Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

И. Н. Демшин, В. А. Шлык

МОДУЛЬ КОНФИГУРАЦИИ И УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Известно [5], что NED-множества не влияют на конформные модули семейств кривых, как соединяющих, так и разделяющих пластины конденсатора на евклидовой плоскости R^2.

Вопрос о том, влияют ли NED-множества на конформный модуль набора семейств кривых, рассматриваемых при решении экстремальных задач геометрической теории функций, в общем случае остается открытым.

Для весового p-модуля поликонденсатора ($p > 1$, конформный модуль конденсатора является частным случаем при $p = 2$) положительный ответ дан в [4].

Ниже этот результат распространяется на модуль конфигурации, состоящей из набора семейств кривых, соединяющих в открытом множестве $G \subset R^2$ берега составных разрезов или компакты на границе множества G (см. теорему 2 настоящей работы).

§1. Необходимые определения и факты

В дальнейшем $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{H}_k$ – соответственно k-мерные меры Лебега, Хаусдорфа.

Для $A, B \subset R^2$ через $d(A, B)$ обозначим евклидово расстояние между A, B; через $d(x, A)$ обозначим евклидово расстояние от точки $x \in R^2$ до множества A. Запись $\bar{A}$, ∂A означает соответственно замыкание и границу множества A в евклидовой топологии. $B(x, r) = \{y \in R^2 : |y - x| < r\}$ – открытый круг с центром в точке $x \in R^2$ радиуса $r > 0$.

Для произвольного измеримого по Лебегу множества $F \subset R^2$ обозначим через $|F|$ его 2-мерную меру Лебега, A_p – класс локально интегрируемых функций $R^2 \to (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \left(\frac{1}{|Q|} w^{1-q}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

Ключевые слова: поликонденсатор, емкость поликонденсатора, устранимые множества.

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^2$, $p, q \in (1; +\infty)$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $L^{p,w}(D)$, где D – открытое множество в R^2, класс функций $f : R^2 \to [-\infty; +\infty]$, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_D |f|^p w \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_+^{p,w}(Q)$ обозначим класс борелевских функций $f : Q \to [0; +\infty]$, $f \in L_+^{p,w}(D)$.

Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(D)$ класс функций $u : D \to (-\infty; +\infty)$, локально интегрируемых в D, имеющих в D обобщенные частные производные и таких, что

$$\|u\| = \left(\int\limits_D |\nabla u|^p w \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Кривой в R^2 назовем образ числового отрезка или интервала при непрерывном отображении его в R^2. Будем говорить, что кривая $\gamma : (a, b) \to R^2$ соединяет множества A и B, если $d(\gamma(x), A) \to 0$ при $x \to a$ и $d(\gamma(x), B) \to 0$ при $x \to b$.

Пусть $\widetilde{\tau}$ – континуум, который соединяет две различные граничные компоненты β', β'' ограниченной области $\mathfrak{G} \subset R^2$ и не разбивает области $\mathfrak{G}$ (другими словами, $\mathfrak{G} \setminus \widetilde{\tau}$ – область). Кроме того, пусть $\overline{\widetilde{\tau} \cap \mathfrak{G}} \setminus \mathfrak{G} \subset \beta \cup \beta''$, множество $\widetilde{\tau} \cap \mathfrak{G}$ состоит из не более чем счетного числа попарно непересекающихся открытых дуг $\tau(i)$, $i \geqslant 1$, $\mathcal{L}_2(\widetilde{\tau} \cap \mathfrak{G}) = 0$. Тогда $\tau = \widetilde{\tau} \cap \mathfrak{G}$ назовем составным разрезом в $\mathfrak{G}$, соединяющим компоненты β' и β''.

Обозначим через Ω односвязную область, ограниченную континуумом $\beta' \cup \beta'' \cup \widetilde{\tau}$ и, вообще говоря, расположенном в $\overline{R^2} = R^2 \cup \{\infty\}$. По определению, каждая граничная точка $x \in \tau(i)$, $i \geqslant 1$, для области Ω будет задавать две различные граничные достижимые точки x_1, x_2 (см. [2]).

Вводя конформное однолистное отображение g области Ω на единичный круг с центром в начале координат, получим, что дуге $\tau(i)$ будет соответствовать при этом отображении две непересекающиеся дуги $\lambda^+(i)$, $\lambda^-(i)$ на окружности $\partial g(\Omega)$.

Также заметим, что для разных значений i_1 и i_2 индекса i дуги $\lambda^+(i_1)$, $\lambda^-(i_1)$, $\lambda^+(i_2)$, $\lambda^-(i_2)$ попарно не пересекаются. Не ограничивая общности, будем считать, что $g(x_1) \in \lambda^+(i)$, $g(x_2) \in \lambda^-(i)$, и положим $x^+ = x_1$, $x^- = x_2$. Пусть $\tau^+(i) = g^{-1}(\lambda^+(i)$, $\tau^-(i) = g^{-1}(\lambda^-(i)$. Множества $\tau^+ = \bigcup\limits_{i\geqslant 1} \tau^+(i)$, $\tau^- = \bigcup\limits_{i\geqslant 1} \tau^-(i)$ назовем соответственно верхним и нижним берегами разреза τ. Для компакта $K \subset \tau$ аналогично определим два берега $K^+ = \{x^+ : x \in K\}$ и $K^- = \{x^- : x \in K\}$. Под относительной окрестностью берега K^+ (соответственно, K^-) будем понимать прообраз δ-окрестности, $\delta > 0$, компакта $g(K^+)$ (соответственно, $g(K^-)$) при отображении g замыкания области Ω на замкнутый единичный круг. Здесь отображение g на $\partial\Omega$ вводится посредством простых концов по Каратеодори (см. [2]).

Очевидно, что при малых $\delta > 0$ относительные окрестности берегов K^+, K^- не будут иметь общих точек внутри Ω и пересекаются по точкам из τ.

Пусть τ_1, τ_2,...,τ_l – набор составных разрезов области $\mathfrak{G}$, где τ_i соединяет в $\mathfrak{G}$ разные граничные компоненты β_i' и β_i'', $i = 1, 2, \ldots, l$.

Положим $G = \mathfrak{G} \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{l} \tau_i\right)$. Ясно, что G – открытое ограниченное множество и $\tau_i \subset \partial G$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Конденсатором первого типа в G назовем набор (τ_i^+, τ_i^-, G), где $i = 1, 2, \ldots, l$. Конденсатором второго типа в G назовем набор (C', C'', G), где C', C'' – непустые непересекающиеся компакты из ∂G.

Всякий конечный упорядоченный набор (см. [1]) семейств кривых $\Gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ в G вместе с упорядоченным набором положительных чисел $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ назовем конфигурацией в G и обозначим символом $\alpha\Gamma = \{\alpha_1\Gamma_1, \ldots, \alpha_m\Gamma_m\}$.

Функцию $\rho(x) \in L_+^{p,w}(G)$ назовем допустимой для конфигурации $\alpha\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, d\mathcal{H}_1 \geqslant \alpha_i$$

для всех локально спрямляемых кривых $\gamma \in \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Класс всех допустимых функций обозначим через $\operatorname{adm} \alpha\Gamma$.

Модулем $m_{p,w}(\alpha\Gamma)$ конфигурации $\alpha\Gamma$ назовем величину

$$m_{p,w}(\alpha\Gamma) = \inf \int\limits_{G} \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $\rho \in \operatorname{adm} \alpha\Gamma$. Если $\operatorname{adm} \alpha\Gamma = \varnothing$, то положим $m_{p,w}(\alpha\Gamma) = \infty$.

Поликонденсатором αC на G назовем пару, состоящую из конечного набора $C = \{C_1, \dots, C_l, C_{l+1}, \dots C_m\}$ конденсаторов и сопоставленного ему набора положительных чисел $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Здесь для $1 \leqslant i \leqslant l$ $C_i = \{\tau^+_, \tau_i^-, G\}$ – конденсатор первого типа и τ_i^+, τ_i^- – берега составного разреза τ_i в $\mathfrak{G}$, соединяющего граничные компоненты β_i', β_i'' области $\mathfrak{G}$; для $l+1 \leqslant i \leqslant m$ $C_i = \{C_i', C_i'', G\}$ – конденсатор второго типа и C_i', C_i'' – непересекающиеся компакты из ∂G.

Пусть задан набор компактов $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_l\}$, где $K_i \subset \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда отображение $u = (u_1, \dots, u_m) : G \to R^m$ назовем допустимым для поликонденсатора αC с набором $\mathcal{K}$, если выполнены условия:

(1) $u_i \in L^1_{p,w}(G)$, $u_i = 0$ в относительной окрестности K_i^+ и $u_i = \alpha_i$ в относительной окрестности K_i^-, где K_i^+, K_i^- – берега компакта $K_i \subset \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, l$;

(2) $u_i \in L^1_{p,w}(G)$, $u_i = 0$ в окрестности C_i' и $u_i = \alpha_i$ в окрестности C_i'', $i = l+1, \dots, m$.

Величину

$$C_{p,w}(\alpha C) = \sup_{\mathcal{K}} \left(\inf \int_G |\nabla u|^p w \, dx \right),$$

где инфимум берется по всем допустимым для поликонденсатора αC с набором $\mathcal{K}$ отображениям $u = (u_1, \dots, u_m)$ и $|\nabla u| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\nabla u_i|$, назовем емкостью поликонденсатора αC.

В определении $|\nabla u|$ величины $|\nabla u_i|$ там, где они не определены, полагаем равными нулю.

Каждому поликонденсатору αC, где $C = \{C_1, \dots, C_m\}$, естественным образом сопоставим конфигурацию $\alpha\Gamma$, где $\Gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$ и Γ_i – семейство всех кривых в G, соединяющих пластины τ_i^+, τ_i^- для $1 \leqslant i \leqslant l$; Γ_i – семейство всех кривых в G, соединяющих пластины C_i', C_i'' для $l+1 \leqslant i \leqslant m$.

Символом $m_{p,w}(\alpha\Gamma)$ в дальнейшем обозначим модуль указанной конфигурации, который также будем называть модулем поликонденсатора αC.

Компактное множество E назовем $NC_{p,w}$-множеством, если для любого координатного прямоугольника Π, $\overline{\Pi} \subset G$, выполняется равенство (см. [3])

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi),$$

где σ_{0i}, σ_{1i} – противоположные стороны прямоугольника Π, параллельные координатным осям $x_i = 0$, $i = 1, 2$.

§2. Соотношение между емкостью поликонденсатора и модулем конфигурации, $NC_{p,w}$-множества

Имеет место теорема.

Теорема 1. $C_{p,w}(\alpha C) = m_{p,w}(\alpha\Gamma)$.

Доказательство. Выберем в определении допустимого отображения для поликонденсатора αC набор $\mathcal{K}_j = \{K_{1j}, K_{2j}, \ldots, K_{lj}\}$ таким, чтобы $K_{ij} \uparrow \tau_i$ при $j \to \infty$ для всех $i = 1, 2, \ldots, l$.

Пусть αC^j – поликонденсатор в G такой, что $C^j = \{C_1^j, \ldots C_m^j\}$, где $C_i^j = \{K_{ij}^+, K_{ij}^-, G\}$ для $i = 1, \ldots, l$; $C_i^j = \{C_i', C_j'', G\}$ для $i = l+1, \ldots, m$. Пусть $\alpha\Gamma^j$ – соответствующая ему конфигурация. Тогда набор C^j можно рассматривать как поликонденсатор из [4], в котором в роли набора α взят набор $\{1, 1, \ldots, 1\}$. Модифицируя надлежащим образом рассуждения из [4] с заменой окрестностей компактов K_{ij}^+, K_{ij}^- на относительные окрестности и набора $\{1, 1, \ldots, 1\}$ на набор α, получим, что $C_{p,w}(\alpha C^j) = m_{p,w}(\alpha\Gamma^j)$. Отсюда, в силу монотонности модуля и емкости по j, сразу следует, что $C_{p,w}(\alpha C) = m_{p,w}(\alpha\Gamma)$. $\square$

Пусть E – $NC_{p,w}$-множество в G. Известно (см [3]), что E не разбивает множества G, следовательно, E – нульмерный компакт. Отсюда следует, что если в определении поликонденсатора αC множество G заменить на множество $G \setminus E$, то пластины конденсаторов из прежнего набора C будут иметь тот же смысл и в новом наборе $\widetilde{C}$.

Пусть новому поликонденсатору $\alpha\widetilde{C}$ соответствует конфигурация $\alpha\widetilde{\Gamma}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если E – $NC_{p,w}$-множество в G, то $m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) = m_{p,w}(\alpha\Gamma)$. Другими словами, $NC_{p,w}$-множество не влияет на модуль поликонденсатора.*

Доказательство. Если $m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) = \infty$, то в силу монотонности модуля $m_{p,w}(\alpha\Gamma) \geqslant m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma})$, значит, $m_{p,w}(\alpha\Gamma) = \infty$. Поэтому далее считаем, что $m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) < \infty$.

Пусть для поликонденсатора αC набор $\mathcal{K}_j$ и соответствующий поликонденсатор αC^j выбраны также как в доказательстве теоремы 1, $j = 1, 2, \ldots$. Аналогично, по набору $\mathcal{K}_j$ для поликонденсатора $\alpha\widetilde{C}$ зададим поликонденсатор $\alpha\widetilde{C}^j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем число j и допустимое отображение $\widetilde{u}$ для поликонденсатора $\alpha\widetilde{C}$ с набором K_j такими, чтобы

$$\int\limits_{G\setminus E} |\nabla\widetilde{u}|^p w\, dx \leqslant m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) + \varepsilon.$$

Поскольку $\mathcal{L}_2(E) = 0$ и отображение $\widetilde{u}$ продолжается до отображения u, допустимого для αC_j с набором $\mathcal{K}_j$, то

$$C_{p,w}(\alpha C) \leqslant \int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx = \int\limits_{G\setminus E} |\nabla\widetilde{u}|^p w\, dx \leqslant m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) + \varepsilon.$$

Отсюда при $j \to \infty$ следует, что

$$m_{p,w}(\alpha\Gamma) = C_{p,w}(\alpha C) \leqslant m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}) + \varepsilon.$$

Это неравенство и произвол в выборе $\varepsilon > 0$ дает неравенство

$$m_{p,w}(\alpha\Gamma) \leqslant m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma}).$$

Значит, $m_{p,w}(\alpha\Gamma) = m_{p,w}(\alpha\widetilde{\Gamma})$. □

Литература

1. В. В. Асеев, Б. Ю. Султанов, *Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных функций класса* W_n^1. Препринт СО АН СССР, Ин-т мат., 31, Новосибирск, 1989.
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., 1966.
3. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. ж., **51**, No. 6 (2010), 1028–1042.
4. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Некоторые свойства емкости и модуля поликонденсатора и устранимые множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 84–94.
5. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Mathematica **83** (1950), 101–129.

Demshin I. N., Shlyk V. A. A configuration module and removable sets.
In this paper, we introduce a new class of polycondensers and show that the polycondenser capacity is equal to the module of polycondenser. Also it is proved that the sets which are removable for the condenser capacity are removable for the polycondenser module.

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8,
г. Владивосток, Россия
E-mail: demshin.in@dvfu.ru

Поступило 23 июня 2015 г.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии,
ул. Стрелковая, 16в;
Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова, 8,
г. Владивосток, Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru