуле (1.7) использовано обозначение $\text{col}(x) = k$ для цвета точек x, принадлежащих подмножеству T_k, где $k = 0, 1, 2$.

Развертка T из (1.6) – это выпуклый шестиугольник, состоящий из трех параллелограммов T_0, T_1, T_0. Обозначим $T_{k,l}$ замкнутый параллелограмм, натянутый на векторы v_k, v_l. Пусть, кроме того, T_m обозначают параллелограммы, имеющие те же внутренние части $T_m^{\text{int}} = T_{k,l}^{\text{int}}$, что и параллелограммы $T_{k,l}$, где m – дополнительный к $\{k, l\}$ индекс в $\{0, 1, 2\}$.

Определение 1.1. *Стороны и вершины параллелограммов $T_{k,l}$ распределим между соответствующими параллелограммами T_m, так чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *каждому T_m принадлежали две смежные стороны и соединяющая их вершина*;

2) *получающееся при этом объединение $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ является разбиением множества T.*

Для определенности зададим следующее распределение вершин:

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2. \tag{1.8}$$

Так как по условию векторы $-l_1 = v_1 - v_0$, $-l_2 = v_2 - v_0$ *образуют базис квадратной решетки* $\mathbb{Z}^2$, *то* T *будет перекладывающейся разверткой тора* $\mathbb{T}^2$.

1.2. Пример 1. Пусть

$$\mathrm{T}^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2); \quad 0 \leqslant \alpha_1 < 1, \quad 0 \leqslant \alpha_2 < 1\}$$

– фундаментальная область тора $\mathbb{T}^2$ и α – вектор из $\mathrm{T}^{2\,\mathrm{int}}$ с условием

$$s_+(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \tag{1.9}$$

Если в качестве базиса $\mathbf{l}$ взять базис $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$, состоящий из единичных векторов $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$, и выбрать векторы

$$v_0 = \alpha, \quad v_1 = \alpha - e_1, \quad v_2 = \alpha - e_2, \tag{1.10}$$

то получим по правилу (1.4) согласованную тройку векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}) = \{v_0, v_1, v_2\}$, так как из условия (1.9) следует принадлежность вектора α области $\Delta(\mathbf{e})$.

1.3. Пример 2. Пусть теперь вектор α из области $\mathrm{T}^{2\,\mathrm{int}}$ удовлетворяет другому условию

$$s_-(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2 > 0. \tag{1.11}$$

В качестве базиса $\mathbf{l}$ решетки $\mathbb{Z}^2$ выберем скошенный базис

$$\mathbf{e}_- = \{e_1, e_2 + e_1\}.$$

Тогда по условию (1.11) вектор α принадлежит треугольнику $\Delta(\mathbf{e}_-)$ и, следовательно, по правилу (1.5), (1.10) получим согласованную тройку векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}_-)$.

Если же для вектора $\alpha \in \mathrm{T}^{2\,\mathrm{int}}$ будет выполняться обратное условие

$$s_-(\alpha) = \alpha_1 - \alpha_2 < 0,$$

то выберем другой скошенный базис $\mathbf{e}_+ = \{e_1 + e_2, e_2\}$ и придем к согласованной тройке векторов $v = v(\alpha, \mathbf{e}_+)$.

1.4. Пример 3 содержит несколько иной ход рассуждения. Предположим, что вектор $\alpha \in \mathrm{T}^{2\,\mathrm{int}}$ не удовлетворяет требованию (1.9). Тогда для него будет выполняться неравенство

$$s_+(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 > 1. \tag{1.12}$$

Вместо α рассмотрим вектор

$$\alpha_- = \alpha - e_1 - e_2 \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}^2, \tag{1.13}$$

а единичный базис $\mathbf{e} = \{e_1, e_2\}$ заменим центрально симметричным ему базисом $-\mathbf{e} = \{-e_1, -e_2\}$. Снова получили, что вектор α_- принадлежит треугольнику $\Delta(-\mathbf{e})$ и, тем самым, по правилу (1.5), (1.10) образуем согласованную тройку векторов $v_- = v(\alpha_-, -\mathbf{e})$.

Новое при таком подходе состоит в замене (1.13) вектора α сравнимым с ним вектором α_- по модулю решетки $\mathbb{Z}^2$. В результате получаем перекладывающуюся развертку

$$T_- = T(v_-)$$

тора $\mathbb{T}^2$, перекладывание (1.7) которой эквивалентно сдвигу тора $S_{\alpha_-} = S_\alpha$ из (1.2), на исходный вектор α.

1.5. Построение базиса в общем случае. Не уменьшая общности, будем предполагать, что вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ принадлежит положительному квадрату $\mathbb{R}^2_+$, т.е. $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Предложенный в примерах 1,2,3 подбор базиса $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$ квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$ с условием $\alpha \in \Delta(\mathbf{l})$ становится все боле затруднительным с ростом длины вектора α. В этом случае будем использовать разложение числа $\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ в цепную дробь. Выберем две соседние подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ с условием

$$\frac{P_n}{Q_n} < \xi < \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \tag{1.14}$$

при этом предполагая отношение $\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ иррациональным. Рассмотрим целочисленные векторы

$$l_{n1} = (P_n, Q_n), \quad l_{n2} = (P_{n+1}, Q_{n+1}). \tag{1.15}$$

Из неравенств (1.14) следует, что вектор α принадлежит углу $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$ от вектора l_{n1} к вектору l_{n2}. Известно [4], что соседние подходящие дроби связаны соотношением

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$$

или иначе –

$$P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1} = 1. \tag{1.16}$$

Равенство (1.16) равносильно тому, что векторы $\mathbf{l}_n = (l_{n1}, l_{n2})$ из (1.15) образуют базис квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$.

После этого остается добиться выполнения условия попадания вектора α в треугольник $\Delta(\mathbf{l}_n)$. Так как длины векторов из (1.15) бесконечно растут, то найдется наименьшее $n_{\min}$ с условием

$$\alpha \in \Delta(\mathbf{l}_n) \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_{\min}.$$

Итак, для фиксированного вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с иррациональным отношением координат, принадлежащего положительному квадрату $\mathbb{R}^2_+$, мы получаем по правилу (1.10) бесконечную последовательность

$$v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n) = \{v_{n0}, v_{n1}, v_{n2}\} \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_{\min} \tag{1.17}$$

согласованных троек векторов.

Замечание 1.1. Метод цепных дробей порождает согласованные тройки векторов $v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n)$ из (1.1), для которых один из углов $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$ треугольника $\Delta(\mathbf{l}_n)$ быстро стремится к нулю. Наоборот, метод прямого перебора, изложенный в примерах 1,2,3, хорошо находит тройки векторов $v_n = v(\alpha, \mathbf{l}_n)$ с большим углом $\widehat{l_{n1}, l_{n2}}$, которые может пропускать предыдущий метод.

§2. Производные звезды

2.1. Звезды. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$ из множества индексов $\{0,1,2\}$. Пусть тройка векторов $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ образует звезду (см. п. 1.1).

Определение 2.1. *Будем говорить, что звезда $\{v_0, v_1, v_2\}$ невырождена, если для всех $\sigma = \{k, l\}$ из Σ только одна из троек*

$$\{v_m, v_k, v_k + v_l\}, \quad \{v_m, v_k + v_l, v_l\} \tag{2.1}$$

является согласованной. Здесь m – дополнительный индекс для $\{k, l\}$ в множестве $\{0,1,2\}$.

В этом случае *σ-производная* тройка или звезда $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, v_2^\sigma\}$ полагается равной согласованной тройке из (2.1). Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \tag{2.2}$$

– множество всех последовательностей

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}, \tag{2.3}$$

состоящих из произвольных сочетаний $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}\}$ из Σ. Обозначим через

$$[\xi]_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \tag{2.4}$$

первые n членов последовательности (2.3), при этом считаем, что $[\xi]_0 = \varnothing$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим последовательность $[\xi]_n$-производных, полагая

$$v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}, \tag{2.5}$$

где

$$v^{[\xi]_0} = v. \tag{2.6}$$

И более обще –

$$v^{\xi} = \{v^{[\xi]_0}, v^{[\xi]_1}, v^{[\xi]_2}, \ldots\}. \tag{2.7}$$

Скажем, что звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будет $[\xi]_n$-*дифференцируемой* (соответственно ξ-*дифференцируемой*), если существует ее производная (2.5) для n (соответственно – существуют производные из (2.7) для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$) Если существуют производные v^{ξ} для всех $\xi \in \Xi$, то будем говорить, что такая звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ *тотально дифференцируема* или кратко – Ξ-*дифференцируема.*

2.2. Тотальная дифференцируемость звезд. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ называется *иррациональным*, если числа

$$\text{числа} \quad 1, \alpha_1, \alpha_2 \quad \text{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Чтобы избежать случаев вырождения, сосредоточимся исключительно на иррациональных (2.8) векторах сдвига α тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2$. Для произвольных торов $\mathbb{T}^2_L$ определение (2.8) сохраняется. Нужно лишь α_1 и α_2 рассматривать как координаты вектора α в произвольном базисе решетки L.

Для формулировки следующего результата нам потребуется еще одно понятие.

Определение 2.2. *Звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается*

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{2.9}$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если множество

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \mathcal{T}_2,$$

является разбиением тора $\mathbb{T}^2$. Здесь $\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \cdots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$ – орбитное разбиение, составленное из S-сдвигов параллелограмма

T_k из развертки $T = T(v)$, для которой векторы перекладывания v_k имеют вид

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathbb{Z}^2 \tag{2.10}$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \dots$

Теорема 2.1. *Пусть звезда $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ вкладывается (2.9) в тор $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2$ на иррациональный (2.8) вектор α. Тогда такая звезда v будет тотально дифференцируема.*

Доказательство. В теореме 3.1 из [1] было доказано, что если звезда v вкладывается в тор, то любая ее производная звезда v^σ, где $\sigma \in \Sigma$, также вкладывается

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$$

в тот же тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$.

Пусть $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ – соответствующая перекладывающаяся развертка (1.6) тора $\mathbb{T}^2$ с векторами перекладывания v_0, v_1, v_2 и распределением вершин и сторон в параллелограммах произведена способом (1.8). Пусть для определенности $\sigma = \{1, 2\}$. Тогда ее σ-производная перекладывающаяся развертка тора

$$T^\sigma = T(v^\sigma) = T_0^\sigma \sqcup T_1^\sigma \sqcup T_2^\sigma \tag{2.11}$$

имеет векторы перекладывания одного из двух видов

$$v_0^\sigma = v_0, \quad v_1^\sigma = v_1 + v_2, \quad v_2^\sigma = v_2$$

или

$$v_0^\sigma = v_0, \quad v_1^\sigma = v_1, \quad v_2^\sigma = v_1 + v_2, \tag{2.12}$$

и при этом производная развертка (2.11) снова вкладывается

$$T^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2 \tag{2.13}$$

в тор $\mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$.

Случай 1. Предположим, что производная звезда v^σ получается вырожденной. В рассматриваемой ситуации это значит, что векторы v_0 и $v_1 + v_2$ лежат на одной прямой, и тогда выбор перекладывающих векторов из (2.12) (ср. (2.1)) можно проводить двумя способами. Сделаем это первым способом.

Тогда перекладывающаяся развертка тора T^σ из (2.11) вырождается:

$$T_0^\sigma, \quad T_1^\sigma = T_1 \quad T_2^\sigma = \varnothing \tag{2.14}$$

– состоит из двух невырожденных перекладывающихся параллелограммов T_0^σ, T_1^σ и вырожденного T_2^σ, т.е шестиугольная развертка T^σ становится параллелограммом.

Перекладывание σ-производной развертки тора T^σ в случае (2.14) имеет вид

$$T^\sigma \xrightarrow{S'^\sigma} T^\sigma : \quad S'^\sigma(x) = x + v^\sigma_{\mathrm{col}(x)}, \tag{2.15}$$

где

$$\mathrm{col}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in T_0^\sigma, \\ 1, & \text{если} \quad x \in T_1^\sigma. \end{cases}$$

Из формулы (2.15) вытекает, что для любой точки x из развертки T^σ ее S'^σ-орбита $\mathrm{Orb}'^\sigma(T^\sigma)$ в T^σ расположена на прямой, проходящей через точку x параллельно векторам сдвига v_0^σ и v_1^σ. Так как развертка тора T^σ содержит невырожденный параллелограм $T_1^\sigma = T_1$, то и сама является невырожденной. Значит, орбита

$$\mathrm{Orb}'^\sigma(T^\sigma) \quad \text{не всюду плотна в} \quad T^\sigma. \tag{2.16}$$

По теореме 3.1 из [1] производная развертка T^σ вкладывается (2.13) в тор $\mathbb{T}^2$ и, значит, порождает индуцированное разбиение

$$\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}(v^\sigma) = \mathcal{T}_0^\sigma \sqcup \mathcal{T}_1^\sigma \tag{2.17}$$

тора $\mathbb{T}^2$ с *ядром*

$$\mathrm{Kr}(\mathcal{T}^\sigma) = T^\sigma. \tag{2.18}$$

Само индуцированное разбиение (2.17) составлено из двух орбитных разбиений

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^\sigma &= T_0^\sigma \sqcup S^1(T_0^\sigma) \sqcup \ldots \sqcup S^{n_0^\sigma - 1}(T_0^\sigma), \\ \mathcal{T}_1^\sigma &= T_1^\sigma \sqcup S^1(T_1^\sigma) \sqcup \cdots \sqcup S^{n_1^\sigma - 1}(T_1^\sigma), \end{aligned} \tag{2.19}$$

входящих соответственно в орбиты $\mathrm{Orb}(T_0^\sigma)$ и $\mathrm{Orb}(T_1^\sigma)$. Отметим, что доказательство теоремы 3.1 из [1] остается в силе и для вырожденных разверток T.

Из (2.17), (2.19) и теоремы 3.1 из [1] следует, что перекладывание (2.15) является индуцированным отображением или иначе – отображением первого возвращения –

$$S'^\sigma = S|_{T^\sigma} \tag{2.20}$$

для сдвига $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2$ на вектор α, определенного в (1.2). Поскольку по условию вектор α иррациональный, то S-орбита любой точки $x \in \mathbb{T}^2$ является [5] всюду плотной на торе $\mathbb{T}^2$, и тогда в силу (2.20) данная орбита будет всюду плотной и на невырожденном параллелограмме T^σ, что противоречит утверждению (2.16).

Случай 2 является общим: пусть найдется такая производная $\xi \in \Xi$, что на некотором шаге $n = 1, 2, \ldots$ в результате получается вырожденная звезда $v^{[\xi]_n}$. По определению (2.5) имеем $v^{[\xi]_n} = (v^{[\xi]_{n-1}})^{\xi_n}$. Если теперь выбрать за начальную тройку векторов $v' = v^{[\xi]_{n-1}}$, а за производную $\sigma = \xi_n$, то вернемся к ситуации v', σ, разобранной в случае 1. $\square$

§3. Метрики

3.1. Шестиугольная метрика на плоскости. Пусть

$$v = \{v_0, v_1, v_1\}$$

– звезда, $\xi \in \Xi$ и $v^{[\xi]_n} = w = \{w_0, w_1, w_2\}$. Определим векторы $w_0^\perp$, $w_1^\perp$, $w_2^\perp$ условиями $w_k \cdot w_k^\perp = 0$, где $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ обозначает скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. Тогда

$$\nu_v^{[\xi]_n}(x) = \max_{k=0,1,2} |w_k^\perp \cdot x| \tag{3.1}$$

будет *нормой*, а

$$\varrho_{v,1}^{[\xi]_n}(x, y) = \nu_v^{[\xi]_n}(x - y) \tag{3.2}$$

– *метрикой* на плоскости $\mathbb{R}^2$, соответствующей норме (3.1). Длины ортогональных векторов $w_k^\perp$ в (3.1) выбираем так, чтобы было выполнено условие

$$\overline{T}^{[\xi]_n} = \{x \in \mathbb{R}^2; \quad \varrho_{v,1}^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2} x_{\mathbf{m}}) \leqslant 1\}, \tag{3.3}$$

где $\frac{1}{2} x_{\mathbf{m}}$ – *центр симметрии* замыкания $\overline{T}^{[\xi]_n}$ развертки $T^{[\xi]_n}$. Здесь точка

$$x_{\mathbf{m}} = S^{\mathbf{m}}(0) = S^{'3}(0) \tag{3.4}$$

имеет номер $\mathbf{m} = m_0 + m_1 + m_2$, определяемый через коэффициенты (2.10).

3.2. Нормированная метрика на торе. Зададим метрику $\tau_{v,1}^{[\xi]_n}$ на торе $\mathbb{T}^2$, полагая

$$\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x, y) = \min_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^2} \varrho_{v,1}^{[\xi]_n}(x + l_1, y + l_2). \tag{3.5}$$

Если теперь заменить (3.5) на

$$\tau_v^{[\xi]_n}(x,y) = \frac{1}{2\tau_{\max}}\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x,y), \tag{3.6}$$

где

$$\tau_{\max} = \max\{\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x,0);\quad x \in \mathbb{T}^2\}, \tag{3.7}$$

то получим *нормированную метрику* на торе. Из определения (3.6) следует, что в данной метрике тор $\mathbb{T}^2$ имеет *диаметр*

$$\delta = \max\{\tau_v^{[\xi]_n}(x,y);\quad x,y \in \mathbb{T}^2\} = \tfrac{1}{2}.$$

Лемма 3.1. *Параметр* $\tau_{\max}$ *из* (3.7) *связан равенством*

$$\tau_{\max} = \lambda_{\min} \tag{3.8}$$

с другим параметром

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda > 0;\quad \lambda T^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2\}, \tag{3.9}$$

удовлетворяющим неравенству $\lambda_{\min} \geqslant 1$.

Следовательно, нормированная метрика (3.6) *на торе* $\mathbb{T}^2$ *также задается равенством*

$$\tau_v^{[\xi]_n}(x,y) = \frac{1}{2\lambda_{\min}}\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x,y). \tag{3.10}$$

Доказательство. Сейчас нам удобно перейти от $T^{[\xi]_n}$ к развертке $T^{[\xi]_n} - \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}$, где $\frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}$ – центр симметрии замыкания $\overline{T}^{[\xi]_n}$ развертки $T^{[\xi]_n}$. После такой замены новая развертка $T^{[\xi]_n} - \frac{1}{2}x_{\mathbf{m}}$ будет иметь центр симметрии в 0.

Из однородности тора $\mathbb{T}^2$ относительно сдвигов следует равенство

$$\begin{aligned}&\min\{\lambda > 0;\quad \lambda T^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2\}\\ &= \min\{\lambda > 0;\quad \lambda(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}) \bmod \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2\}.\end{aligned}$$

Поэтому для развертки $T^{[\xi]_n} - \frac{1}{2}x_{\mathbf{n}}$ имеем то же значение

$$\min\{\lambda > 0;\quad \lambda(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}) \bmod \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2\} = \lambda_{\min}, \tag{3.11}$$

что и для $T^{[\xi]_n}$ в определении (3.9).

Далее, метрики (3.2) и (3.5) связаны соотношением

$$\begin{aligned}&\max\{\varrho_{v,1}^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}});\quad x \in \lambda(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}})\}\\ &= \max\{\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}});\quad x \in \lambda(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}) \bmod \mathbb{Z}^2\}\end{aligned} \tag{3.12}$$

для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\min}$. Поэтому из определения (3.7) для величины $\tau_{\max}$ следует равенство

$$\max\{\tau_{v,1}^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}); \quad x \in \lambda_{\min}(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}) \bmod \mathbb{Z}^2\} = \tau_{\max}. \tag{3.13}$$

С другой стороны, используя определение (3.3) можем записать

$$\max\{\varrho_{v,1}^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}); \quad x \in \lambda(T^{[\xi]_n} - \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}})\} = \lambda$$

для всех $\lambda \geqslant 0$. Теперь из (3.13), (3.11) и (3.12) следует равенство (3.8).

Наконец, неравенство $\lambda_{\min} \geqslant 1$ справедливо, поскольку развертка $T^{[\xi]_n}$ вкладывается в тор $\mathbb{T}^2$. □

Обозначим через

$$r(T^{[\xi]_n}) = \max\{\tau_v^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}); \quad x \in \overline{T}^{[\xi]_n}\} \tag{3.14}$$

радиус развертки $T^{[\xi]_n}$ в нормированной метрике $\tau_v^{[\xi]_n}$ из (3.6).

Лемма 3.2. *Для радиуса* (3.14) *развертки* $T^{[\xi]_n}$ *выполняется неравенство*

$$r(T^{[\xi]_n}) \leqslant \frac{1}{2\lambda_{\min}}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Неравенство (3.15) вытекает из равенства

$$\max\{\tau_v^{[\xi]_n}(x, \tfrac{1}{2}x_{\mathbf{n}}); \quad x \in \lambda_{\min}\overline{T}^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2\} = \tfrac{1}{2}$$

и соотношения (3.12). □

Лемма 3.3. *Для константы* $\lambda_{\min}$, *определенной в* (3.9), *выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min} \geqslant \frac{1}{s(T^{[\xi]_n})^{1/2}}, \tag{3.16}$$

где $s(T^{[\xi]_n})$ *обозначает площадь развертки* $T^{[\xi]_n} \subset \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Будем исходить из следующего очевидного неравенства

$$s(\lambda T^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2) \quad \leqslant \quad s(\lambda T^{[\xi]_n}), \tag{3.17}$$

выполняющегося для всех $\lambda \geqslant 0$. Справа в (3.17) указана площадь развертки на плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому можем записать

$$s(\lambda T^{[\xi]_n}) = \lambda^2 s(T^{[\xi]_n}). \tag{3.18}$$

Слева же в неравенстве (3.17) – площадь развертки на торе $\mathbb{T}^2$. Поскольку выполняется соотношение

$$\lambda T^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$$

для любого $\lambda \geqslant \lambda_{\min}$, то при тех же λ будет выполняться равенство

$$s(\lambda T^{[\xi]_n} \bmod \mathbb{Z}^2) = s(\mathbb{T}^2) = 1. \tag{3.19}$$

Теперь из (3.17), (3.18) и (3.19) получаем неравенство

$$1 \leqslant \lambda_{\min}^2 s(T^{[\xi]_n}),$$

из которого следует нужное неравенство (3.16). $\square$

Основной целью данного пункта является следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Для радиуса* (3.14) *развертки* $T^{[\xi]_n}$ *выполняется неравенство*

$$r(T^{[\xi]_n}) \leqslant \frac{s^{1/2}(T^{[\xi]_n})}{2}. \tag{3.20}$$

Доказательство вытекает из лемм 3.2 и 3.3. $\square$

§4. Приближения на торе

4.1. Основная теорема. Пусть задан сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2$ на иррациональный вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$, определенный в (1.2) и (2.8). Пусть, кроме того, $v = \{v_0, v_1, v_2\}$ будет звездой, вкладывающейся в тор $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$, и пусть $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2$ – порождаемая v перекладывающаяся развертка (1.6) тора $\mathbb{T}^2$. По определению 2.2 она вкладывается в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ относительно сдвига $S = S_\alpha$. Предположим, что векторы перекладывания v_k имеют вид $v_k \equiv m_k\alpha \bmod \mathbb{Z}^2$ для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$.

Выберем произвольную последовательность $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ из множества Ξ (2.2). По теореме 2.1 и теореме 3.1 из [1] существует $[\xi]_n$-производная перекладывающаяся развертка

$$T^{[\xi]_n} = T(v^{[\xi]_n}) = T_0^{[\xi]_n} \sqcup T_1^{[\xi]_n} \sqcup T_2^{[\xi]_n}, \tag{4.1}$$

вкладывающаяся в тор

$$T^{[\xi]_n} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2, \tag{4.2}$$

и поэтому $T^{[\xi]_n}$ является ядром. Пусть при этом векторы перекладывания $v_k^{[\xi]_n}$ для развертки (4.1) имеют вид

$$v_k^{[\xi]_n} \equiv m_k^{[\xi]_n} \alpha \bmod \mathbb{Z}^2 \tag{4.3}$$

для $k = 0, 1, 2$ с коэффициентами $m_k^{[\xi]_n}$, вычисляемыми по правилу (2.1). Обозначим сумму данных коэффициентов через

$$\mathbf{m}^{[\xi]_n} = m_0^{[\xi]_n} + m_1^{[\xi]_n} + m_2^{[\xi]_n}. \tag{4.4}$$

Наконец, определим еще конечные *орбиты*

$$\mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}^{[\xi]_n}) = \quad \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^2; \quad j = 1, 2, \ldots, \mathbf{m}^{[\xi]_n} - 1\}. \tag{4.5}$$

Основная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. 1. *Для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется свойство*

$$T^{[\xi]_n} \cap \mathrm{Orb}'(0, \mathbf{m}^{[\xi]_n}) = \varnothing. \tag{4.6}$$

2. *Если $x_{\mathbf{m}^{[\xi]_n}} = S^{\mathbf{m}^{[\xi]_n}}(0)$ – точка с номером* (4.4), *то она обладает свойством*

$$x_{\mathbf{m}^{[\xi]_n}} \in T^{[\xi]_n}. \tag{4.7}$$

3. *Площадь ядра $T^{[\xi]_n}$ удовлетворяет неравенствам*

$$1/m_{\max}^{[\xi]_n} \leqslant s(T^{[\xi]_n}) \leqslant 1/m_{\min}^{[\xi]_n}, \tag{4.8}$$

где

$$m_{\min}^{[\xi]_n} = \min\{m_0^{[\xi]_n}, m_1^{[\xi]_n}, m_2^{[\xi]_n}\}, \quad m_{\max}^{[\xi]_n} = \max\{m_0^{[\xi]_n}, m_1^{[\xi]_n}, m_2^{[\xi]_n}\}. \tag{4.9}$$

4. *Для радиуса* (3.14) *ядра $T^{[\xi]_n}$ в нормированной метрике $\tau_v^{[\xi]_n}(x, y)$ из* (3.6) *выполняется неравенство*

$$r(T^{[\xi]_n}) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{m_{\min}^{[\xi]_n}}}. \tag{4.10}$$

Доказательство. *Утверждение* 1. Поскольку $[\xi]_n$-производная развертка тора $T^{[\xi]_n}$ вкладывается согласно (4.2) в тор $\mathbb{T}^2$ и имеет разбиение (4.1), то она индуцирует разбиение

$$\mathcal{T}^{[\xi]_n} = \mathcal{T}_0^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_1^{[\xi]_n} \sqcup \mathcal{T}_2^{[\xi]_n} \tag{4.11}$$

тора $\mathbb{T}^2$ на орбиты

$$\mathcal{T}_k^{[\xi]_n} = T_k^{[\xi]_n} \sqcup S^1(T_k^{[\xi]_n}) \sqcup \cdots \sqcup S^{m_k^{[\xi]_n} - 1}(T_k). \tag{4.12}$$

Тогда из (4.10) и (4.12) вытекает, что все точки орбиты $\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}^{[\xi]_n})$ из (4.4) содержатся

$$\mathrm{Orb}'(0,\mathbf{m}^{[\xi]_n}) \subset V_{\mathcal{T}^{[\xi]_n}} \tag{4.13}$$

среди вершин $V_{\mathcal{T}^{[\xi]_n}}$ всех параллелограммов $S^j(T_k^{[\xi]_n})$ из орбит (4.12). Теперь из разбиения тора (4.10) и включения (4.13) следует равенство (4.6).

Утверждение 2. Перекладывание $S'^{[\xi]_n}$ развертки тора (4.1) имеет вид

$$T^{[\xi]_n} \xrightarrow{S'^{[\xi]_n}} T^{[\xi]_n}: \quad S'^{[\xi]_n}(x) = x + v^{[\xi]_n}_{\mathrm{col}(x)}, \tag{4.14}$$

где цвет $\mathrm{col}(x) = k$, если точка $x \in T_k^{[\xi]_n}$. Согласно (2.20) перекладывание (4.14) является индуцированным отображением

$$S'^{[\xi]_n} = S|_{T^{[\xi]_n}} \tag{4.15}$$

для сдвига $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2$ на вектор α, определенного в (1.2). Из (4.14) и (4.15) вытекает связь

$$x_{\mathbf{m}^{[\xi]_n}} = S^{\mathbf{m}^{[\xi]_n}}(0) = (S'^{[\xi]_n})^3(0) \tag{4.16}$$

между исходным сдвигом и индуцированным (4.15). Поскольку перекладывание (4.14) развертки $T^{[\xi]_n}$ замкнуто, то из равенства (4.16) следует включение (4.7).

Утверждение 3. Из разбиения (4.11) следует

$$\begin{aligned} s(\mathbb{T}^2) &= s(\mathcal{T}_0^{[\xi]_n}) + s(\mathcal{T}_1^{[\xi]_n}) + s(\mathcal{T}_2^{[\xi]_n}) \\ &= m_0^{[\xi]_n} s(T_0^{[\xi]_n}) + m_1^{[\xi]_n} s(T_1^{[\xi]_n}) + m_2^{[\xi]_n} s(T_2^{[\xi]_n}) \\ &\geqslant m_{\min}^{[\xi]_n}(s(T_0^{[\xi]_n}) + s(T_1^{[\xi]_n}) + s(T_2^{[\xi]_n})), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где в силу разбиения (4.1) можем записать равенство

$$s(T_0^{[\xi]_n}) + s(T_1^{[\xi]_n}) + s(T_2^{[\xi]_n}) = s(T^{[\xi]_n}). \tag{4.18}$$

Учитывая, что площадь всего тора $s(\mathbb{T}^2) = 1$, из (4.17) и (4.18) выводим для площади развертки $s(T^{[\xi]_n})$ неравенство сверху из (4.8). Неравенство снизу из (4.8) получается аналогично.

Утверждение 4 вытекает из правого неравенства (4.8) и предложения 3.1. $\square$

Следствие 4.1. *Если последовательность* $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\} \in \Xi$ *такая, что значение* $m_{\min}^{[\xi]_n}$, *определенное в* (4.9), *удовлетворяет свойству*

$$m_{\min}^{[\xi]_n} \to \infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

то для ядер $T^{[\xi]_n}$ *их площади*

$$s(T^{[\xi]_n}) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \tag{4.19}$$

а также радиусы

$$r(T^{[\xi]_n}) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty \tag{4.20}$$

в нормированной метрике $\tau_v^{[\xi]_n}(x,y)$ *из* (3.6)

Доказательство вытекает из неравенств (4.8) и 4.10). □

4.2. Сравнение с другими метриками. В задачах аппроксимации более обычными являются сдедующие две метрики на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\varrho_{\square}(x,y) = \nu_{\square}(x)(x-y) \tag{4.21}$$

$$\varrho_{\bigcirc}(x,y) = \nu_{\bigcirc}(x)(x-y) \tag{4.22}$$

– евклидова метрика, соответствующие нормам

$$\nu_{\square}(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad \nu_{\bigcirc}(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Им отвечают квадрат

$$\square = \{x \in \mathbb{R}^2; \quad \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant 1\} \tag{4.23}$$

с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$ и единичный круг

$$\bigcirc = \{x \in \mathbb{R}^2; \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}. \tag{4.24}$$

Из (4.21) и (4.22) факторизацией по решетке $\mathbb{Z}^2$ получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\square}(x,y) &= \min\nolimits_{l_1,l_2 \in \mathbb{Z}^2} \varrho_{\square}(x + l_1, y + l_2), \\ \tau_{\bigcirc}(x,y) &= \min\nolimits_{l_1,l_2 \in \mathbb{Z}^2} \varrho_{\bigcirc}(x + l_1, y + l_2) \end{aligned} \tag{4.25}$$

– метрики на торе $\mathbb{T}^2$. В новых метриках (4.25) тор $\mathbb{T}^2$ имеет соответственно диаметры

$$\begin{aligned} \delta_{\square} &= \max\{\tau_{\square}(x,y); \quad x,y \in \mathbb{T}^2\} = \tfrac{1}{2}, \\ \delta_{\bigcirc} &= \max\{\tau_{\bigcirc}(x,y); \quad x,y \in \mathbb{T}^2\} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Заметим, что в метрике $\tau_\square(x,y)$ тор $\mathbb{T}^2$ имеет тот же диаметр $\delta_\square = \frac{1}{2}$, что он имеет $\delta = \frac{1}{2}$ и во всех метриках $\tau_v^{[\xi]_n}(x,y)$ для $n = 0,1,2,\ldots$, определенных в (3.6). Совпадение диаметров

$$\delta = \delta_\square$$

объясняет выбор нормирующего множителя в (3.7).

Пусть $F \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая плоская выпуклая фигура с внутренней точкой, и пусть в нее вписана и описана окружности

$$\bigcirc_{\min} \subset F \subset \bigcirc_{\max} \tag{4.27}$$

диаметров $d_{\min}$ и $d_{\max}$. Здесь имеется ввиду, что окружности в (4.27) имеют соответственно минимально $d_{\min}$ и максимально $d_{\max}$ возможные диаметры с условием выполнения включений (4.27). Отношение

$$\theta(F) = \frac{d_{\max}}{d_{\min}} \tag{4.28}$$

назовем *отклонением* фигуры F от окружности. Так, для окружности (4.24) и квадрата (4.23) по определению (4.28) отклонения соответственно равны

$$\theta(\bigcirc) = 1, \quad \theta(\square) = \sqrt{2}. \tag{4.29}$$

Производные развертки $T^{[\xi]_n} = T(v^{[\xi]_n})$ для любой вкладывающейся тройки векторов $v = (v_0, v_1, v_2)$ и всех порядков $n = 0,1,2,\ldots$ представляют собою выпуклые шестиугольники. Чтобы выяснить вопрос о величине их отклонений $\theta(T^{[\xi]_n})$ от окружности (4.28), выберем последовательность $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \in \Xi$ с повторяющимися производными ξ_n, например, – вида

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \{1,2\}. \tag{4.30}$$

Для последовательности ξ вида (4.30) векторы перекладывания $v_k^{[\xi]_n}$ из производной тройки $v^{[\xi]_n} = \{v_0^{[\xi]_n}, v_1^{[\xi]_n}, v_2^{[\xi]_n}\} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^2$ обладают свойством

$$v_0^{[\xi]_n} = v_0, \quad |v_1^{[\xi]_n}| \to \infty, \quad |v_2^{[\xi]_n}| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{4.31}$$

где $|v_k^{[\xi]_n}| = \varrho_\bigcirc(v_k^{[\xi]_n}, 0)$ для $k = 1,2$ – длины векторов в евклидовой метрике (4.22). Так как при этом площади разверток $s(T(v^{[\xi]_n})) \leqslant 1$, то отсюда и (4.31) следует, что отклонение от окружности для разверток $T(v^{[\xi]_n})$ будет

$$\theta(T(v^{[\xi]_n})) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.32}$$

В силу первого свойства из (4.31) развертки $T(v^{[\xi]_n}) \bmod \mathbb{Z}^2$ включают в себя кусок торической обмотки с иррациональным направлением v_0, при этом длина этого куска $\to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому точки разверток $T(v^{[\xi]_n}) \bmod \mathbb{Z}^2$ всюду плотно заполняют весь тор $\mathbb{T}^2$ и, значит, радиусы

$$r_{\square}(T(v^{[\xi]_n})) \to \tfrac{1}{2}, \quad r_{\bigcirc}(T(v^{[\xi]_n})) \to \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4.33}$$

в метриках (4.21) и (4.22).

Напротив, по следствию 4.1 радиусы будут

$$r(T^{[\xi]_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4.34}$$

в нормированных метриках $\tau_v^{[\xi]_n}(x,y)$ из (3.6). Сопоставляя (4.33) и (4.34), видим существенное различие свойств наших метрик $\tau_v^{[\xi]_n}(x,y)$ и обычных метрик $\varrho_{\square}(x,y)$, $\varrho_{\bigcirc}(x,y)$ для разверток $T(v^{[\xi]_n})$ с бесконечно растущими отклонениями от окружности (4.32).

Преимущество же метрик $\tau_v^{[\xi]_n}(x,y)$ – в их естественном возникновении, о чем свидетельствует формулировка (4.6), (4.7) теоремы 4.1.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
2. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins.* — Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.
3. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи.* — Изв. РАН. Сер. мат. **71**, No. 2 (2007), 287–321.
4. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* Наука, М., 1978.
5. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen* mod *Eins.* — Math. Ann. **77** (1916), 313–352.

Zhuravlev V. G. Two-dimension approximations by the method of dividing toric tilings.

An infinite sequence of dividing two-dimensional toric tilings is constructed via the differentiation method. The nucleus of these tilings has radius tending to zero and it contains a point having the best approximations on tori with respect to some norm metric which is defined by the initial karyon.

Владимирский государственный университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 14 апреля 2015 г.