Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

В. Н. Дубинин

ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, p-ЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ПО ОКРУЖНОСТИ

Введение

Функция f, заданная в некоторой области G комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, называется p-листной, $p = 1, 2, \dots$, в этой области, если она принимает в G каждое комплексное значение w не более чем p раз (с учетом кратности). По-видимому, впервые это понятие использовал Монтель при изучении нормальных семейств и их обобщений. В дальнейшем рассматривались более общие классы функций. Так, в 1946 году Бернацкий [1] ввел понятие функции, p-листной в среднем по окружности (circumferentially mean p-valent function). Пусть функция f мероморфна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и отлична от постоянной, и пусть $n(w, f)$ означает число корней уравнения $f(z) = w$ в U. Функция f называется p-листной в среднем по окружности (сокр. c.m. p-листной функцией), если для любого $\rho > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} n(\rho e^{i\varphi}, f)d\varphi \leqslant p.$$

Многочисленные результаты для c.m. p-листных функций были установлены методами экстремальной метрики и симметризации (см. монографии [2, 3] и библиографию в них). Существенную роль при этом играет следующее обстоятельство. Если, например, функция

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$$

голоморфна и c.m. p-листна в круге U, то каждая ветвь функции $[f(z)]^{1/p}$ является c.m. 1-листной в U. Исследование c.m. 1-листных функций методом круговой симметризации Полиа не на много отличается от применения этой симметризации к однолистным функциям.

Ключевые слова: голоморфная функция, p-листная функция, p-листная в среднем по окружности функция, полином Чебышева, симметризация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российская научного фонда (проект No. 14-11-00022).

Сказанное выше относится и к мероморфным с.m. p-листным функциям, имеющим в круге U только один полюс p-го порядка [4]. Однако для мероморфных функций f другого вида функция $[f(z)]^{1/p}$ не является однозначной. Эта же проблема возникает при изучении с.m. p-листных функций с нормировкой Монтеля. Нерешенные задачи для p-листных функций поднимались нами в работе [5]. Там же предлагалась новая версия круговой симметризации, с помощью которой удается решить часть поставленных задач [5, 7]. В данной заметке устанавливаются теоремы искажения в следующих классах многолистных функций:

$S_p^c(\tau)$, $0 < \tau < \infty$ – класс мероморфных и с.m. p-листных в круге U функций f, для которых разложение в некоторой окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots,$$

суммарная кратность всех полюсов в U не превосходит $p - 1$, а модули ненулевых критических значений не меньше, чем τ;

$D_p^c(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda < \infty$, – класс голоморфных с.m. p-листных в круге U функций, отображающих U на риманову поверхность, которая не содержит замкнутого k–листного круга, $k \leqslant p$, лежащего над кругом $|w| \leqslant \lambda$;

$M_p^c(\omega, \lambda)$, $0 < \lambda < \infty$, – класс голоморфных с.m. p-листных в круге U функций f,

$$f(0) = 0, \quad f(\omega) = \omega \quad (0 < \omega < 1),$$

которые при $p > 1$ отображают U на риманову поверхность, не содержащую замкнутого k-листного круга, $1 \leqslant k < p$, лежащего над кругом $|w| \leqslant \lambda$.

Подкласс голоморфных функций класса $S_p^c(\tau)$ рассматривался Хейманом [2] и Дженкинсом [3] без учета критических значений. Класс $D_p^c(0)$ совпадает с множеством всех голоморфных с.m. p-листных в круге U функций, не имеющих нулей в U [2]. Классы вида $M_p^c(\omega, \lambda)$ (с нормировкой Монтеля) рассматривались ранее только для однолистных функций (см., например, [9]). Следуя замечанию в конце статьи [5], мы усилим некоторые теоремы из [5], доказав их для более широкого класса функций и установив все случаи равенства в полученных оценках. Доказательства будут опираться на более полный принцип симметризации [8]. Следующий параграф носит вспомогательный характер.

§1. Емкость конденсатора, внутренний радиус области и симметризация

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathscr{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки поверхности $\mathscr{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathscr{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре. *Конденсатором на поверхности* $\mathscr{R}$ называют упорядоченную пару множеств $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$, где $\mathscr{B}$ – открытое подмножество $\mathscr{R}$, а $\mathscr{E}$ – компакт в $\mathscr{B}$. Множество $\mathscr{B} \setminus \mathscr{E}$ назовем *полем конденсатора* $\mathscr{C}$. *Емкость* $\mathrm{cap}\mathscr{C}$ конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ определяется равенством

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{B}} |\nabla \mathscr{V}|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $\mathscr{V}$, финитным в $\mathscr{B}$, равным единице на $\mathscr{E}$ и удовлетворяющим условию Липшица локально в $\mathscr{B}$. Если существует функция $\mathscr{P}$, непрерывная в $\overline{\mathscr{B}}$, равная нулю на $\partial\mathscr{B}$, единице на $\mathscr{E}$ и гармоничная в поле $\mathscr{B}\setminus\mathscr{E}$, то ее называют *потенциальной функцией* конденсатора $\mathscr{C}$. Из принципа Дирихле следует, что в этом случае

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} = \int_{\mathscr{B}\setminus\mathscr{E}} |\nabla \mathscr{P}|^2 d\sigma.$$

Пусть $\mathscr{B}$ – открытое множество на поверхности $\mathscr{R}$ и пусть W_0 – точка множества $\mathscr{B}$, отличная от точки разветвления, $\mathrm{pr}W_0 \neq \infty$. Предположим, что множество $\mathscr{B}$ имеет функцию Грина

$$g_{\mathscr{B}}(W, W_0) = -\log|\mathrm{pr}W - \mathrm{pr}W_0| + \log r(\mathscr{B}, W_0) + o(1), \quad W \to W_0,$$

(т.е. $g_{\mathscr{B}}(W, W_0)$ – функция Грина связной компоненты $\mathscr{B}$, содержащей точку W_0). Величину $r(\mathscr{B}, W_0)$ называют *внутренним радиусом множества* $\mathscr{B}$ относительно точки W_0. Обозначим через $E(W_0, r)$ замкнутый круг на $\mathscr{R}$, содержащий точку W_0 и лежащий над $|w - \mathrm{pr}W_0| \leqslant r$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\log r(\mathscr{B}, W_0) = \lim_{r\to 0}\{\log r + 2\pi[\mathrm{cap}(\mathscr{B}, E(W_0, r)]^{-1}\}.$$

Доказательство леммы 1 практически совпадает с доказательством ее частного случая, когда $\mathscr{B} \subset \overline{\mathbb{C}}$ (см. [2, доказательство теоремы 4.8], [10, §2.4]).

Лемма 2. *Если $W_0 \in \mathscr{B}' \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{R}$ и поле конденсатора $\mathscr{C}$ в $\mathscr{R}$ отделяет множество $\mathscr{B}'$ от границы множества $\mathscr{B}$, то*

$$\log r(\mathscr{B}, W_0) \geqslant \log r(\mathscr{B}', W_0) + 2\pi[\mathrm{cap}\mathscr{C}]^{-1}. \tag{1}$$

Равенство в (1) *достигается в случае, когда $\mathscr{B}$ – область, имеющая классическую функцию Грина, $\mathscr{B}' = \{W \in \mathscr{B} : g_{\mathscr{B}}(W, W_0) > \lambda\}$ и $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \overline{\mathscr{B}'})$, где λ – произвольное положительное число.*

Доказательство более общего утверждения в плоском случае дано в [10, теорема 2.7]. Перенос этого доказательства на случай римановых поверхностей не составляет труда.

Пусть $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 1$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi p\rho$, $0 < \rho < \infty$;

(2) для всех ρ, $1 \leqslant \rho < \infty$, любая замкнутая жордановая кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p$ является риманова поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \dots$. Приведем описание этой поверхности в случае $p \geqslant 2$. Пусть D_1 есть w-плоскость с разрезом по лучу $L^- = [-\infty, -1]$, области $D_2, \dots, D_{p-1}$ суть w-плоскости с разрезами вдоль лучей L^- и $L^+ = [1, +\infty]$ и D_p – w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \dots, p$, следующим образом (подробнее см. [8]). Область D_1 склеивается "крест на крест" с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$

(в случае $p = 1$ через $\mathscr{L}$ будем обозначать вещественную неотрицательную полуось).

Рассмотрим теперь произвольную поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 1$. Введенная в [5] круговая симметризация конденсаторов приводит нас к следующему определению симметризации открытых и замкнутых множеств на поверхности $\mathscr{R}$ (см. [8]). Пусть $\mathscr{B}$ – открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над "окружностью", $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1 \leqslant \rho < \infty$ часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{B}(\rho) := \{W \in \mathscr{B} : |\mathrm{pr} W| = \rho\}$. При $0 < \rho < 1$ часть $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k = \Gamma_k(\mathscr{B}, \rho) \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1, \ldots, m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m = 0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p-кратно. Если $\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho < \infty$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{E}(\rho) := \{W \in \mathscr{E} : |\mathrm{pr} W| = \rho\}$ (в случае, когда данная мера равна нулю, соответсвующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1, \ldots, m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m \rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m – целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Симметризация конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ определяется равенством

$$\operatorname{Sym} \mathscr{C} = (\operatorname{Sym} \mathscr{B}, \operatorname{Sym} \mathscr{E}).$$

Имеет место следующий принцип симметризации для емкостей конденсаторов.

Утверждение 1 ([8, теорема 1.1]). *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap} \mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap} \operatorname{Sym} \mathscr{C}. \tag{2}$$

Если, дополнительно, поле конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство в (2) *достигается только в следующих случаях*:

(i) *поле конденсатора $\mathscr{C}$ совпадает с полем конденсатора* $\operatorname{Sym} \mathscr{C}$ *с точностью до поворота вокруг начала координат*;

(ii) *при некоторых s, t и l, $0 < s < t < \infty$, $1 < l \leqslant p$, поле конденсатора $\mathscr{C}$ l-кратно накрывает круговое кольцо $s < |w| < t$ так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества $\mathscr{B}$, либо только граничные точки $\mathscr{E}$.*

Рассмотрим соответствующий принцип симметризации для внутренних радиусов областей.

Утверждение 2. *Для любой области $\mathscr{B}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ справедливо неравенство*

$$r(\mathscr{B}, W_0) \leqslant r(\operatorname{Sym} \mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0). \tag{3}$$

Если, дополнлтельно, существует классическая функция Грина области $\mathscr{B}$ (т.е. функция Грина, обращающаяся в нуль на границе $\mathscr{B}$), то равенство в (3) *достигается в том и только в том случае, когда область $\mathscr{B}$ и точка W_0 совпадают с областью* $\operatorname{Sym} \mathscr{B}$ *и точкой* $\operatorname{Sym} W_0$ *соответственно с точностью до поворота вокруг начала координат* (*одного и того же*).

Доказательство. Можно считать, что область $\mathscr{B}$ имеет классическую функцию Грина. При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим конденсатор $\mathscr{C}(r) = (\mathscr{B}, E(W_0, r))$. Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Sym} E(W_0, r) = E(\operatorname{Sym} W_0, r).$$

Поэтому лемма 1 и утверждение 1 последовательно дают

$$\log r(\mathscr{B}, W_0) = \lim_{r\to 0}\{\log r + 2\pi[\operatorname{cap}\mathscr{C}(r)]^{-1}\}$$

$$\leqslant \lim_{r\to 0}\{\log r + 2\pi[\operatorname{capSym}\mathscr{C}(r)]^{-1}\} = \log r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0).$$

Предположим теперь, что в (3) имеет место равенство. По лемме 2 для любого $\lambda > 0$ справедливы соотношения

$$\log r(\mathscr{B}, W_0) = \log r(\mathscr{B}(\lambda), W_0) + 2\pi[\operatorname{cap}(\mathscr{B}, \overline{\mathscr{B}(\lambda)})]^{-1},$$

$$\log r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0) \geqslant \log r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}(\lambda), \operatorname{Sym} W_0) +$$
$$+ 2\pi[\operatorname{cap}(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym}\overline{\mathscr{B}(\lambda)})]^{-1},$$

где $\mathscr{B}(\lambda) = \{W \in \mathscr{B} : g_{\mathscr{B}}(W, W_0) > \lambda\}$. Из доказанного выше и предположения о случае равенства следует

$$\log r(\mathscr{B}, W_0) = \log r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0),$$

$$\log r(\mathscr{B}(\lambda), W_0) \leqslant \log r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}(\lambda), \operatorname{Sym} W_0),$$

$$\operatorname{cap}(\mathscr{B}, \overline{\mathscr{B}(\lambda)}) \geqslant \operatorname{cap}(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym}\overline{\mathscr{B}(\lambda)}).$$

Суммируя выписанное, заключаем, что

$$\operatorname{cap}(\mathscr{B}, \overline{\mathscr{B}(\lambda)}) = \operatorname{cap}(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym}\overline{\mathscr{B}(\lambda)})$$

для любого достаточно большого λ. Из утверждения 1 о случае равенства получаем необходимость условий равенства в утверждении 2. Достаточность этих условий очевидна. Утверждение 2 доказано. □

§2. Функции, имеющие нуль порядка p в начале координат

Нетрудно проверить, что функция

$$f(z; p, \tau) = \tau\left[T_p\left(\frac{(1-z)^2}{2z}(2\tau)^{1/p} - \cos\frac{\pi}{2p}\right)\right]^{-1}$$

принадлежит классу $S_p^c(\tau)$, а функция $\tau/f(z; p, \tau)$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом по листу $\mathscr{D}_p$ с проекцией $[0, T_p(-2(2\tau)^{1/p} - \cos(\pi/(2p)))]$.

Теорема 1. *Для функции f класса $S_p^c(\tau)$ при любом $z, 0 < |z| < 1$, справедливо неравенство*

$$\tau|z|\frac{1-|z|}{1+|z|}\left|\frac{f'(z)}{f^2(z)}\right| \leqslant |T_p'(T_p^{-1}(\tau/|f(z)|))|(T_p^{-1}(\tau/|f(z)|)+\cos\frac{\pi}{2p}), \quad (4)$$

где берется вещественное значение $T_p^{-1}(\tau/|f(z)|) \geqslant \cos(\pi/(2p))$. Равенство в (4) достигается только для функций вида

$$f(z) = e^{ip\theta}f(ze^{-i\theta}; p, \tau)$$

и только в точках $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \widetilde{r}$, где $\widetilde{r}$, $0 < \widetilde{r} < 1$, – корень уравнения

$$(1-z)^2(2\tau)^{\frac{1}{p}} = 4z\cos(\pi/(2p)), \quad (5)$$

а θ – произвольное вещественное число.

Доказательство. Функция $F = \tau/f$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$. Действительно, условие (1) из определения этого класса вытекает из с.т. p – листности функции f (и, следовательно, функции τ/f). Если теперь Γ – замкнутая жордановая кривая на $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho \geqslant 1$, и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, то она разбивает односвязную область $\mathscr{R}$ на две подобласти. Пусть $\mathscr{D}$ – та из этих подобластей, которая содержит точку разветвления порядка p над $w = \infty$. Тогда $\mathscr{D}$ содержит p-листный круг над $|w| \geqslant \rho$ с единственной точкой разветвления над $w = \infty$. Следовательно, Γ покрывает окружность $\gamma(\rho)$ p-кратно, т.е. выполняется второе условие из определения класса $\mathfrak{R}_p$.

Фиксируем произвольную точку $z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, f'(z) \neq 0$, и рассмотрим область $B = U\setminus[0, -e^{i\theta}]$. Обозначим через $\mathscr{B}$ образ области B при отображении F, рассматриваемый на поверхности $\mathscr{R}$. Утверждение 2 даёт

$$r(B, z)|F'(z)| = r(\mathscr{B}, W_0) \leqslant r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym}W_0), \quad (6)$$

где W_0 – образ z при отображении F, лежащий на $\mathscr{R}$, $\operatorname{prSym}W_0 = \tau/|f(z)|$. Покажем, что результат симметризации $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ принадлежит области $\mathscr{G}$ – поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом вдоль луча на листе $\mathscr{D}_p$, расположенного над вещественной положительной полуосью при p четном и над отрицательной полуосью при нечетном p. Для этого достаточно убедится, что область $\mathscr{B}$ не покрывает окружность $\gamma(\rho)$ p-кратно ни при каком ρ, $0 < \rho < \infty$. Если при некотором ρ, $0 < \rho < \infty$, область $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно, то часть $\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$

состоит из замкнутых кривых [8, лемма 4.1]. Применяя принцип аргумента к голоморфной в B функции F в областях, ограниченных кривыми $F^{-1}(\gamma(\rho))$, убеждаемся, что F имеет p нулей в B (с учетом кратности). Это противоречит ограничению на количество полюсов функции f класса $S_p^c(\tau)$. Итак, $\operatorname{Sym}\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. Из монотонности внутреннего радиуса

$$r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0) \leqslant r(\mathscr{G}, \operatorname{Sym} W_0) = \tag{7}$$

$$= r(T_p^{-1}(\mathscr{G}), T_p^{-1}(\operatorname{Sym} W_0))|T_p'(T_p^{-1}(\operatorname{Sym} W_0))|.$$

Область $T_p^{-1}(\mathscr{G})$ представляет собой плоскость с разрезом по отрицательной полуоси от $-\infty$ до $-\cos(\pi/(2p))$. Поэтому

$$r(T_p^{-1}(\mathscr{G}), T_p^{-1}(\operatorname{Sym} W_0)) = 4(T_p^{-1}(\tau/|f(z)|) + \cos\frac{\pi}{2p}). \tag{8}$$

Нетрудно посчитать также внутренний радиус

$$r(B, z) = \frac{4|z|(1-|z|)}{1+|z|}. \tag{9}$$

Суммируя соотношения (6)–(9), приходим к неравенству (4).

В случае равенства в (4) равенство имеет место также в (6) и (7). Согласно утверждению 2 из равенства в (6) вытекает, что область $\mathscr{B}$ и точка W_0 совпадают с областью $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ и точкой $\operatorname{Sym}W_0$ соответственно с точностью до некоторого поворота вокруг начала координат. Ввиду равенства в (7) $\operatorname{Sym}\mathscr{B} = \mathscr{G}$. Таким образом, $\mathscr{B}$ и W_0 совпадают с точностью до поворота с $\mathscr{G}$ и $\operatorname{Sym} W_0$. Поэтому найдется вещественное число φ такое, что функция

$$F_*(\zeta) = \tau e^{i\varphi}/f(\zeta e^{-i\theta}; p, \tau), \quad |\zeta| < 1,$$

отображает область B на $\mathscr{B}$. Отсюда следует, что суперпозиция $F^{-1} \circ F_*$ отображает B на себя так, что $0 \to 0$ и $re^{i\theta} \to r'e^{i\theta}$ при некотором r', $0 < r' < 1$. Учитывая разложение функций $f(\zeta)$ и $f(\zeta; p, \tau)$ в окрестности начала координат, приходим к выводу, что $r' = r$, $\varphi = -p\theta$ и $F^{-1} \circ F_*$ является тождественным отображением. Следовательно,

$$f(\zeta) \equiv e^{ip\theta} f(\zeta e^{-i\theta}; p, \tau) \text{ в круге } |\zeta| < 1.$$

Так как в случае равенства в (4) точка $\operatorname{Sym}W_0$ должна лежать на листе $\mathscr{D}_1$, то необходимо $0 < r < \widetilde{r}$, где $\widetilde{r}$ – корень уравнения (5). Достаточность условий равенства в (4) вытекает из равенств для указанных функций в (6) и (7). Теорема доказана. □

§3. Функции с ограничением на покрытие заданного круга

В этом параграфе приводятся теоремы искажения в классе $D_p^c(\lambda)$, $0<\lambda<\infty$. Как уже отмечалось во введении, класс $D_p^c(0)$ совпадает с совокупностью всех голоморфных с.m. p-листных в круге U функций, не имеющих нулей в U. Этот класс рассматривался Хейманом [2, §5.1].

Теорема 2. *Если функция f принадлежит классу $D_p^c(\lambda)$, $\lambda>0$, то для любого z в круге U имеет место точная оценка*

$$(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant 4\lambda(1+T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|))T_p'(T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|)),\qquad (10)$$

где берется вещественное значение $T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|)\geqslant\cos(\pi/(2p))$. Равенство в (10) *в точках $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r<1$, θ – вещественное число, выполняется только для функций вида $f=\lambda F_*\circ\Phi$, где*

$$F_*(\zeta)=e^{i\varphi}T_p\left(c\left(\frac{1+\zeta e^{-i\theta}}{1-\zeta e^{-i\theta}}\right)^2-1\right),\qquad (11)$$

а Φ – дробно-линейный автоморфизм круга U, оставляющий неподвижной точку $z=re^{i\theta}$. Здесь $c\geqslant 1+\cos(\pi/(2p))$, φ – произвольное вещественное число.

Доказательство. Функция $F=f/\lambda$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$. Действительно, первое условие из определения этого класса вытекает из с.m. p-листности f. Если теперь Γ – замкнутая жордановая кривая на $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho\geqslant 1$, и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, то кривая $F^{-1}(\Gamma)$ разбивает круг U на две области. Обозначим через G ту из них, которая односвязная. Применяя принцип аргумента к голоморфной в G функции F, заключаем, что $\mathscr{R}$ содержит некоторый k-листный круг, $1\leqslant k\leqslant p$, покрывающий круг $|w|\leqslant\rho$. Последнее притиворечит определению класса $D_p^c(\lambda)$.

Фиксируем произвольную точку $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r<1$, $f'(z)\neq 0$, и обозначим через $\mathscr{B}$ образ круга U при отображении F, рассматрваемый на поверхности $\mathscr{R}$. Утверждение 2 даёт

$$r(U,z)|F'(z)|=r(\mathscr{B},W_0)\leqslant r(\mathrm{Sym}\mathscr{B},\mathrm{Sym}W_0),\qquad (12)$$

где W_0 есть образ точки z при отображении F на $\mathscr{R}$, и $\mathrm{prSym}W_0=|f(z)/\lambda|$. Как было показано выше, область $\mathscr{B}$ не содержит замкнутой кривой, лежащей над $\gamma(\rho)$, $\rho\geqslant 1$, и не проходящей через точки разветвления $\mathscr{R}$. Отсюда следует, что результат симметризации этой области $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$ принадлежит области $\mathscr{G}$, которая получается из поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ проведением разреза на листе $\mathscr{D}_p$ вдоль луча над $[1,+\infty]$ при p четном, и вдоль луча над $[-\infty,-1]$ при нечетном p. Из монотонности внутреннего радиуса вытекает неравенство, совпадающее по форме с неравенством (7). Однако, на этот раз область $T_p^{-1}(\mathscr{G})$ представляет собой плоскость с разрезом по отрицательной полуоси от $-\infty$ до -1. Поэтому

$$r(T_p^{-1}(\mathscr{G}), T_p^{-1}(\mathrm{Sym}W_0)) = 4(T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|)+1), \tag{13}$$

и, кроме того,

$$r(U,z) = 1-|z|^2. \tag{14}$$

Суммируя соотношения (7), (12)–(14), приходим к неравенству (10). В случае равенства в (10) равенство имеет место также в (7) и (12). Отсюда следует, что область $\mathscr{B}$ и точка W_0 совпадают с областью $\mathscr{G}$ и точкой $\mathrm{Sym}W_0$ соответственно с точностью до некоторого поворота вокруг начала координат (утверждение 2). Поэтому можно подобрать вещественные числа φ и

$$c \geqslant 1+\cos(\pi/(2p))$$

таким образом, чтобы функция $F_*(\zeta)$ (см. (11)) отображала круг $|\zeta|<1$ на область $\mathscr{B}$ и $F_*(re^{i\theta}) = W_0$. В этом случае суперпозиция $F_*^{-1}\circ F$ отображает круг U на себя, оставляя точку $re^{i\theta}$ неподвижной. Следовательно, эта суперпозиция есть дробно-линейный автоморфизм U. Достаточность условий равенства в (10) вытекает из равенств в (7) и (12) для функций $f=\lambda F_*\circ\Phi$, либо проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана. □

Устремляя в неравенстве (10) $\lambda\to 0$, получаем неравенство Хеймана

$$(1-|z|^2)|f'(z)| \leqslant 4p|f(z)|,$$

справедливое для любой функции f класса $D_p^c(0)$ [2, с. 145].

Следствие 1. *Если функция $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ принадлежит классу $D_p^c(\lambda)$, $\lambda>0$, то*

$$|a_1| \leqslant 4\lambda(1+T_p^{-1}(|a_0/\lambda|))T_p'(T_p^{-1}(|a_0/\lambda|)),$$

где $T_p^{-1}(|a_0/\lambda|) \geqslant \cos(\pi/(2p))$. *Равенство достигается только для функций вида*

$$f(z) = \lambda e^{i\varphi} T_p \left(c \left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}} \right)^2 - 1 \right)$$

при любых вещественных φ, θ *и* $c \geqslant 1 + \cos(\pi/(2p))$.

Теорема 3. *Пусть функция* $f \in D_p^c(\lambda)$, $\lambda > 0$, *и пусть для данного числа* ω, $0 < |\omega| < \lambda$, *суммарная кратность нулей функции* $f - \omega$ *в круге* U *не превосходит* $p - 1$. *Тогда для любого* $z \in U$ *справедливо неравенство*

$$(1 - |z|^2)|f'(z)| \leqslant 4\lambda(\alpha - \beta)T_n'(\alpha),$$

где $\alpha = T_p^{-1}(|f(z)/\lambda|) \geqslant \cos(\pi/(2p))$, *а*

$$\beta = T_p^{-1}((-1)^p |\omega/\lambda|) \leqslant -\cos(\pi/(2p)).$$

Равенство в точках $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, *достигается только для функций вида* $f = \lambda F_* \circ \Phi$, *где*

$$F_*(\zeta) = (-1)^p \frac{\omega}{|\omega|} T_p \left(c \left(\frac{1+\zeta e^{-i\theta}}{1-\zeta e^{-i\theta}} \right)^2 + \beta \right),$$

а Φ – *дробно-линейный автоморфизм круга* U, *оставляющий неподвижной точку* $z = re^{i\theta}$, $c \geqslant \cos(\pi/(2p)) - \beta$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы и во многом его повторяет. □

Следуя работе [6], можно получить двуточечные теоремы искажения в классе $D_p^c(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda < \infty$, с указанием всех случаев равенства.

§4. Функции с нормировкой Монтеля

Для однолистных в круге U функций f, нормированных условиями

$$f(0) = 0, \quad f(\omega) = \omega \, (0 < \omega < 1),$$

хорошо известны теоремы искажения и, в частности, двусторонние оценки искажения в точках нормализации. Получение аналогичных оценок в классах p-листных функций встречает существенные трудности, а в ряде случаев такие оценки невозможны без дополнительных ограничений.

Теорема 4. *Если функция f принадлежит классу $M_p^c(\omega, \lambda)$, $\lambda > 0$, то*

$$|f'(0)| \leqslant \frac{\lambda p(1+\omega)^2}{\omega \sin(\pi/(2p))} \left(T_p^{-1}(\omega/\lambda) + \cos\frac{\pi}{2p} \right), \tag{15}$$

где берется вещественное значение $T_p^{-1}(\omega/\lambda) \geqslant \cos(\pi/(2p))$. Равенство в (15) *достигается только для функции*

$$f(z; \omega, p, \lambda) = \lambda T_p \left[\frac{z(1+\omega)^2}{\omega(1+z)^2} \left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2p} \right) - \cos\frac{\pi}{2p} \right]. \tag{16}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2 убеждаемся, что функция $F = f/\lambda$ отображает круг U на риманову поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$. Положим $B = U \setminus [\omega, 1]$ и обозначим через $\mathscr{B}$ образ области B при отображении F, рассматриваемый на поверхности $\mathscr{R}$. Согласно утверждению 2,

$$r(B, 0)|F'(0)| = r(\mathscr{B}, W_0) \leqslant r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0), \tag{17}$$

где W_0 есть образ точки $z = 0$ при отображении F на $\mathscr{R}$, $\mathrm{pr}W_0 = \mathrm{prSym}W_0 = 0$. Ввиду нормировки Монтеля область $\mathscr{B}$ не покрывает окружность $\gamma(\omega/\lambda)$ p-кратно. Учитывая односвязность этой области и отсутствие полюсов у функции f заключаем, что множество $\mathrm{Sym}\mathscr{B}$ принадлежит области $\mathscr{G}$ – поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ с разрезом на листе $\mathscr{D}_p$ вдоль луча над $[\omega/\lambda, +\infty]$ при четном p и вдоль луча над $[-\infty, -\omega/\lambda]$ при p нечетном. По монотонности внутреннего радиуса

$$r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} W_0) \leqslant r(\mathscr{G}, \operatorname{Sym} W_0) = r(B, 0)|F_*'(0)|, \tag{18}$$

где

$$F_*(z) = T_p \left[-\frac{z(1+\omega)^2}{\omega(1+z)^2} \left(T_p^{-1}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2p} \right) + \cos\frac{\pi}{2p} \right].$$

Соотношения (17), (18) приводят к неравенству (15). В случае равенства в (15) имеем равенства в (17) и (18). Поэтому область $\mathscr{B}$ совпадает с $\mathscr{G}$ с точностью до поворота вокруг начала координат. Ввиду нормировки Монтеля поворот осуществляется умножением на $(-1)^p$. Поэтому суперпозиция $\Phi = F^{-1} \circ ((-1)^p F_*)$ отображает B на себя, причем $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\omega) = \omega$. Следовательно, Φ есть тождественное отображение и мы получаем экстремальную функцию (16). Достаточность условия равенства видна из приведенного доказательства. Теорема доказана. □

При $p > 1$, $\lambda \to \infty$ правая часть в (15) неограничено растет. Это показывает, что без дополнительных ограничений на голоморфные p-листные функции с нормировкой Монтеля не существует нетривиальной верхней оценки $|f'(0)|$.

Литература

1. M. Biernacki, *Sur les fonctions en moyenne multivalentes.* — Bull. Sci. Math., **70** (1946), 51–76.
2. W. K. Hayman, *Multivalent functions*, Secoud ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
3. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.
4. H. Abe, *On meromorphic and circumferentially mean univalent functions.* — J. Math. Soc. Japan. **16**, No. 4 (1964), 342–351.
5. В. Н. Дубинин, *Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям.* – Мат. сб. **203**, No. 7 (2012), 79–94.
6. В. Н. Дубинин, *Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций.* – Мат. заметки. **94**, No. 6 (2013), 846–856.
7. В. Н. Дубинин, *Неравенства для модулей функций, p-листных в среднем по окружности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **429** (2014), 44–54.
8. В. Н. Дубинин, *Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях.* — Мат. сб. **206**, No. 1 (2015), 69–96.
9. A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings.* — Lecture Notes in Math., **1788**, Springer, 2002.
10. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Дальнаука, Владивосток, 2009.

Dubinin V. N. Distortion theorems for circumferentially mean p-valent functions.

By symmetrization approach some distortion theorems for circumferentially mean p-valent functions are proved. We consider functions with a zero of order p at the origin, functions without zeros and functions with Montel's normalization. All equality cases in the obtained estimates are established.

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова 8, Владивосток 690950
Институт прикладной математики
ДВО РАН
ул. Радио 7, Владивосток 690041
Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 1 июня 2015 г.