Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 440, 2015 г.

О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая

НЕПЕРИОДИЧЕСКИЙ СПЛАЙНОВЫЙ АНАЛОГ ОПЕРАТОРОВ АХИЕЗЕРА–КРЕЙНА–ФАВАРА

§1. Введение

1.1. Обозначения. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно, $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$.

Пространства функций обозначаются: C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой; если $1 \leqslant p < +\infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ – пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью, а L_p – пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых на периоде с p-й степенью функций f, с нормами $\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-\pi, \pi]$ соответственно; $L_\infty(\mathbb{R})$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

L_∞ – подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$; $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – множество функций, принадлежащих $L_p(E)$ для каждого отрезка E. Если $r \in \mathbb{N}$, то $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ – множество функций, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$ и являющихся r-кратными интегралами от функций из $L_p(\mathbb{R})$; $W_{p,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$ – множество r-кратных интегралов от функций из $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Аналогично определяются классы $W_p^{(r)}$ периодических функций. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Далее, $\mathcal{T}_{2n-1}$ – пространство тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, $\mathbf{E}_\sigma$ и $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ – пространства целых функций степени не выше σ и меньше σ соответственно. При $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$ через $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ обозначается пространство сплайнов порядка m минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$. При $m \in \mathbb{N}$ это множество $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, сужение которых на

Ключевые слова: наилучшее приближение, непериодические сплайны, оператор Ахиезера–Крейна–Фавара.

каждый интервал $\left(\frac{j\pi}{\sigma}, \frac{(j+1)\pi}{\sigma}\right)$ есть многочлен степени не выше m; $\mathbf{S}_{\sigma,0}$ есть множество функций, постоянных на каждом таком интервале (значения в точках разрыва несущественны); $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ при $n \in \mathbb{N}$ есть пространство 2π-периодических сплайнов из $\mathbf{S}_{n,m}$. Символами $E_n(f)_p$ и $E_{n,m}(f)_p$ обозначаются наилучшие приближения функции f множествами $\mathcal{T}_{2n-1}$ и $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ в пространстве L_p, символами $A_\sigma(f)_p$, $A_{\sigma-0}(f)_p$ и $A_{\sigma,m}(f)_p$ – наилучшие приближения f множествами $\mathbf{E}_\sigma$, $\mathbf{E}_{\sigma-0}$, и $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$; например,

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{g\in\mathbf{E}_\sigma} \|f-g\|_p.$$

Коэффициенты Фурье 2ℓ-периодической функции f, суммируемой на периоде, определяются равенством

$$c_k(f) = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{-i\frac{\pi}{\ell}kt}\,dt,$$

а преобразование Фурье заданной на $\mathbb{R}$ функции f – равенством

$$c(f,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-izt}\,dt,$$

если интеграл существует хотя бы в смысле главного значения. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Сумма по $\mathbb{Z}$ понимается в смысле главного значения:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}.$$

Ядро Бернулли порядка $r \in \mathbb{N}$, периодический и непериодический B-сплайн порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ определяются равенствами

$$d_r(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikt}}{(ik)^r},$$

$$\mathcal{B}_{n,m}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_{n,m}(k)e^{ikt}, \qquad B_{\sigma,m}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma_{\sigma,m}(z)e^{itz}\,dz,$$

где

$$\gamma_{\sigma,m}(z) = c(B_{\sigma,m}, z) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}z}-1}{i\frac{\pi}{\sigma}z}\right)^{m+1}.$$

Нормировка B-сплайнов выбрана так, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{B}_{n,m} = \int\limits_{\mathbb{R}} B_{\sigma,m} = 1.$$

Если параметр σ фиксирован, его обозначение в индексах различных величин обычно будем опускать и писать, например, B_m и γ_m. Полагаем $x_j = \frac{j\pi}{\sigma}$.

1.2. История вопроса и постановки задач. Всюду в этом пункте $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$.

В 1937 году Ж. Фавар [1] и Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2] построили линейный метод приближения $\mathcal{X}_{n,r}$ со значениями в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, такой что для любой $f \in W_\infty^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_\infty, \tag{1.1}$$

и доказали, что константу

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

уменьшить нельзя, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение, то есть

$$\sup_{f \in W_\infty^{(r)}} \frac{E_n(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{1.2}$$

Операторы $\mathcal{X}_{n,r}$ называют операторами или суммами Ахиезера–Крейна–Фавара, а константы $\mathcal{K}_r$ – константами Фавара. Неравенства, в которых приближение функции оценивается через норму (полунорму) производной, производной сопряженной функции и т.п., будем называть неравенствами типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Впоследствии аналоги соотношений (1.1) и (1.2) были установлены для многих классов сверток периодических и непериодических функций. Мы перечислим лишь те, в которых оценка ведется через нормы производных.

С. М. Никольский [3] распространил (1.1) и (1.2) на случай нормы в пространстве L_1.

М. Г. Крейн [4] получил аналоги соотношения (1.2) для приближения целыми функциями конечной степени классов функций из $W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})$, определяемых дифференциальными операторами. В частности, он установил, что

$$\sup_{f\in W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \sup_{f\in W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma-0}(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \qquad (1.3)$$

Б. Надь [5] указал достаточные условия на ядро сверточного оператора, выраженные в терминах преобразования Фурье ядра свертки, при которых для приближения свертки справедлива точная оценка типа (1.3) и вывел из этих условий само соотношение (1.3). Кроме того, он построил линейный оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$, для отклонения которого справедлива такая же оценка

$$\|f-\mathcal{X}_{\sigma,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_\infty. \qquad (1.4)$$

При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (1.1) и (1.4) совпадают на 2π-периодических функциях и потому обозначаются одинаково. Эти результаты вошли в книгу [6], где оценки сверху распространены на пространства $L_p(\mathbb{R})$ и L_p. Из соотношений двойственности следует, что аналог (1.3) верен и в пространстве $L_1(\mathbb{R})$.

Для приближения периодических функций сплайнами минимального дефекта известны следующие точные соотношения типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Пусть $m \geqslant r-1$, $p\in\{1,+\infty\}$. Тогда

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}} \frac{E_{n,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \qquad (1.5)$$

Полагаем

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & m \text{ четно}. \end{cases}$$

Пусть $\gamma \geqslant 0$, функция f задана на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(|x|^\gamma)$ при $x\to\infty$. Обозначим через $\xi_{\sigma,m}(f)$ сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, интерполирующий f в точках $\frac{k\pi}{\sigma}+\varepsilon_m$ $(k\in\mathbb{Z})$ и такой, что $\xi_{\sigma,m}(f,x) = O(|x|^\gamma)$ при $x\to\infty$. Такой сплайн существует и единствен [7, лекция 4, теорема 1]. Кроме того, если $\sigma = n\in\mathbb{N}$, то 2π-периодичность f влечет 2π-периодичность $\xi_{n,m}(f)$.

При $m = r-1$ константа в (1.5) реализуется линейным проектором, а именно, с помощью интерполяционного сплайна:

$$\sup_{f\in W_p^{(r)}} \frac{\|f-\xi_{n,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \qquad (1.6)$$

Соотношения (1.5) при $m = r - 1$, $p = +\infty$ и (1.6) при $p = +\infty$ установил В. М. Тихомиров [8]; соотношения (1.5) в остальных случаях – А. А. Лигун [9]; соотношение (1.6) при $p = 1$ – Н. П. Корнейчук [10]. Интерполяционный оператор $\xi_{n,r-1}$ не является единственным линейным методом, реализующим константу при $p = +\infty$; см. [11, теоремы 5.1.17 и 5.2.11] и [12, предложение 5.2.9].

Большинство перечисленных результатов о приближении периодических функций тригонометрическими многочленами можно найти в [6, 12, 13], сплайнами – в [11, 12], о приближении непериодических функций целыми функциями конечной степени – в [6, 13].

А. А. Лигун [9] доказал существование линейного оператора из C в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, реализующего константу в соотношении (1.5) при $m \geqslant r$, $p = +\infty$ (явный вид этого оператора в [9] отсутствует). О. Л. Виноградов [14] построил при $m \geqslant r$ линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (1.5), то есть такие что для всех $p \in [1, +\infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p. \tag{1.7}$$

Перейдем к обзору результатов о приближении сплайнами функций из $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$. Сунь Юншен и Ли Чунь [15] и независимо Г. Г. Магарил-Ильяев [16, 17] установили аналог соотношения (1.5) для приближений функций в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ непериодическими сплайнами:

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{1.8}$$

Здесь, как и в (1.5), $m \geqslant r - 1$, $p \in \{1, +\infty\}$.

Как и в периодическом случае, при $m = r - 1$ соотношение (1.8) реализуется интерполяционными сплайнами:

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\|f - \xi_{\sigma,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{1.9}$$

Этот факт сначала был установлен И. Шенбергом для четного r и $p = +\infty$ в [18]. Ключевое утверждение (теорема 3), касающееся знака ядра в интегральном представлении погрешности интерполирования, сформулировано в [18] без доказательства. Доказательство появилось в работе К. де Бора и И. Шенберга [19]. Там же установлено (1.9) для нечетного r и $p = +\infty$. Хотя соотношение (1.9) сформулировано в [18] и [19] лишь для $p = +\infty$, в этих работах получена точная поточечная оценка погрешности интерполирования, из которой сразу следует точная оценка нормы сверху для всех p. Другое доказательство (1.9) вместе с обобщением на все $p \in (1, +\infty)$ (разумеется, с меньшей правой частью) и еще несколькими ссылками содержится в [17].

Отметим еще, что обсуждаемые неравенства точны в более сильном смысле теории поперечников. Работа [17] как раз посвящена этим вопросам.

В настоящей работе при $m \geqslant r$ строятся линейные операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ со значениями в $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, такие что для всех $p \in [1, +\infty]$ и $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_p. \tag{1.10}$$

(При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (1.7) и (1.10) совпадают на 2π-периодических функциях, и потому их можно обозначить одинаково.) Тем самым устанавливается возможность реализации верхних граней в (1.8) линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной.

§2. Вспомогательные результаты

2.1. Предварительные сведения. Напомним [6, п. 87] известные факты об операторе $\mathcal{X}_{\sigma,r}$. Это оператор свертки с суммируемым ядром:

$$\mathcal{X}_{\sigma,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)Q_r(x-t)\,dt, \tag{2.1}$$

где

$$Q_r(\tau) = Q_{\sigma,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (iz)^r \lambda_r(z) e^{i\tau z}\,dz,$$

$$\lambda_r(z) = \lambda_{\sigma,r}(z) = \begin{cases} \sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \dfrac{(-1)^{q(r+1)}}{i^r(2q\sigma + z)^r}, & |z| \leqslant \sigma, \\ 0, & |z| > \sigma. \end{cases}$$

Отклонение оператора $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ записывается как

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)\Delta_r(x-t)\,dt, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta_r(\tau) = \Delta_{\sigma,r}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(iz)^r} - \lambda_r(z) \right) e^{i\tau z}\, dz.$$

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon_r = \begin{cases} 0, & r \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & r \text{ четно}. \end{cases}$$

Если не оговорено противное, обозначение ε всегда будет связано с индексом r. Обозначим еще

$$\eta_r(z) = \frac{1}{(iz)^r}, \qquad \gamma_m(z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{\sigma}z} - 1}{i\frac{\pi}{\sigma}z} \right)^{m+1},$$

$$h_{r,m}(z,t) = h_{\sigma,r,m}(z,t) = \frac{1}{(iz)^r} - \gamma_m(z) \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(2\sigma s + z) e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(2\sigma q + z) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}},$$

$$H_{r,m}(z,t) = H_{\sigma,r,m}(z,t) = \gamma_m(z) \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(2\sigma s + z) e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(2\sigma q + z) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}},$$

$$\varkappa_r(z) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(2\sigma s + z) e^{i2s\sigma\varepsilon},$$

$$\mu_{r,m}(z,t) = e^{izt} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(2\sigma q + z) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}$$

(зависимость μ от r состоит в зависимости ε от r). С точностью до умножения на экспоненту функции $\mu_{r,m}$ совпадают с экспоненциальными сплайнами (см. [7, 20]).

Перечислим несколько свойств введенных функций. Те утверждения, которые приводятся без доказательства, можно найти в [20].

F1. *Функция $\mu_{r,m}$ не имеет вещественных нулей, отличных от (z^*, t^*), где*

$$z^* = (2k+1)\sigma, \quad t^* = \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_r + \frac{j\pi}{\sigma}, \qquad k, j \in \mathbb{Z}.$$

Нули z^* функции $\mu_{r,m}(\cdot, t^*)$ простые.

F2. *Функция $\varkappa_r$ имеет вещественные нули в точках z^* и только в них, и эти нули простые.*

F3. *Если $m \geqslant r$, то при каждом $t \in \mathbb{R}$ функция $h_{r,m}(\cdot, t)$ аналитична в некоторой окрестности $\mathbb{R}$.*

Для доказательства надо учесть свойства F1 и F2 и еще заметить, что особенность в точке $z = 0$ устранимая.

F4. $|\mu_{r,m}(z,t)| \geqslant |\mu_{r,m}(z,t^*)|, \quad |\mu_{r,m}(z,t)| \geqslant |\mu_{r,m}(z^*,t)|$.

F5. *Функция $H_{r,m}$ ограничена на $\mathbb{R}^2$.*

Это утверждение вытекает из F4, F1 и F2.

F6. *Существует такое $a > 0$, что в некоторой окрестности точки (z^*, t^*) верна оценка*

$$|\mu_{r,m}(z,t)|^2 \geqslant a\big((z-z^*)^2 + (t-t^*)^2\big).$$

Это вытекает из теоремы об обратном отображении и линейной независимости производных $(\mu_{r,m})'_z(z^*, t^*)$ и $(\mu_{r,m})'_t(z^*, t^*)$ над $\mathbb{R}$. Последнее легко проверить вычислением.

2.2. Три леммы об интегралах.

Лемма 1. *Пусть $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, функция Q задана на $\mathbb{R}^2$, $Q(\cdot, t) \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$, $Q(x, \cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ при всех $x \in \mathbb{R}$,*

$$S(x) = \int_{\mathbb{R}} Q(x,t)\,dt.$$

Тогда $S \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$.

Доказательство. При $m = 0$ утверждение очевидно. Пусть $m \geqslant 1$. На каждом отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ функция $Q(\cdot, t)$ есть многочлен степени не выше m. Выберем узлы интерполяции $u_0, \ldots, u_m$ и запишем

$$Q(x,t) = \sum_{k=0}^{m} Q(u_k,t)\ell_k(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \tag{2.3}$$

где ℓ_k – фундаментальные многочлены интерполяции. Ввиду суммируемости $Q(u_k, \cdot)$ имеем

$$S(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} Q(u_k,t)\,dt \right) \ell_k(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}],$$

откуда S есть многочлен степени не выше m на $[x_j, x_{j+1}]$. Записывая равенства (2.3) на соседних отрезках, почленно дифференцируя по x и интегрируя по t, убеждаемся в совпадении односторонних производных S до порядка $m-1$ включительно в узлах x_j. □

Лемма 2. *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $k \in [0:r]$. Тогда интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\lambda_r(z) - H_{r,m}(z,t))(iz)^k e^{i(x-t)z}\, dz \tag{2.4}$$

равномерно сходится относительно совокупности переменных x и t.

Здесь и далее, говоря о равномерной сходимости или ограниченности относительно переменной x, будем понимать под этим равномерную сходимость или ограниченность в некоторой окрестности каждой точки x', за исключением случая $k = r = m$, $x' = x_j$.

Доказательство. Так как функция λ_r финитна, достаточно рассмотреть вычитаемое. При $k < r$ или $k = r < m$ равномерная сходимость очевидна, поскольку подынтегральная функция есть $= O(z^{-2})$ равномерно относительно x и t. При $k = r = m$ применим признак Дирихле. Действительно, функция $z \mapsto \frac{1}{z}$ монотонно стремится к нулю. Убедимся в равномерной ограниченности частичных интегралов $\int\limits_a^b g(z,t)e^{ixz}\, dz$, где

$$g(z,t) = \left(e^{i\frac{\pi}{\sigma}z} - 1\right)^{m+1} \frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}} \eta_r(2\sigma s + z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{e^{itz}\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m(2\sigma q + z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

Ясно, что функция $g(\cdot,t)$ имеет период 2σ. Раскладывая $g(\cdot,t)$ в ряд Фурье, интегрируя его почленно и применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и равенство Парсеваля, получаем

$$
\begin{aligned}
\left|\int\limits_a^b g(z,t)e^{ixz}\,dz\right| &= \left|\int\limits_a^b \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu(g(\cdot,t))e^{i(\frac{\nu\pi}{\sigma}+x)z}\,dz\right| \\
&= \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu(g(\cdot,t))\int\limits_a^b e^{i(\frac{\nu\pi}{\sigma}+x)z}\,dz\right| \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{2|c_\nu(g(\cdot,t))|}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|} \\
&\leqslant 2\Biggl(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu(g(\cdot,t))|^2\Biggr)^{1/2}\Biggl(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|^2}\Biggr)^{1/2} \\
&= 2\left(\frac{1}{2\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |g(z,t)|^2\,dz\right)^{1/2}\Biggl(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\frac{\nu\pi}{\sigma}+x|^2}\Biggr)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Остается учесть ограниченность функции g (свойство F5). $\square$

Лемма 3. *Пусть $\sigma > 0$, функция ψ измерима на $\mathbb{R}^2$, при почти всех z и t верно равенство $\psi\left(z, t + \frac{\pi}{\sigma}\right) = \psi(z,t)$,*

$$
F(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(z,t)e^{-itz}\,dz,
$$

$$
\Psi(z,t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(z+2l\sigma,t)e^{-i(z+2l\sigma)t},
$$

причем интеграл и ряд сходятся в смысле главного значения, а частичные суммы ряда существенно ограничены по z при почти всех t. Пусть еще $\Psi(\cdot,t) \in W_{2,\mathrm{loc}}^{(1)}(\mathbb{R})$ при почти всех t и

$$
\int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\,dz\right)^{1/2} dt < +\infty. \tag{2.5}
$$

Тогда $F \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(t)|\,dt \leqslant \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t)\,dz \right| dt + \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\frac{\sigma}{6} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\,dz \right)^{1/2} dt$$

и при всех $N \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}, \frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}\right]} |F(t)|\,dt \leqslant \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left(\frac{\sigma}{N\pi^2} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\Psi'_z(z,t)|^2\,dz \right)^{1/2} dt. \tag{2.6}$$

Доказательство. Интегрируя ряд почленно по теореме Лебега, получаем

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{(2l-1)\sigma}^{(2l+1)\sigma} \psi(z,t) e^{-itz}\,dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t)\,dz.$$

Пользуясь периодичностью Ψ по второму аргументу, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(t)|\,dt = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \left| F\left(t + \frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| dt$$
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \Psi(z,t) e^{-i\frac{\nu\pi}{\sigma}z}\,dz \right| dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\sigma}{\pi} |c_\nu(\Psi(\cdot,t))|\,dt.$$

Аналогично

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}, \frac{(2N+1)\pi}{2\sigma}\right]} |F(t)|\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2\sigma}}^{\frac{\pi}{2\sigma}} \sum_{|\nu|>N} \frac{\sigma}{\pi} |c_\nu(\Psi(\cdot,t))|\,dt.$$

Напомним, что функция $\Psi(\cdot,t)$ имеет период 2σ.

Для оценки суммы модулей коэффициентов Фурье используем следующий хорошо известный прием. Пусть функция f имеет период 2π, $f \in W_2^{(1)}$, $c_\nu = c_\nu(f)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и равенство Парсеваля, получаем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu| = |c_0| + \sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu}\, \nu|c_\nu| \leqslant |c_0| + \left(\sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{\nu\neq 0} |\nu c_\nu|^2\right)^{1/2} = |c_0| + \left(\frac{\pi}{6}\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{|\nu|>N} |c_\nu| \leqslant \left(\sum_{|\nu|>N} \frac{1}{\nu^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{|\nu|>N} |\nu c_\nu|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{N\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2\right)^{1/2}.$$

Мы воспользовались еще соотношениями

$$\sum_{\nu\neq 0} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \sum_{|\nu|>N} \frac{1}{\nu^2} < \frac{2}{N}.$$

Если g имеет период 2σ, $f(y) = g(\frac{\sigma}{\pi}y)$, то f имеет период 2π, $c_\nu(g) = c_\nu(f)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |c_\nu(g)| \leqslant |c_0(g)| + \left(\frac{\sigma}{6}\int_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{|\nu|>N} |c_\nu(g)| \leqslant \left(\frac{\sigma}{N\pi^2}\int_{-\sigma}^{\sigma} |g'|^2\right)^{1/2}.$$

Применяя эти оценки к функции $g = \Psi(\cdot, t)$, получаем требуемое. $\square$

§3. Основные результаты

3.1. Построение ядра оператора и его свойства. При $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $x, t \in \mathbb{R}$ положим

$$F_{r,m}(x,t) = F_{\sigma,r,m}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} h_{\sigma,r,m}(z,t)e^{i(x-t)z}\,dz.$$

Лемма 4. *При любом $x \in \mathbb{R}$ функция $F_{\sigma,r,m}(x,\cdot)$ имеет нули в точках $x - \varepsilon - \frac{k\pi}{\sigma}$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Положим $h = h_{\sigma,r,m}$. Разобьём интеграл по оси на интегралы по промежуткам длины 2σ, сделаем замену переменных $z = y + 2l\sigma$ и поменяем порядок операций:

$$\begin{aligned}2\pi F_{\sigma,r,m}\left(x, x-\varepsilon-\frac{k\pi}{\sigma}\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\left(\varepsilon+\frac{k\pi}{\sigma}\right)z} h\left(z, x-\varepsilon-\frac{k\pi}{\sigma}\right)dz \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{(2l-1)\sigma}^{(2l+1)\sigma} e^{i\left(\varepsilon+\frac{k\pi}{\sigma}\right)z} h\left(z, x-\varepsilon-\frac{k\pi}{\sigma}\right)dz \\ &= \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{i\left(\varepsilon+\frac{k\pi}{\sigma}\right)(y+2l\sigma)} h\left(y+2l\sigma, x-\varepsilon-\frac{k\pi}{\sigma}\right)dy.\end{aligned}$$

Делая сдвиг индексов суммирования, находим

$$\begin{aligned}&h\left(y+2l\sigma, x-\varepsilon-\frac{k\pi}{\sigma}\right) \\ &\qquad= \eta_r(y+2l\sigma) - \gamma_m(y+2l\sigma)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(y+2\sigma(s+l))e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(y+2\sigma(q+l))e^{i2q\sigma x}} \\ &\qquad= \eta_r(y+2l\sigma) - e^{i2l\sigma(x-\varepsilon)}\gamma_m(y+2l\sigma)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(y+2\sigma s)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(y+2\sigma q)e^{i2q\sigma x}}.\end{aligned}$$

Поэтому подынтегральная функция равна

$$e^{iy\left(\varepsilon+\frac{k\pi}{\sigma}\right)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{i2l\sigma\varepsilon}\left(\eta_r(y+2l\sigma)-\right.$$

$$\left.-e^{i2l\sigma(x-\varepsilon)}\gamma_m(y+2l\sigma)\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(y+2\sigma s)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(y+2\sigma q)e^{i2q\sigma x}}\right)=0,$$

в чем легко убедиться, просуммировав уменьшаемые и вычитаемые по отдельности. □

Лемма 5. *Пусть* $\sigma>0$, $r,m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant r$, $f\in W^{(r)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $p\in[1,+\infty]$, $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{R})$,

$$A(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда $A=f-S$, *где* $S\in\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

Доказательство. Проверим, что интеграл в определении $A(x)$ существует, $A^{(r-1)}\in W^{(1)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и почти всюду

$$A^{(r)}=f^{(r)}-S,\tag{3.1}$$

где

$$S(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i(x-t)z}(iz)^rH_{r,m}(z,t)\,dz\,dt.$$

Запишем $A=A_1+A_2$, где

$$A_1(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\Delta_r(x-t)\,dt,$$

$$A_2(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\left(F_{r,m}(x,t)-\Delta_r(x-t)\right)\,dt,$$

и рассмотрим слагаемые по отдельности. По формулам (2.1) и (2.2)

$$A_1^{(r)}(x)=f^{(r)}(x)-\mathcal{X}^{(r)}_{\sigma,r}(f,x)=f^{(r)}(x)-\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)Q_r(x-t)\,dt.\tag{3.2}$$

Перейдем к исследованию A_2. Обозначим

$$\psi_k(z,x,t) = (\lambda_r(z) - H_{r,m}(z,t))(iz)^k e^{ixz}.$$

Прежде всего заметим, что по лемме 2 при $k \in [1:r]$

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(F_{r,m}(x,t) - \Delta_r(x-t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_k(z,x,t)e^{-itz}\,dz,$$

за исключением случая $k = r = m$, $x = x_j$.

Пусть сначала $f^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Докажем, что функции

$$(z,t) \mapsto \psi_k(z,x,t), \quad k \in [0:r]$$

удовлетворяют условиям леммы 3, причем интегралы в (2.5) ограничены по x. Из этого утверждения при $k=0$ вытекает существование интеграла $A_2(x)$, а при $k \in [1:r]$ – равномерная относительно x сходимость интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)\frac{d^k}{dx^k}\left(F_{r,m}(x,t) - \Delta_r(x-t)\right)\,dt \tag{3.3}$$

и, как следствие, законность r-кратного дифференцирования A_2 под знаком интеграла.

Рассмотрим периодизацию:

$$\begin{aligned}\Psi_k(z,x,t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_k(z+2l\sigma,x,t)e^{-i(z+2l\sigma)t}\\ &= C_1(z,x,t) + \frac{\varkappa_r(z)}{\mu_{r,m}(z,t)}C_2(z,x,t),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_1(z,x,t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \lambda_r(z+2l\sigma)(i(z+2l\sigma))^k e^{i(z+2l\sigma)(x-t)},\\ C_2(z,x,t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_m(z+2l\sigma,t)(i(z+2l\sigma))^k e^{i(z+2l\sigma)x}.\end{aligned}$$

Зафиксируем достаточно малые окрестности точек (z^*,t^*) из свойства F6. В дополнении этих окрестностей равномерная ограниченность по x функций Ψ_k и их производных по z очевидна. В самих же окрестностях C_1, C_2 и их производные по z равномерно ограничены по x. Пользуясь неравенством (2.6), свойствами F2 и F6 и соотношениями

$$\int\limits_{t^*-\delta}^{t^*+\delta}\left(\int\limits_{z^*-\delta}^{z^*+\delta}\frac{dz}{(z-z^*)^2+(t-t^*)^2}\right)^{1/2}dt<+\infty,$$

$$\int\limits_{t^*-\delta}^{t^*+\delta}\left(\int\limits_{z^*-\delta}^{z^*+\delta}\frac{(z-z^*)^2\,dz}{((z-z^*)^2+(t-t^*)^2)^2}\right)^{1/2}dt<+\infty,$$

получаем требуемое.

Из равномерной сходимости интегралов (2.4) по (x,t) следует их равномерная ограниченность. Поэтому равномерная относительно x сходимость интегралов (3.3) имеет место и в случае $f^{(r)}\in L_1(\mathbb{R})$. Если же $f^{(r)}\in L_p(\mathbb{R})$ при $p\in(1,+\infty)$, то равномерная сходимость следует из неравенства Гельдера и оценок при $p=1$ и $p=+\infty$.

Следовательно,

$$A_2^{(r)}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(\lambda_r(z)-H_{r,m}(z,t))(iz)^re^{i(x-t)z}\,dz\,dt. \qquad (3.4)$$

Складывая (3.2) и (3.4), приходим к (3.1).

Докажем, что $S\in\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$. Для этого перепишем $S(x)$ в виде

$$S(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}f^{(r)}(t)P(x,t)\,dt,$$

где

$$P(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}}e^{ixz}\gamma_{m-r}(z)g(z,t)\,dz,$$

$$g(z,t)=\left(e^{i\frac{\pi}{\sigma}z}-1\right)^r\frac{\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\eta_r(2\sigma s+z)e^{i2s\sigma\varepsilon}}{e^{itz}\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}\gamma_m(2\sigma q+z)e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

Функция g ограничена по свойству F5, а функция $g(\cdot,t)$ имеет период 2σ. Поэтому

$$P(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(g(\cdot,t))B_{m-r}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right),$$

в чем легко убедиться, взяв преобразование Фурье от правой части. Таким образом, $P(\cdot,t) \in \mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ при любом t, а тогда и $S \in \mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ по лемме 1.

Из равенства (3.1) находим

$$A = f - S^{(-r)},$$

где $S^{(-r)}$ – некоторая r-я первообразная S. Остается учесть, что любая r-я первообразная сплайна из $\mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ есть сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$. $\square$

В условиях леммы 5 определим оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ равенством

$$\mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) = f(x) - \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt. \tag{3.5}$$

По лемме 5 его значения принадлежат $\mathbf{S}_{\sigma,m}$.

3.2. Сведение к периодической задаче. Как известно (см., например, [12, §2.3 и 2.4]), всякий сплайн S из $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ единственным образом раскладывается по сдвигам ядер Бернулли:

$$S(x) = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j d_{m+1}\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \qquad \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j = 0 \tag{3.6}$$

или по сдвигам периодических B-сплайнов:

$$S(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_j \mathcal{B}_{n,m}\left(x - \frac{j\pi}{n}\right). \tag{3.7}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$ подпространство сплайнов из $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, у которых коэффициенты β_j в разложении (3.6) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \beta_j = 0, \tag{3.8}$$

а через $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{n,m}$ подпространство сплайнов из $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, у которых коэффициенты α_j в разложении (3.7) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (-1)^j \alpha_j = 0. \tag{3.9}$$

Как было сказано во введении, в [14] при $m \geqslant r$ построены линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (1.5), то есть такие, что для всех $p \in [1, +\infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_p.$$

Здесь, как обычно, $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$ – константы Фавара. Более того, значения оператора $\mathcal{X}_{n,r,m}$ принадлежат $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$. Доказательство основывалось на интегральном представлении погрешности

$$f(x) - \mathcal{X}_{n,r,m}(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\big(d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big)\,dt,$$

где при каждом $t \in \mathbb{R}$ функция $\zeta_{n,r,m}(\cdot, t)$ – сплайн из $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$, интерполирующий ядро Бернулли $d_r(\cdot - t)$ в точках $x = t + \varepsilon + \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Было показано, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big|\,dt = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|d_r(x-t) - \zeta_{n,r,m}(x,t)\big|\,dx = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \tag{3.11}$$

при всех x и t соответственно.

Заменой переменных эти результаты распространяются на пространства функций с произвольным фиксированным периодом. Далее мы убедимся, что при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ на 2π-периодических функциях оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$, определенный формулой (3.5), совпадает с оператором $\mathcal{X}_{n,r,m}$ из [14]. Затем, увеличивая период, мы выведем неравенства для функций, заданных на оси, из неравенств для периодических функций предельным переходом.

Замечание 1. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Если функция $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ имеет период $\frac{2N\pi}{\sigma}$, то

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt = \int_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g(t)\mathcal{F}_N(x,t)\,dt,$$

где

$$\mathcal{F}_N(x,t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F_{\sigma,r,m}\left(x, t + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right).$$

Лемма 6. *В условиях определения*

$$\mathcal{F}_N\left(\frac{Nx}{\sigma}, \frac{Nt}{\sigma}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1}\left(d_r(x-t) - \zeta_{N,r,m}(x,t)\right), \qquad (3.12)$$

где при почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $\zeta_{N,r,m}(\cdot,t)$ – сплайн из $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$, интерполирующий ядро Бернулли $d_r(\cdot - t)$ в точках $x = t + \varepsilon + \frac{k\pi}{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Положив $F = F_{\sigma,r,m}$, $h = h_{\sigma,r,m}$, запишем

$$F(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-t)z}h(z,t)\,dz = \Phi(x,t,t),$$

где

$$\Phi(x,u,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)z}h(z,t)\,dz.$$

Нам понадобится формула суммирования Пуассона (см., например, [6, п. 67] и [21, § X.6])

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} g(t+\nu T) = \frac{2\pi}{T}\sum_{s\in\mathbb{Z}} c\left(g, \frac{2\pi s}{T}\right)e^{i\frac{2\pi s}{T}t}.$$

Напомним, что при условии $g \in L_1(\mathbb{R})$ ряд в левой части абсолютно сходится для почти всех t. Обозначим его сумму $G_T(t)$. Тогда функция G_T суммируема на периоде, а ряд в правой части есть ее ряд Фурье. Поэтому для выполнения равенства в фиксированной точке t достаточно условия $G_T(t) = \frac{G_T(t+)+G_T(t-)}{2}$ и сходимости ряда в правой части в точке t. Легко видеть, что при всех x и почти всех v функция

$g = \Phi(x, \cdot, v)$ удовлетворяет этим условиям для любого t. Пользуясь еще тем, что функция $h(z, \cdot)$ имеет период $\frac{\pi}{\sigma}$, находим

$$\mathcal{F}_N(x,t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Phi\left(x, t + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}, t\right) = \frac{\sigma}{2\pi N} \sum_{s\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{\sigma s}{N}, t\right) e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)}.$$

Слагаемое при $s = 0$ не зависит от x. Оно принадлежит $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$, так как

$$1 = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} \mathcal{B}_{N,m}\left(x - \frac{j\pi}{N}\right).$$

Далее рассмотрим сумму по $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Просуммировав уменьшаемые, получим ядро Бернулли

$$\frac{\sigma}{2\pi N} \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \eta_r\left(\frac{\sigma s}{N}\right) e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{N}{\sigma}\right)^{r-1} d_r\left(\frac{\sigma}{N}(x-t)\right).$$

Теперь рассмотрим сумму вычитаемых

$$R(x,t) = \frac{\sigma}{2\pi N} \sum_{s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{i\frac{\sigma s}{N}(x-t)} \gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right) \frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \eta_r\left(2\sigma j + \frac{\sigma s}{N}\right) e^{i2j\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m\left(2\sigma q + \frac{\sigma s}{N}\right) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}.$$

При s, кратных N, слагаемые в этой сумме равны нулю. Поэтому

$$R(x,t) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{\sigma s}{N}x} \gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right) P_s(t),$$

где $P_{2N\rho}(t) = 0$,

$$P_s(t) = \frac{\sigma}{2\pi N} e^{-it\frac{\sigma s}{N}} \frac{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \eta_r\left(2\sigma j + \frac{\sigma s}{N}\right) e^{i2j\sigma\varepsilon}}{\sum\limits_{q\in\mathbb{Z}} \gamma_m\left(2\sigma q + \frac{\sigma s}{N}\right) e^{i2q\sigma(t+\varepsilon)}}$$

при $s \neq 2N\rho$, $\rho \in \mathbb{Z}$. Легко заметить, что $P_s(t) = P_{s+2N}(t)$. Чтобы упростить сумму, перейдем к дискретному преобразованию Фурье набора $\{P_s(t)\}_{s=0}^{2N-1}$:

$$p_k(t) = \frac{1}{2N} \sum_{s=0}^{2N-1} e^{-i\pi\frac{ks}{N}} P_s(t), \qquad P_s(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{i\pi\frac{ks}{N}} p_k(t).$$

Получим

$$\begin{aligned} R(x,t) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{\sigma s}{N}x}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)\sum_{k=0}^{2N-1} e^{i\pi\frac{ks}{N}}p_k(t) \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} p_k(t)\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma_m\left(\frac{\sigma s}{N}\right)e^{i\frac{\sigma s}{N}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{2N-1} p_k(t)\mathcal{B}_{N,m}\left(\frac{\sigma s}{N}\left(x+\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда $R\big(\frac{N\cdot}{\sigma}\cdot,t\big)\in\widetilde{\mathbf{S}}_{N,m}$. Принадлежность $R\big(\frac{N\cdot}{\sigma},t\big)$ подпространству $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$ следует из того, что

$$\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k p_k(t) = P_N(t) = 0.$$

Интерполяционное же условие выполняется по лемме 4. □

Далее, пренебрегая множеством нулевой меры при интегрировании, будем считать, что формула (3.12) верна при всех t.

Чтобы убедиться в совпадении операторов, остается доказать совпадение подпространств $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{n,m}$ и $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{n,m}$.

Лемма 7. *При всех $N\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$ подпространства $\widetilde{\mathbf{S}}^{\times}_{N,m}$ и $\widetilde{\mathbf{S}}^{\otimes}_{N,m}$ совпадают.*

Доказательство. Представим сплайн S в виде (3.6) и (3.7). Перейдем к дискретному преобразованию Фурье последовательности коэффициентов:

$$\widehat{\alpha}_k = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\alpha_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}}, \quad \widehat{\beta}_k = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\beta_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}}.$$

Условия (3.8) и (3.9) означают, что $\widehat{\beta}_N=0$ и $\widehat{\alpha}_N=0$ соответственно, а второе равенство в (3.6) – что $\widehat{\beta}_0=0$.

Разложения в ряд Фурье B-сплайнов и ядер Бернулли имеют вид

$$\mathcal{B}_{N,m}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{ikt}, \qquad d_{m+1}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}g_k e^{ikt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j \mathcal{B}_{N,m}\left(x - \frac{j\pi}{N}\right) = \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} e^{-i\pi\frac{jk}{N}} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \sum_{j=0}^{2N-1} \alpha_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} 2N\widehat{\alpha}_k \\
&= 2N \sum_{p=0}^{2N-1} \widehat{\alpha}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x} \\
&= 2N\widehat{\alpha}_0 + 2N \sum_{p=1}^{2N-1} \widehat{\alpha}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство верно, так как $c_0 = 1$ и $c_{2sN} = 0$ при $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \beta + \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j d_{m+1}\left(x - \frac{j\pi}{N}\right) = \beta + \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} e^{-i\pi\frac{jk}{N}} \\
&= \beta + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} \sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j e^{-i\pi\frac{kj}{N}} = \beta + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx} 2N\widehat{\beta}_k \\
&= \beta + 2N \sum_{p=0}^{2N-1} \widehat{\beta}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} g_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x} \\
&= \beta + 2N \sum_{p=1}^{2N-1} \widehat{\beta}_p \sum_{s\in\mathbb{Z}} g_{p+2sN} e^{i(p+2sN)x}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты Фурье B-сплайна и ядра Бернулли связаны соотношением

$$c_{p+2sN} = \left(\frac{e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1}{i(p+2sN)}\right)^{m+1} = 2\left(e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1\right)^{m+1} g_{p+2sN}.$$

Поэтому коэффициенты разложений (3.6) и (3.7) связаны соотношениями

$$\beta = 2N\widehat{\alpha}_0, \qquad \widehat{\beta}_j = 2\left(e^{i\frac{p\pi}{N}} - 1\right)^{m+1} \widehat{\alpha}_j, \quad j \in [1 : 2N-1].$$

Отсюда следует равносильность условий $\widehat{\alpha}_N = 0$ и $\widehat{\beta}_N = 0$. $\square$

§4. Неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара

Теорема 1. *Пусть* $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

При $p = 1, +\infty$ *неравенство точное, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение.*

Доказательство. Оценки снизу известны и обсуждались во введении (см. равенство (1.8)). Установим оценки сверху. Воспользуемся представлением погрешности

$$f(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t) F_{\sigma,r,m}(x, t)\, dt.$$

Положим $F = F_{\sigma,r,m}$.

1. Случай $p = +\infty$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. При каждом $N \in \mathbb{N}$ определим $\frac{2N\pi}{\sigma}$-периодическую функцию g_N соотношением

$$g_N(t) = \operatorname{sign} F(x, t) \quad \text{при} \quad t \in \left[-\frac{N\pi}{\sigma}, \frac{N\pi}{\sigma}\right).$$

По замечанию 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t) F(x, t)\, dt = \int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t) \mathcal{F}_N(x, t)\, dt.$$

По лемме 6 и неравенству (3.10)

$$\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} |\mathcal{F}_N(x, t)|\, dt = \frac{N}{\sigma} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\mathcal{F}_N\left(x, \frac{Nt}{\sigma}\right)\right| dt = \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \frac{\mathcal{K}_r}{N^r} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} g_N(t) \mathcal{F}_N(x, t)\, dt\right| \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Так как $g_N \to \operatorname{sign} F(x,\cdot)$ поточечно и $\|g_N\|_\infty = 1$, по теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x,t)|\,dt = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g_N(t)F(x,t)\,dt \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r},$$

откуда следует требуемое неравенство.

2. Случай $p = 1$. Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)F(x,t)\,dx, \qquad \varphi \in L_\infty(\mathbb{R}).$$

Если φ имеет период $\frac{2N\pi}{\sigma}$, то по замечанию 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)F(x,t)\,dx = \int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} \varphi(x)\mathcal{F}_N(x,t)\,dx,$$

поскольку

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F\left(x + \frac{2\nu N\pi}{\sigma}, t\right) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} F\left(x, t - \frac{2\nu N\pi}{\sigma}\right) = \mathcal{F}_N(x,t).$$

По лемме 6 и неравенству (3.11)

$$\int\limits_{-\frac{N\pi}{\sigma}}^{\frac{N\pi}{\sigma}} |\mathcal{F}_N(x,t)|\,dx = \frac{N}{\sigma}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\mathcal{F}_N\left(\frac{Nx}{\sigma}, t\right)\right|\,dx = \left(\frac{N}{\sigma}\right)^r \frac{\mathcal{K}_r}{N^r} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}.$$

Аналогично первому случаю получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x,t)|\,dx \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$$

при всех t. Следовательно,

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(r)}(t)F(x,t)\,dt\right| dx$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f^{(r)}(t)F(x,t)\right| dt\,dx \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |F(x,t)|\,dx \cdot \|f^{(r)}\|_1 = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_1.$$

При $p \in (1, +\infty)$ неравенство следует из доказанного неравенства для $p = 1, +\infty$ и интерполяционной теоремы Рисса–Торина. $\square$

Замечание 2. Из доказательства следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} |F_{\sigma,r,m}(x,t)|\,dt = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}, \qquad \int_{\mathbb{R}} |F_{\sigma,r,m}(x,t)|\,dx = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$$

при всех x и t соответственно.

Замечание 3. Обозначим

$$\varphi^*_\sigma(t) = \operatorname{sign}\sin\sigma\,(t-\varepsilon)\,.$$

В [14] установлено, что произведение $\mathcal{F}_1(x,t)\varphi^*_\sigma(x-t)$ не меняет знака на $\mathbb{R}^2$. Из этого факта и доказательства теоремы 1 следует, что произведение $F_{\sigma,r,m}(x,t)\varphi^*_\sigma(x-t)$ не меняет знака на $\mathbb{R}^2$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$A_{\sigma,m}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, $s \in \mathbf{S}_{\sigma,m-r}$ – сплайн, реализующий наилучшее приближение $f^{(r)}$ в $L_p(\mathbb{R})$ с точностью до δ, то есть

$$\|f^{(r)} - s\|_p \leqslant A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p + \delta.$$

Тогда $s^{(-r)} \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$. Завершим доказательство двумя способами.

Способ 1. По теореме 1

$$A_{\sigma,m}(f)_p = A_{\sigma,m}\bigl(f - s^{(-r)}\bigr)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)} - s\|_p = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\left(A_{\sigma,m-r}\bigl(f^{(r)}\bigr)_p + \delta\right).$$

Остается устремить δ к нулю.

Способ 2. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl(f^{(r)}(t) - s(t)\bigr) F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt = f(x) - P(x),$$

где

$$P(x) = \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f,x) + \int_{\mathbb{R}} s(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt.$$

По лемме 5

$$\int_{\mathbb{R}} s(t) F_{\sigma,r,m}(x,t)\,dt = s^{(-r)}(x) - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(s^{(-r)},x),$$

где $s^{(-r)}$ – произвольная первообразная s. Поэтому $P \in \mathbf{S}_{\sigma,m}$. Остается воспользоваться замечанием 2. □

В периодическом случае аналог следствия 1 для приближений тригонометрическими многочленами установил Сунь Юншен, для приближений сплайнами – Корнейчук; см. [12, теорема 4.1.4 и предложение 5.4.9].

Замечание 4. Вообще говоря, операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ не являются единственными линейными сплайновыми операторами, реализующими оценку (1.10). При $r = m = 1$, $p = +\infty$ та же оценка реализуется интерполяционными ломаными $\xi_{\sigma,1}$. Доказательство такой оценки элементарно и одинаково для отрезка, периода и оси (см., например, [11, лемма 5.2.12]). Действительно, при любом $x \in [a, b]$

$$\left|f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)\right| = \left|\frac{b-x}{b-a}\int\limits_a^x f' - \frac{x-a}{b-a}\int\limits_x^b f'\right|$$
$$\leqslant 2\frac{(b-x)(x-a)}{b-a}\|f'\|_\infty \leqslant \frac{b-a}{2}\|f'\|_\infty.$$

Применяя эту оценку к каждому отрезку $[x_j, x_{j+1}]$, получаем

$$\|f - \xi_{\sigma,1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2\sigma}\|f'\|_\infty.$$

В связи с последним неравенством напомним, что $\mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}$.

Литература

1. J. Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonométriques.* — Bull. Sci. Math. **61** (1937), 209–224, 243–256.
2. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.* — Докл. АН СССР **15** No. 3 (1937), 107–112.
3. С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **10**, No. 9 (1946), 207–256.
4. М. Г. Крейн, *О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси.* — Докл. АН СССР **18**, No. 9 (1938), 619–623.
5. B. Nagy, *Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall.* — Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939), 3–24.
6. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М. (1965).
7. I. J. Schoenberg, *Cardinal spline interpolation.* Philadelphia, SIAM, 2 ed. (1993).

8. В. М. Тихомиров, *Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве* $C[-1,1]$. — Мат. сб. **80**, No. 2 (1969), 290–304.
9. A. A. Ligun, it Inequalities for upper bounds of functionals. — Anal. Math. **2**, No. 1 (1976), 11–40.
10. N. P. Korneičuk, *Exact error bound of approximation by interpolating splines on L-metric on the classes* W_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$ *of periodic functions.* — Anal. Math. **3**, No. 2 (1977), 109–117.
11. Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения.* М. (1984).
12. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М. (1987).
13. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М. (1960).
14. О. Л. Виноградов, *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* — Проблемы математического анализа (2003), Вып. 25, 29–56.
15. Сунь Юншен, Ли Чунь, *Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка.*— Мат. заметки **48**, No. 4 (1990), 148–159.
16. Г. Г. Магарил-Ильяев, *О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой.* — Труды Мат. ин-та РАН **194** (1992), 148–159.
17. Г. Г. Магарил-Ильяев, *Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой.* — Мат. сб. **182**, No. 11 (1991), 1635–1656.
18. I. J. Schoenberg, *On the remainders and the convergence of cardinal spline interpolation for almost periodic functions.* — In: Studies in spline functions and approximation theory, pp. 277–303, Academic Press, New York, 1976.
19. C. de Boor, I. J. Schoenberg, *Cardinal interpolation and spline functions VIII. The Budan–Fourier theorem for splines and applications.* — In: Spline functions (Proc. Internat. Sympos., Karlsruhe (1975), pp. 1–79) Lecture Notes Math. **501** (1976).
20. K. Jetter, S. D. Riemenschneider, N. Sivakumar, *Schoenberg's exponential Euler spline curves.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh **118A** (1991), 21–33.
21. Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов, *Лекции по вещественному анализу.* СПб (2011).

Vinogradov O. L. and Gladkaya A. V. A nonperiodic analogue of the Akhiezer–Krein–Favard operators.

In what follows, $\sigma > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ is the space of splines of order m and minimal defect with nodes $\frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$, $A_{\sigma,m}(f)_p$ is the best approximation of a function f by the set $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ in the space $L_p(\mathbb{R})$. It is known that for $p = 1, +\infty$

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{1}$$

In this paper we construct linear operators $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ with their values in $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, such that for all $p \in [1,+\infty]$ and $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}\|f^{(r)}\|_p.$$

So we establish the possibility to achieve the upper bounds in (1) by linear methods of approximation, which was unknown before.

С.-Петербургский государственный
университет, Россия,
198504, Санкт-Петербург,
Университетский пр., д.28
E-mail: olvin@math.spbu.ru
E-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

Поступило 21 сентября 2015 г.