Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

В. В. Жук

О СИЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Пусть $C(\mathbb{R})$ – множество равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций f,

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad \omega(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|,$$

$$J_\sigma(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt.$$

В работе [1] установлена следующая теорема A.

Теорема A. *Пусть функции g, f, φ и K удовлетворяют следующим условиям: $\varphi'' \in C(\mathbb{R})$ и $\|\varphi''\| < +\infty$, область определения функции f содержит $\varphi(\mathbb{R})$. Пусть далее $\omega(f,h) \leqslant \omega(h)$, где ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, $g = f \circ \varphi$, ядро $K(t) \geqslant 0$ при всех t и суммируемо на $\mathbb{R}$,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} K(t)\, dt = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 K(t)\, dt < +\infty.$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ будет

$$|g(y) - J_\sigma(g,y)| \leqslant \omega\left(\frac{|\varphi'(y)|}{\sigma} \int\limits_{\mathbb{R}} |t| K(t)\, dt + \frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2} \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 K(t)\, dt\right).$$

Теорема A применялась в следующей ситуации: f непрерывна на $[-1,1]$, $\varphi(y) = \cos y$, K – ядро Бомана–Коровкина

$$K(t) = 4\pi \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{(t^2 - \pi^2)^2},$$

Ключевые слова: сильная аппроксимация, модуль непрерывности, положительные операторы, выпуклый модуль непрерывности.

$\sigma = n \in \mathbb{N}$. В результате имели для $y \in [0, \pi]$

$$|g(y) - J_n(g, y)| \leqslant \omega \left(\frac{\sin y}{n} \left(2 \operatorname{Si} \pi - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{2n^2} \right).$$

Полагая здесь $y = \arccos x$, находим при $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - J_n\left(f(\cos y), \arccos x\right)| \leqslant \omega \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \left(2 \operatorname{Si} \pi - \frac{4}{\pi} \right) + \frac{\pi^2}{2n^2} \right). \quad (1)$$

Подчеркнём, что $J_n\left(f(\cos y), \arccos x\right)$ есть алгебраический многочлен степени не выше $n-1$.

Было отмечено, что в случае $\varphi(y) = \cos y$ утверждение теоремы можно несколько уточнить. В связи с этим неравенство (1) можно заменить на следующую оценку

$$|f(x) - J_n\left(f(\cos y), \arccos x\right)| \leqslant \omega \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \left(2 \operatorname{Si} \pi - \frac{4}{\pi} \right) + |x| \frac{\pi^2}{2n^2} \right),$$

где $x \in [-1, 1]$.

В настоящей работе мы дополняем теорему A в ряде направлений. Аналогичные результаты также установлены для широкого класса сумматорных положительных методов приближения. В частности, с помощью модифицированных полиномов Бернштейна получено усиление теоремы В. И. Зубова (см. [2, теорема 3]) о возможности равномерной аппроксимации непрерывных на всей оси функций, имеющих конечные пределы при стремлении аргумента к бесконечностям, посредством некоторых сумм, построенных на основе функций распределения.

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения. Основные результаты

1.1. В дальнейшем $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел. Запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Возрастающая функция $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:
a) $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, если $t_1, t_2 \geqslant 0$ (полуаддитивность);

б) $\lim\limits_{t\to+0}\omega(t)=\omega(0)=0$;
называется модулем непрерывности. Множество всех модулей непрерывности обозначается Ω.

Множество модулей непрерывности, которые являются выпуклыми вверх на $\mathbb{R}_+$ функциями, обозначаем Ω^*.

Через $C[a,b]$ обозначаем пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{[a,b]}=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

Если $f\in C[a,b]$, то $\omega(f,h;a,b)=\sup|f(x)-f(y)|$, где верхняя грань берётся по всем $x,y\in[a,b]$, таким, что $|x-y|\leqslant h$.

Полагаем $\mathrm{Lip}(1;a,b)=\{f\in C[a,b]\colon \omega(f,h;a,b)\leqslant h$ для всех $h\geqslant 0\}$. В случае, когда ясно о каком отрезке идёт речь, его обозначение иногда опускаем.

1.2. Нам понадобятся следующие известные результаты.

Теорема B ([3, с. 8]). *Пусть полунорма P задана на $C[a,b]$ и такова, что величины*

$$\alpha=\sup_{f\in C[a,b]}\frac{P(f)}{\|f\|_{[a,b]}},\quad \beta=\sup_{f\in\mathrm{Lip}(1;a,b)}P(f)$$

конечны, числа M_0 и M_1 удовлетворяют неравенствам $M_0>0$, $M_0\geqslant\alpha$, $M_1\geqslant\beta$. Тогда, если для $f\in C[a,b]$ при $h\in\mathbb{R}_+$ будет $\omega(f,h;a,b)\leqslant\omega(h)$, где $\omega\in\Omega^*$, то имеет место неравенство

$$P(f)\leqslant\frac{M_0}{2}\omega\left(\frac{2M_1}{M_0}\right).$$

Теорема C (см. [3, с. 5; 4, с. 69]). *Для любого $\omega\in\Omega$ существует $\omega^*\in\Omega^*$ такой, что при всех неотрицательных t и λ имеет место*

$$\omega(\lambda t)\leqslant\omega^*(\lambda t)\leqslant(\lambda+1)\omega(t).$$

Замечание A (см. [3, с. 6]). Если $f\in C[a,b]$, то $\omega(f,\cdot\,;a,b)\in\Omega$.

1.3. Установим некоторые результаты, развивающие теорему A.

Теорема 1. *Пусть функции f, φ, g и K удовлетворяют следующим условиям: $f\in C[a,b]$, φ непрерывна на $\mathbb{R}$, область определения f содержит $\varphi(\mathbb{R})$, $g=f\circ\varphi$, ядро $K(t)\geqslant 0$ при всех $t\in\mathbb{R}$, K суммируемо* *на* $\mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K = 1$, $\sigma > 0$, $p \geqslant 1$. *Положим*

$$J_\sigma(l, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} l\left(y + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt,$$

$$\Phi(f, y) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(\varphi(y)) - f\left(\varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right)\right|^p K(t)\, dt\right)^{1/p}.$$

Тогда, если $\omega(f, h; a, b) \leqslant \omega(h)$ *при* $h \in \mathbb{R}_+$, *где* $\omega \in \Omega^*$, *то при* $y \in \mathbb{R}$

$$|g(y) - J_\sigma(g, y)| \leqslant \Phi(f, y), \tag{2}$$

$$\Phi(f, y) \leqslant \omega\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi(y) - \varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right|^p K(t)\, dt\right)^{1/p}\right). \tag{3}$$

Пусть, кроме того, $\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\, dt < +\infty$. *Тогда, если функция* φ *дважды дифференцируема на* $\mathbb{R}$ *и такова, что* $\|\varphi''\| < +\infty$, *то*

$$\Phi(f, y) \leqslant \omega(\alpha(y)), \tag{4}$$

где

$$\alpha(y) = \frac{|\varphi'(y)|}{\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^p K(t)\, dt\right)^{1/p} + \frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\, dt\right)^{1/p}.$$

Для функции $\varphi(y) = \cos y$ *неравенство (4) может быть усилено следующим образом*

$$\Phi(f, y) \leqslant \omega(\beta(y)), \tag{5}$$

где

$$\beta(y) = \frac{|\cos y|}{2\sigma^2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\, dt\right)^{1/p} + \frac{|\sin y|}{\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^p K(t)\, dt\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Неравенство (2) получается применением неравенства Гёльдера для интегралов. Фиксируем y и положим

$$\Phi(f) = \Phi(f, y).$$

В силу неравенства Минковского для интегралов функционал Φ полуаддитивен на $C[a,b]$. Ясно, что Φ – полунорма. Имеем

$$\alpha = \sup_{f\in C} \frac{\Phi(f)}{\|f\|} \leqslant 2, \quad \beta = \sup_{f\in \mathrm{Lip}(1;a,b)} \Phi(f) \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi(y) - \varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right|^p K(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Учитывая эти факты и применяя теорему В к полунорме Φ, приходим к (3).

Докажем (4). Опираясь на формулу Тейлора и используя неравенство Минковского для интегралов, имеем

$$\begin{aligned}
&\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi(y) - \varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right|^p K(t)\,dt\right)^{1/p} \\
&\qquad = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi'(y)\frac{t}{\sigma} + \frac{\varphi''(\gamma)}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2\right|^p K(t)\,dt\right)^{1/p} \\
&\qquad \leqslant \frac{|\varphi'(y)|}{\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^p K(t)\,dt\right)^{1/p} + \frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)dt\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Сопоставляя полученное неравенство и (3), приходим к (4).

Приступая к доказательству (5), прежде всего установим, что в условиях теоремы

$$\begin{aligned}
A &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\cos y - \cos\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right|^p K(t)\,dt\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{|\cos y|}{2\sigma^2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\,dt\right)^{1/p} + \frac{|\sin y|}{\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^p K(t)\,dt\right)^{1/p}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского для интегралов, имеем

$$A = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \cos y \left(1 - \cos \frac{t}{\sigma} \right) + \sin y \sin \frac{t}{\sigma} \right|^p K(t)\, dt \right)^{1/p}$$

$$\leqslant |\cos y| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 - \cos \frac{t}{\sigma} \right)^p K(t)\, dt \right)^{1/p} + |\sin y| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sin \frac{t}{\sigma} \right|^p K(t) dt \right)^{1/p}$$

$$= |\cos y| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} 2^p \left| \sin \frac{t}{2\sigma} \right|^{2p} K(t) dt \right)^{1/p} + |\sin y| \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \sin \frac{t}{\sigma} \right|^p K(t) dt \right)^{1/p}.$$

Отсюда, используя неравенство $|\sin t| \leqslant |t|$, получаем (6).

Соотношение (5) следует из сопоставления неравенств (3) и (6). $\square$

Замечание 1. Сопоставление теоремы 1 с теоремой C позволяет получить аналоги результатов теоремы 1 для случая, когда модуль непрерывности не мажорируется выпуклым. Приведём пример (применительно к неравенству (3)) получающихся здесь результатов.

Пример 1. Пусть функции f, φ, g и K удовлетворяют следующим условиям: $f \in C[a, b]$, φ непрерывна на $\mathbb{R}$, область определения f содержит $\varphi(\mathbb{R})$, ядро $K(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, K суммируемо на $\mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K = 1$, $\sigma > 0$, $p \geqslant 1$,

$$\Phi(f, y) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(\varphi(y)) - f\left(\varphi\left(y + \frac{t}{\sigma} \right) \right) \right|^p K(t)\, dt \right)^{1/p}.$$

Тогда при $y \in \mathbb{R}$

$$\Phi(f, y) \leqslant 2\omega \left(f, \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \varphi(y) - \varphi\left(y + \frac{t}{\sigma} \right) \right|^p K(t)\, dt \right)^{\frac{1}{p}}; a, b \right).$$

Аналогичные результаты (даже в большей общности за счёт использования теоремы C в полном объёме) могут быть получены применительно к другим неравенствам, приводимым ниже. Однако мы, как правило, не будем останавливаться на этом.

Следствие 1. *Пусть функции f, φ, g и K удовлетворяют следующим условиям: $f \in C[a,b]$, φ непрерывна на $\mathbb{R}$, область определения f содержит $\varphi(\mathbb{R})$, $g = f \circ \varphi$, ядро $K(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, K суммируемо на $\mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K = 1$, $\sigma > 0$. Положим*

$$J_\sigma(g,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} g\left(y + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt.$$

Тогда, если $\omega(f,h;a,b) \leqslant \omega(h)$ при $h \in \mathbb{R}_+$, где $\omega \in \Omega^*$, то при $y \in \mathbb{R}$

$$|g(y) - J_\sigma(g,y)| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(\varphi(y)) - f\left(\varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right)\right|^2 K(t)\, dt\right)^{1/2}$$

$$= \left((g(y) - J_\sigma(g,y))^2 + J_\sigma(g^2,y) - J_\sigma^2(g,y)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \omega\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\varphi(y) - \varphi\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right)^2 K(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для доказательства надо положить в теореме 1 $p = 2$ и воспользоваться неравенством (3).

Следствие 2. *Пусть $f \in C[-1,1]$, $g(y) = f(\cos y)$, $\sigma > 0$, $p \geqslant 1$, ядро $K(t) \geqslant 0$ при $t \in \mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K = 1$, $\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\, dt < +\infty$,*

$$J_\sigma(l,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} l\left(y + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt.$$

Тогда, если $\omega(f,h;-1,1) \leqslant \omega(h)$ при всех $h \in \mathbb{R}_+$, где $\omega \in \Omega^*$, то при $x \in [-1,1]$, $y = \arccos x$ имеем

$$|f(x) - J_\sigma(g, \arccos x)| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(x) - g\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right|^p K(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sigma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^p K(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{|x|}{2\sigma^2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^{2p} K(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Для доказательства следствия 2 надо положить в теореме 1 $[a,b] = [-1,1]$, $\varphi(y) = \cos y$, $y = \arccos x$ и воспользоваться неравенствами (2) и (5).

Следствие 3. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, $g(y) = f(\cos y)$, *ядро* $K(t) \geqslant 0$ *при* $t \in \mathbb{R}$, K *суммируемо на* $\mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K = 1$, $K(t) = K(-t)$ *при* $t \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$,

$$J_\sigma(l,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} l\left(y + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\,dt.$$

Тогда, если $\omega(f,h;-1,1) \leqslant \omega(h)$ *при всех* $h \in \mathbb{R}_+$, *где* $\omega \in \Omega^*$, *то при* $x \in [-1,1]$ *имеем*

$$\Big((f(x) - J_\sigma(g,\arccos x))^2 + J_\sigma(g^2,\arccos x) - J_\sigma^2(g,\arccos x)\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \omega\left(\left(4x^2\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sin^4\frac{t}{2\sigma}\right)K(t)\,dt + (1-x^2)\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sin\frac{t}{\sigma}\right)^2 K(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для доказательства следствия 3 надо положить в следствии 1 $[a,b] = [-1,1]$, $\varphi(y) = \cos y$, $y = \arccos x$ и воспользоваться равенством

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\cos y - \cos\left(y + \frac{t}{\sigma}\right)\right)^2 K(t)\,dt\right)^{1/2}$$
$$= \left(4\cos^2 y\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sin^4\frac{t}{2\sigma}\right)K(t)\,dt + \sin^2 y\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sin^2\frac{t}{\sigma}\right)K(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

1.4. Отметим некоторые аналоги результатов пункта 1.3 применительно к положительным сумматорным методам приближения.

Теорема 2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, *при* $k = \overline{0,n}$ *числа* $y_k \in [a,b]$, *функции* l_k *неотрицательны на* $[a,b]$ *и при всех* y *из этого отрезка* $\sum\limits_{k=0}^{n} l_k(y) = 1$; $p \geqslant 1$. *Пусть далее функция* $\varphi\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *строго монотонна и непрерывна (в обобщённом смысле), функция* $f\colon \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $g = f \circ \varphi$. *Тогда, если при* $h \in \mathbb{R}_+$

$$\omega(g,h;a,b) \leqslant \omega(h),$$

где $\omega \in \Omega^*$, то для $x \in \varphi([a,b])$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |f(x) - g(y_k)|^p \, l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p} \leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left|\varphi^{-1}(x) - y_k\right|^p l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p}\right).$$

Доказательство теоремы 2 основывается на теореме B.

Замечание 2. Положим

$$L(g,x) = \sum_{k=0}^{n} g(y_k) l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Тогда в условиях теоремы 2 для $x \in \varphi([a,b])$ справедливо неравенство

$$|f(x) - L(g,x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |f(x) - g(y_k)|^p \, l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p}.$$

Доказательство замечания 2 получается применением неравенства Гёльдера для сумм.

Следствие 4. *В условиях теоремы 2 (без ограничений на модуль непрерывности) для $x \in \varphi([a,b])$ справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |f(x) - g(y_k)|^p \, l_k(\varphi^{-1}(x))\right)^{1/p} \leqslant 2\omega\left(g, \left(\sum_{k=0}^{n} \left|\varphi^{-1}(x) - y_k\right|^p l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p}; a, b\right).$$

Доказательство следствия 4 получается сопоставлением теоремы 2 с теоремой C. При этом принимается во внимание замечание A.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2,*

$$L(g,x) = \sum_{k=0}^{n} g(y_k) l_k \left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Тогда для $x \in \varphi([a,b])$ *имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}|f(x) - L(g,x)| &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |f(x) - g(y_k)|^2 \, l_k\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/2} \\ &= \left((f(x) - L(g,x))^2 + L(g^2,x) - L^2(g,x)\right)^{1/2} \\ &\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left|\varphi^{-1}(x) - y_k\right|^2 l_k\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Первое неравенство совпадает с замечанием 2 при $p = 2$. Равенство получается непосредственными вычислениями. □

1.5. Остановимся на некоторых конкретизациях теоремы 2 и её следствий применительно к методам аппроксиации типа полиномов Бернштейна, построенных на основе полиномов

$$p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Для функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ через $B_n(f)$ обозначим полином Бернштейна порядка n:

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x).$$

Предложение 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, *функция* $\varphi\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ *строго монотонна и непрерывна (в обобщённом смысле); функция*

$$f\colon \varphi([0,1]) \to \mathbb{R}$$

непрерывна, $g = f \circ \varphi$. *Тогда для* $x \in \varphi([0,1])$ *справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}&\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right| \\ &\qquad \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|^p p_{n,k}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leqslant 2\omega\left(g, \left(\sum_{k=0}^{n} \left|\varphi^{-1}(x) - \frac{k}{n}\right|^p p_{n,k}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{\frac{1}{p}}; 0,1\right).\end{aligned}$$

Если, кроме того, при $h \in \mathbb{R}_+$ *будет* $\omega(g, h; 0, 1) \leqslant \omega(h)$, *где* $\omega \in \Omega^*$, *то для* $x \in \varphi([0,1])$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|^{p} p_{n,k}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p} \leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\varphi^{-1}(x)-\frac{k}{n}\right|^{p} p_{n,k}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)^{1/p}\right).$$

Следствие 6. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$; $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ – *строго возрастающая непрерывная (в обобщённом смысле) функция, такая, что* $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, *функция* $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $g = f \circ \Phi^{-1}$. *Тогда для* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *справедливы соотношения*

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(\Phi(x))\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|^{p} C_n^k \Phi^k(x)\left(1-\Phi(x)\right)^{n-k}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant 2\omega\left(g, \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Phi(x)-\frac{k}{n}\right|^{p} C_n^k \Phi^k(x)\left(1-\Phi(x)\right)^{n-k}\right)^{\frac{1}{p}}; 0, 1\right).$$

Если, кроме того, при $h \in \mathbb{R}_+$ *будет* $\omega(g, h; 0, 1) \leqslant \omega(h)$, *где* $\omega \in \Omega^*$, *то для* $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|^{p} C_n^k \Phi^k(x)\left(1-\Phi(x)\right)^{n-k}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\Phi(x)-\frac{k}{n}\right|^{p} C_n^k \Phi^k(x)\left(1-\Phi(x)\right)^{n-k}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Следствие 7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ – *строго возрастающая непрерывная (в обобщённом смысле) функция, такая, что* $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, *функция* $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *непрерывна,* $g = f \circ \Phi^{-1}$,

$$U_n(l, x) = \sum_{k=0}^{n} l\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}\left(\Phi(x)\right).$$

Тогда для $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$|f(x) - U_n(g,x)| \leqslant \Big((f(x) - U_n(g,x))^2 + U_n(g^2,x) - U_n^2(g,x) \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \alpha(x) \leqslant 2\omega\left(g, \left(\frac{\Phi(x)(1-\Phi(x))}{n}\right)^{\frac{1}{2}}; 0,1\right).$$

Если, кроме того, при $h \in \mathbb{R}_+$ *будет* $\omega(g,h;0,1) \leqslant \omega(h)$, *где* $\omega \in \Omega^*$, *то для* $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\alpha(x) \leqslant \omega\left(\left(\frac{\Phi(x)(1-\Phi(x))}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для доказательства следствия 7 надо положить $p = 2$ в следствии 6 и принять во внимание равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|^2 C_n^k \Phi^k(x)\,(1-\Phi(x))^{n-k}$$
$$= (f(x) - U_n(g,x))^2 + U_n(g^2,x) - U_n^2(g,x),$$
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - y\right)^2 p_{n,k}(y) = \frac{y(1-y)}{n}.$$

Замечание 3. Так как $\sup\limits_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Phi(x)(1-\Phi(x)) = \frac{1}{4}$, то в силу следствия 7

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \alpha(x) \leqslant 2\omega\left(g, \frac{1}{2\sqrt{n}}; 0,1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последнее соотношение следует из того, что функция $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Пусть F_0 – непрерывная строго возрастающая функция распределения. В. И. Зубовым [2] установлена следующая теорема.

Теорема D. *Если функция* $G(x)$ *задана при* $x \in (-\infty,+\infty)$, *вещественна и имеет конечные предельные значения при неограниченном убывании и неограниченном возрастании независимой переменной, то для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать интерполяционный многочлен*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j C_n^j F_0^j(x)\,(1-F_0(x))^{n-j}$$

с вещественными коэффициентами c_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, *такой, что будет* $\max\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |G(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

Замечание 3 развивает теорему D в нескольких направлениях.

Литература

1. В. Жук, Г. Натансон, *К вопросу приближения функций посредством положительных операторов.* — Учёные записки Тартуского гос. ун-та, выпуск 430. Труды по математике и механике, XIX. Тарту (1977), 58–69.
2. В. И. Зубов, *Интерполяционные многочлены Бернштейна.* — Докл. РАН **343**, No. 5 (1995), 593–595.
3. В. В. Жук, *Структурные свойства функций и точность аппроксимации.* Л., 1984.
4. И. К. Даугавет, *Введение в классическую теорию приближения функций.* С.-П., 2011.

Zhuk V. V. On strong approximation of functions by positive operators.

We consider questions of strong approximation of continuous functions by positive operators. The estimations are established in the terms of modulus of continuity and its convex majorant.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 23 октября 2015 г.