Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

Ю. В. Дымченко

УСЛОВИЕ МАЛОСТИ ОБХВАТА В СУБФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе [12] показано, что если E – NED-множество в комплексной плоскости, то его двумерная мера Лебега равна 0 и что любые две точки из его дополнения можно соединить кривой, не проходящей через E и такой, что её длина будет сколь угодно близка к расстоянию между этими двумя точками. В [11] приведено более сильное условие обхвата множества E относительно семейств прямых. В статье [7] приведено распространение этого результата на ёмкости и модули с весом Макенхаупта, а в [8] был доказан соответствующий результат в финслеровых пространствах.

Пространства Карно-Каратеодори и субфинслеровы пространства отличаются от римановых и финслеровых пространств соответственно ограничением класса допустимых путей. С основными вопросами анализа на группах Карно можно ознакомиться, например, в книге [16]. Емкости, модули конденсаторов, а также свойства различных функциональных классов на группах Карно изучались в основном группой С. К. Водопьянова (см., например, [4–6]).

Субфинслеровы пространства изучались, например, в работах [1–3, 14, 15].

Приведем основные определения и обозначения. Доказательство многих нижеприведенных рассуждений можно найти в [16].

Стратифицированной однородной группой (или группой Карно) называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли которой $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму векторных пространств $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $k = 1, 2, \dots, m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Здесь $[X, Y] = XY - YX$ – коммутатор элементов X и Y, а $[V_1, V_j]$ – линейная оболочка элементов $[X, Y]$, где $X \in V_1$, $Y \in V_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть левоинвариантные векторные поля X_{11}, $X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ образуют базис V_1. Определим подрасслоение HT касательного расслоения $T\mathbb{G}$ со слоями HT_x, $x \in \mathbb{G}$, которые представляют собой линейную

Ключевые слова: емкость конденсатора, модуль семейства кривых, условие малости обхвата, субфинслерово пространство, группа Карно.

оболочку векторных полей $X_{11}(x)$, X_{12}, $\dots$, $X_{1n_1}(x)$. Назовем HT горизонтальным касательным расслоением, а его слои HT_x – горизонтальными касательными пространствами в точке $x \in \mathbb{G}$.

Расширим базис X_{11}, $\dots$, X_{1n_1} до базиса X_{ij}, $j = 1, 2, \dots n_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, всей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где каждый базис X_{ij} представляет собой коммутатор j-го порядка некоторых векторов X_{1j}, $j = 1, 2, \dots, n_1$. Таким образом, n_i является размерностью пространства V_i, $i = 1, 2, \dots, m$.

Любой элемент $x \in \mathbb{G}$ можно единственным образом представить в виде $x = \exp\left(\sum\limits_{i,j} x_{ij} X_{ij}\right)$. Набор чисел $\{x_{ij}\}$ назовем координатами элемента x. Получим взаимно однозначное отображение между группой $\mathbb{G}$ и пространством R^N, где $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ – топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Мера Лебега в R^N индуцирует биинвариантную меру Хаара в $\mathbb{G}$, которую мы обозначим через dx.

Обозначим $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Определим растяжения $\delta_\lambda x$, $\lambda > 0$, по формуле $\delta_\lambda x = (\lambda x_1, \lambda^2 x_2, \dots, \lambda^m x_m)$. Очевидно, $d(\delta_\lambda x) = \lambda^Q dx$, где $Q = \sum\limits_i i n_i$ – однородная размерность группы $\mathbb{G}$.

Пусть $F(x, \xi)$ – неотрицательная функция, определенная при $x \in \mathbb{G}$, $\xi \in HT_x$, которая гладко зависит от x и ξ и представляет собой финслерову метрику на каждом слое HT_x, то есть выполняются условия:

1) для любого $a > 0$ выполнено $F(x, a\xi) = aF(x, \xi)$ и $F(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in \mathbb{G}$;

2) для любых $x \in \mathbb{G}$, $\xi, \eta \in HT_x$ функция $\nabla_H^2 F^2(x, \eta)(\xi, \xi)$ положительно определена, где

$$(\nabla_H^2)_{ij} = \frac{1}{2}(X_{1i} X_{1j} + X_{1j} X_{1i}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_1.$$

Определим на кокасательном расслоении HT^* функцию $H(x, \omega)$, где $x \in \mathbb{G}$, $\omega \in HT_x^*$, как супремум величин $\omega(\xi)$ по всем $\xi \in HT_x$, удовлетворяющим условию $F(x, \xi) \leqslant 1$. В дальнейшем будем отождествлять ω с вектором, имеющем координаты дифференциальной формы ω в базисе ω_i, двойственным к базису X_{1i}, то есть $\omega_i(X_{1j}) = \delta_{ij}$ для $i, j = 1, 2, \dots, n_1$.

Кривую $\gamma : (a,b) \to \mathbb{G}$ назовем горизонтальной, если для почти всех $t \in (a,b)$ $\dot\gamma(t) \in HT_{\gamma(t)}$. Длину такой кривой определим как интеграл $l(\gamma) = \int\limits_a^b F(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$. Если длина конечна, то кривую назовем спрямляемой.

На группе $\mathbb{G}$ определим однородную норму $|\cdot|$, удовлетворяющую условиям: для любого $x \in \mathbb{G}$ $|x| \geqslant 0$ и $|x| = 0$ только при $x = 0$; $|x^{-1}| = |x|$, $|\delta_\lambda x| = \lambda|x|$. Определим шар с центром в точке $x \in \mathbb{G}$ радиуса $r > 0$ следующим образом: $B(x,r) = \{y \in \mathbb{G} : |x^{-1}y| < r\}$. Заметим, что он является левым сдвигом шара $B(0,r)$, который в свою очередь является образом единичного шара $B(0,1)$ при растяжении δ_r.

Меру dx нормируем так, чтобы $|B(0,1)| = \int\limits_{B(0,1)} dx = 1$. Очевидно, что $|B(0,r)| = r^Q$. Посредством непрерывной положительной в $\mathbb{G}$ функции $g(x)$ определим элемент объема $d\sigma = g(x)dx$.

Расстояние $d_c(x,y)$ между двумя точками $x,y \in \mathbb{G}$ определим как инфимум длин горизонтальных кривых, соединяющих x и y.

Пусть D – область в $\mathbb{G}$ и $E_0, E_1 \subset \bar{D}$ – замкнутые непересекающиеся множества. Тройку множеств (E_0,E_1,D) назовем конденсатором.

Будем говорить, что кривая $\gamma : (a,b) \to D$ соединяет множества E_0 и E_1, если $\liminf\limits_{t\to a} d(\gamma(t),E_0) = \liminf\limits_{t\to b} d(\gamma(t),E_1) = 0$, где $d(x,y) = |x^{-1}y|$ для $x,y \in \mathbb{G}$. Семейство всех таких локально спрямляемых кривых обозначим через $\Gamma(E_0,E_1,D)$.

Расстояния d и d_c эквивалентны друг другу, а топология, порожденная расстоянием d, эквивалентна евклидовой [4].

Неотрицательную числовую борелевскую функцию на D назовём допустимой для некоторого семейства Γ кривых, расположенных в D, если для любой $\gamma \in \Gamma$ $\int\limits_\gamma \rho F(x,dx) = \int\limits_a^b \rho(\gamma(t))F(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt \geqslant 1$, где $\gamma(t)$ – параметризация γ посредством параметра $t \in (a,b)$. Множество всех допустимых функций для Γ обозначим через $\operatorname{adm}\Gamma$.

Пусть $p > 1$. Определим p-модуль конденсатора (E_0,E_1,D) следующим образом:

$$M_{p,F}(E_0,E_1,D) = \inf \int\limits_D \rho^p\, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma(E_0,E_1,D)$.

Функцию $v : D \to \mathbb{R}$ назовем локально липшицевой в D, если для любого компактного подмножества $D' \subset D$ существует константа L такая, что для любых $x, y \in D'$ $v(x)-v(y) \leqslant Ld_c(x,y)$. Определим класс $L^1_{p,F}(D)$ как замыкание класса локально липшицевых в D функций по норме

$$\|v\|_{L^1_{p,F}(D)} = \left(\int\limits_D H(x, Xv)^p \, d\sigma\right)^{1/p},$$

где $Xv = (X_{11}v, X_{12}v, \ldots, X_{1n_1}v)$ – горизонтальный градиент функции v. Он существует по обобщенной теореме Радемахера из [18].

Обозначим через $\mathrm{Adm}(E_0, E_1, D)$ множество неотрицательных функций из $L^1_{p,F}(D) \cap C(D)$, равных нулю (единице) в некоторой окрестности E_0 (E_1). Определим p-емкость конденсатора:

$$C_{p,F}(E_0, E_1, D) = \inf \int\limits_D H(x, Xv)^p \, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем функциям $v \in \mathrm{Adm}(E_0, E_1, D)$.

Равенство емкости и модуля конденсатора было установлено в [9].

Пусть Γ – семейство кривых $u(x) = y$, $u : D' \to R^{n-1}$, $y \in G \subset R^{n-1}$, заполняющих некоторую область D', $\overline{D'} \subset D$. Здесь u – локально липшицева функция. По слабой теореме Сарда (см. [17]) почти все кривые из этого семейства будут горизонтальными.

В работе [13] доказана формула коплощади для общих плотностей. В частности, для субфинслеровых многоообразий она выглядит следующим образом:

$$\int\limits_{D'} f(x)K(x)d\sigma = \int\limits_G \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} f(x)F(x,dx)\right) dy, \tag{1}$$

где $K(x) = C(du, dt^*, F^*_\sigma)$ – коякобиан отображения u.

Лемма 1. *Модуль семейства кривых* Γ*, введенного выше, вычисляется по формуле:*

$$M_{p,F}(\Gamma) = \int\limits_G \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}F(x,dx)\right)^{1-p} dy. \tag{2}$$

Доказательство. Для любой допустимой функции ρ, используя неравенство Гёльдера, получим:

$$1 \leqslant \int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} \rho F(x,dx) = \int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} \rho K^{-\frac{1}{p}} \cdot K^{\frac{1}{p}} F(x,\, dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x,dx) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x,dx) \geqslant \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,\, dx) \right)^{1-p}.$$

Проинтегрируем по y и применим формулу (1):

$$\int\limits_{D'} \rho^p d\sigma = \int\limits_{D} \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} \rho^p K(x)^{-1} F(x,dx) \right) dy \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{G} \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \right)^{1-p} dy.$$

В силу произвольности функции ρ

$$M_{p,F}(\Gamma) \geqslant \int\limits_{D} \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,\, dx) \right)^{1-p} dy.$$

Рассмотрим допустимую функцию

$$\rho_0(x) = \frac{K(x)^{q-1}}{\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,\, dx)},$$

где $y = u(x)$. Для неё, снова используя формулу коплощади, имеем:

$$\int\limits_{D'} \rho_0^p d\sigma = \int\limits_{D'} K(x)^q \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \right)^{-p} d\sigma$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \right)^{-p} \right) dy$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_{D'\cap u^{-1}(y)} K(x)^{q-1} F(x,dx) \right)^{1-p} dy.$$

Отсюда следует, что функция ρ_0 является экстремальной для данного семейства кривых и имеет место равенство, сформулированное в условии леммы.

В дальнейшем будем считать, что все кривые семейства Γ являются достаточно гладкими для того, чтобы существовало семейство поверхностей $v(x) = c$, трансверсальных к Γ.

Пусть дано компактное множество $E \subset D$. Будем говорить, что множество E удовлетворяет условию малости обхвата относительно семейства кривых Γ, если для любого $\varepsilon > 0$, для любой борелевской функции ρ, локально ограниченной в $D \setminus E$, для почти всех кривых γ этого семейства (в смысле модуля) существует конечное число криволинейных интервалов (a_k, b_k) на кривой γ между поверхностями $v(z) = a_k$ и $v(z) = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(1) эти интервалы покрывают множество $\gamma \cap E$, их суммарная длина меньше ε и концы этих интервалов лежат на $\gamma \setminus E$;

(2) существуют горизонтальные кривые γ_k с концами a_k и b_k, не проходящие через E, и при этом

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \rho F(x,dx) < \varepsilon.$$

Компакт $E \subset D$ будем называть $NC_{p,F}$-множеством, если для любых непересекающихся замкнутых множеств E_0,$E_1 \subset \bar{D}$ выполнено условие

$$C_{p,F}(E_0, E_1, D) = C_{p,F}(E_0, E_1, D \setminus E).$$

$\square$

Теорема 1. *Для того чтобы компакт* $E \subset D$, $\int\limits_E d\sigma = 0$, *был* $NC_{p,F}$-*множеством, необходимо, чтобы он удовлетворял условию малости* *обхвата относительно любого семейства кривых* Γ, *удовлетворяющего вышеприведённым условиям.*

Доказательство. Можно считать, что $E \subset D'$. Пусть ρ – борелевская неотрицательная локально ограниченная в $D \setminus E$ функция из $L_{p,F}(D)$, $P_{ab} = \{z \in D : a < v(z) < b\}$. Рассмотрим те значения y, для которых кривая $u^{-1}(y)$ горизонтальна и при этом выполняются условия:

(1) $\int\limits_{u^{-1}(y)} K(x)^{q-1}\, F(x, dx) < \infty$;

(2) существует

$$\frac{d}{dy} \int \left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap P_{ab}} K(x)^{q-1}\, F(x, dx) \right)^{1-p} dy$$

$$\left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap P_{ab}} K(x)^{q-1}\, F(x, dx) \right)^{1-p} < \infty;$$

(3) существует

$$\frac{d}{dy} \int \left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap P_{ab}} \frac{\rho^p\, F(x, dx)}{K(x)} \right) dy$$

$$\int\limits_{u^{-1}(y)\cap P_{ab}} \frac{\rho^p\, F(x,\, dx)}{K(x)} < \infty;$$

(4) $l(u^{-1}(y) \cap E) = 0$.

В 2) и 3) a, b – рациональные числа, $y \in G$, $\frac{d}{dy}$ – производная по системе параллелепипедов $Q_\delta = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : y_i - \delta/2 \leqslant z_i \leqslant y_i + \delta/2, i = 1, \ldots, n-1\}$ (см. [10, гл. XIII, §1]).

Покажем, что эти условия выполняются для L_{n-1}-почти всех y. Для 1) это следует из конечности модуля и леммы 1, для 2) – из теоремы 2, для 3) – из того факта, что $\rho \in L_{p,F}(G)$ и леммы 1.

Докажем, что 4) выполнено для L_{n-1}-почти всех y. Имеем:

$$0 = \int\limits_E d\sigma = \int dy \int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1}\, F(x, dx).$$

Отсюда для L_{n-1}-почти всех y

$$\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1}\,F(x,dx)=0.$$

Далее,

$$\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} F(x,dx)\leqslant$$

$$\left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{-1}\,F(x,dx)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{u^{-1}(y)\cap E} K(x)^{q-1}\,F(x,dx)\right)^{\frac{1}{q}}=0$$

для L_{n-1}-почти всех $y\in G$.

Пусть y удовлетворяет условиям 1)–4). Рассмотрим соответствующую кривую $u^{-1}(y)$. Ее можно задать уравнениями

$$x_1=x_1(t),\ldots,x_n=x_n(t),$$

где параметр t зададим так, чтобы точка $(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ являлась пересечением $u^{-1}(y)$ с поверхностью $v(x)=t$. Покроем $u^{-1}(y)\cap E$ множествами $A_k=\{x\in u^{-1}(y):a_k<t<b_k\}$, $k=\overline{1,m}$, где все a_k, b_k – рациональные числа и

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}A_k} K(x)^{q-1}\,F(x,dx)<\frac{\varepsilon}{4},\qquad \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}A_k}\frac{\rho^p\,F(x,dx)}{K(x)}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Фиксируем k. Пусть $\delta>0$, $\Pi_\delta=\{x:u(x)=y',y'\in Q_\delta,a_k<t<b_k\}$. Рассмотрим семейство горизонтальных кривых Γ_k, соединяющих $v(x)=a_k$ с $v(x)=b_k$ в Π_δ и не проходящих через E. Так как E – $NC_{p,F}$-компакт, то модуль этого семейства равен модулю всех горизонтальных кривых, соединяющих $v=a_k$ с $v=b_k$ в Π_δ, который, в свою очередь, не меньше модуля семейства модуля Γ_k^1 кривых $\gamma_z^k=\{x:u(x)=z,a_k<t<b_k\}$, где $z\in Q_\delta$. Таким образом, имеем по лемме 2

$$M_{p,F}(\Gamma_k)\geqslant M_{p,F}(\Gamma_k^1)=\int\limits_{Q_\delta}\left(\int\limits_{\gamma_z^k}K(x)^{q-1}\,F(x,dx)\right)^{1-p}dz. \qquad (3)$$

Пусть $L = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma_k} \int\limits_{\gamma} \rho\, ds_F$. Тогда функция ρ/L допустима для модуля семейства Γ_k и поэтому

$$M_{p,F}(\Gamma_k) \leqslant L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p d\sigma. \tag{4}$$

Соединяя (3) и (4), получим:

$$L^{-p} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^p d\sigma \geqslant \int\limits_{Q_\delta} \Bigg(\int\limits_{\gamma_z^k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) \Bigg)^{1-p} dz.$$

При достаточно малых δ, используя неравенство Юнга, имеем:

$$L^{-p} \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) \geqslant \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{1-p},$$

$$L^{p} \leqslant \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{p-1},$$

$$\begin{aligned} L \leqslant & \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ & \leqslant \frac{1}{p} \Bigg(\int\limits_{\gamma_y^k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) + \frac{1}{q} \Bigg(\int\limits_{\gamma_z^k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{8m} \Bigg) = \\ & = \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{8m}. \end{aligned}$$

По определению инфимума, найдется кривая $\gamma_k' \in \Gamma_k$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_k'} \rho\, F(x,dx) \leqslant L + \frac{\varepsilon}{8m} \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{A_k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{A_k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{4m}.$$

В силу локальной ограниченности ρ на $G \setminus E$ при достаточно малом δ существуют горизонтальные кривые γ_k^1, γ_k^2, не проходящие через E, которые соединяют $t = a_k$ и $t = b_k$ на $u^{-1}(y)$ с соответствующими концами кривой γ'_k и такие, что

$$\int\limits_{\gamma_k^1} \rho\, F(x,dx) + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho\, F(x,dx) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Пусть $\gamma_k \subset \gamma_k^1 \cup \gamma'_k \cup \gamma_k^2$ – кривая, начало и конец которой лежат на $u^{-1}(y)$. Тогда для полученных γ_k имеем:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k} \rho\, F(x,dx) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} \frac{\rho^p\, F(x,dx)}{K(x)} + \frac{1}{q} \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k} K(x)^{q-1}\, F(x,dx) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \Bigg(\int\limits_{\gamma_k^1} \rho\, F(x,dx) + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho\, F(x,dx) \Bigg) \leqslant \frac{1}{p}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{q}\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана. $\square$

Литература

1. В. Н. Берестовский, *Однородные пространства с внутренней метрикой и субфинслеровы многообразия. Научный семинар*, `http://gct.math.nsc.ru/?p=2632`.
2. В. Н. Берестовский, *Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой.* — Сиб. мат. ж. **55**, No. 5 (2014), 959–970.
3. А. В. Букушева, *Слоения на распределениях с финслеровой метрикой.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**, No. 3 (2014), 247–251.
4. С. Водопьянов, А. Ухлов, *Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно.* — Сиб. мат. ж. **39**, No. 4 (1998), 776–795.
5. С. К. Водопьянов, *Теория потенциала на однородных группах.* — Мат. сб. **180**, No. 1 (1989), 57–77.
6. С. К. Водопьянов, *Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно.* — Сиб. мат. ж. **37**, No. 6 (1996), 1269–1295.
7. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
8. Ю. В. Дымченко, *Условие малости обхвата в финслеровом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **429** (2014), 55–63.
9. Ю. В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора в субфинслеровом пространстве*, `http://arxiv.org/abs/1504.07982`.
10. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* СПб.: Лань, 1999.
11. В. А. Шлык, *Условие ε-обхвата для N-компактов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 154–161.

12. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
13. D. Cibotaru, J. de Lira, *A note on the area and coarea formulas*, http://arxiv.org/abs/1305.2968.
14. J. N. Clelland, C. G. Moseley, *Sub-Finsler geometry in dimension three.* — Differential Geom. Appl. **24**, No. 6 (2006), 628–651.
15. E. L. Donne, *A metric characterization of Carnot groups*, http://arxiv.org/abs/1304.7493v2.
16. G. Folland, E. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups.* Mathematical Notes **28**. Princeton University Press, Princeton, 1982.
17. V. Magnani, *On a general coarea inequality and applications.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **27** (2002), 121–140.
18. J. Mitchell, *On Carnot-Caratheodory metrics.* — J. Differential Geom. **21**, No. 1 (1985), 35–45.

Dymchenko Yu. V. The condition of smallness of girth on Sub-Finsler spaces.

In this paper, the condition of smallness of girth relatively some curves families for removable sets on Sub-Finsler spaces is stated.

Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток, ул. Суханова, 8
E-mail: dymch@mail.ru

Поступило 5 мая 2015 г.