Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Е. Е. Тыртышников, В. Н. Чугунов

ОБ АЛГЕБРАХ ГАНКЕЛЕВЫХ ЦИРКУЛЯНТОВ И ГАНКЕЛЕВЫХ КОСЫХ ЦИРКУЛЯНТОВ

§1. Постановка задачи

Теплицевой называется комплексная $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогично, ганкелеву матрицу (2) будем называть *ганкелевым циркулянтом*, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

ганкелевым косым циркулянтом при

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Зададимся следующими вопросами. Какие подмножества ганкелевых циркулянтов образуют алгебру? Можно ли параметризовать все

Ключевые слова: теплицева матрица, ганкелева матрица, циркулянт, косой циркулянт, алгебра.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 14-11-00806.

такие максимальные алгебры? Конечное ли их число для фиксированного порядка n? Что аналогичное можно сказать про ганкелевы косые циркулянты?

Оветы на данные вопросы дадим в представляемой статье. В разделе 2 опишем конечное число алгебр ганкелевых циркулянтов, в разделе 3 – конечное число алгебр ганкелевых косых циркулянтов. Но сначала напомним некоторые важные понятия.

Переставив столбцы теплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей теплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Для фиксированной ганкелевой матрицы H теплицеву матрицу T, из которой получена H описанным выше способом, будем называть *соответствующей*.

Согласно [1], если C – циркулянт, то для него справедливо спектральное разложение вида

$$C = F_n^* D F_n, \tag{3}$$

где $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – диагональная матрица, F_n – (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ – первообразный корень n-ой степени из единицы. Обозначим через $d(C)$ вектор собственных значений

$$d(C) = (d_1, d_2, \dots, d_n)^t.$$

Если S – косой циркулянт, то формула (3) приобретает вид

$$S = G_{-1} F_n^* D F_n G_{-1}^*, \tag{4}$$

где

$$G_{-1} = \mathrm{diag}(1, \psi, \psi^2, \ldots, \psi^{n-1}),$$

ψ – корень n-ой степени из (-1) вида $\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Обозначим через $d(S)$ вектор собственных значений

$$d(S) = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^t.$$

Матрицу A будем называть шахматной с параметрами α, β (обозначаем $A \in \mathrm{Ch}(\alpha, \beta)$), если

$$\{A\}_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i-j \text{ – четное число,} \\ \beta, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Видно, что ранг шахматной матрицы не превосходит двойки.

Несложно доказать справедливость следующих утверждений (см. [2]).

Лемма 1. *Если циркулянт C имеет разложение* (3), *то*

$$C^t = F_n^* \widehat{D} F_n,$$

где $\widehat{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_2)$.

Из леммы 1 получаем лемму 2.

Лемма 2. *Циркулянт C с разложением* (3) *является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$d_j = d_{n+2-j}, \quad j = 2, 3, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor. \tag{5}$$

Лемма 3. *Если косой циркулянт S имеет разложение* (4), *то*

$$S^t = G_{-1} F_n^* \widetilde{D} F_n G_{-1}^*,$$

где $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(d_2, d_1, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_3)$.

Из леммы 3 получаем лемму 4.

Лемма 4. *Косой циркулянт S с разложением* (4) *является симметричной матрицей тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &d_1 = d_2, \\ &d_j = d_{n+3-j}, \quad j = 3, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1. \end{aligned} \tag{6}$$

В дальнейшем для заданной диагональной матрицы D через $\widehat{D}$ будем обозначать матрицу, введенную в лемме 1, через $\widetilde{D}$ – матрицу, определенную в лемме 3. Через e_j будем обозначать n-мерный вектор с единицей в j-ой позиции и нулями во всех остальных позициях.

§2. Алгебры ганкелевых циркулянтов

Пусть H_1 и H_2 – две ганкелевы матрицы, которые представлены в виде

$$H_1 = T_1 \mathcal{P}_n, \quad H_2 = T_2 \mathcal{P}_n,$$

где T_1 и T_2 – теплицевы. Тогда

$$H_1 H_2 = T_1 \mathcal{P}_n T_2 \mathcal{P}_n.$$

В силу свойства персимметричности теплицевых матриц, получаем

$$H_1 H_2 = T_1 {T_2}^t. \tag{7}$$

В данном параграфе мы рассмотрим случай, когда H_1 и H_2 – два ганкелевых циркулянта, которые запишем как $H_1 = C_1 \mathcal{P}_n$, $H_2 = C_2 \mathcal{P}_n$, где C_1 и C_2 – циркулянты. Очевидно, что линейная комбинация ганкелевых циркулянтов является ганкелевым циркулянтом. Поэтому, чтобы получить алгебры ганкелевых циркулянтов, рассмотрим вопрос, когда произведение ганкелевых циркулянтов или квадрат ганкелевого циркулянта являются ганкелевыми циркулянтами. В силу (7),

$$H_1 H_2 = C_1 {C_2}^t.$$

Матрица $C_1 {C_2}^t$ также будет циркулянтом, т.е. теплицевой. Чтобы матрица $H_1 H_2$ была еще и ганкелевой, нужно потребовать, чтобы она была шахматной. Поэтому сначала рассмотрим вопрос о представлении теплицевых циркулянтов, являющихся шахматными матрицами, которые будем называть *шахматными теплицевыми циркулянтами.*

Пусть $C \in \mathrm{Ch}\ (\alpha, \beta)$ – шахматный теплицев циркулянт. Запишем для него представление (3). Так как шахматная матрица симметрична, то должно выполняться условие (5), которое имеет место при $n \geqslant 3$.

Покажем сначала, что все числа d_j в соотношении (5) должны быть нулевыми. Пусть это не так. Тогда найдется такой номер j_0, что

$$d_{j_0} = d_{n+2-j_0} = \lambda \neq 0.$$

Так как ранг любой шахматной матрицы не выше двух, то все другие числа d_j обращаются в нуль. Вычислим элемент матрицы C в позиции

(k, m):

$$\{C\}_{km} = \frac{\lambda}{n}\epsilon^{-(k-1)(j_0-1)}\epsilon^{(j_0-1)(m-1)} + \frac{\lambda}{n}\epsilon^{-(k-1)(n+1-j_0)}\epsilon^{(n+1-j_0)(m-1)}$$
$$= \frac{\lambda}{n}\epsilon^{(m-k)(j_0-1)} + \frac{\lambda}{n}\epsilon^{-(m-k)(j_0-1)}$$
$$= \frac{\lambda}{n}\left(\epsilon^{(m-k)(j_0-1)} + \epsilon^{-(m-k)(j_0-1)}\right).$$

По нашему предположению $\lambda \neq 0$. Матрица C должна быть ганкелевой, поэтому $\{C\}_{13} = \{C\}_{22}$. Это условие дает соотношение

$$\epsilon^{2(j_0-1)} + \epsilon^{-2(j_0-1)} = 2.$$

Обозначим $x = \epsilon^{2(j_0-1)} \neq 0$, тогда

$$x + \frac{1}{x} - 2 = 0,$$

или

$$(x-1)^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что $\epsilon^{(j_0-1)} = \pm 1$.

Если $\epsilon^{(j_0-1)} = 1$, то $j_0 = 1$, но у нас $j \geqslant 2$, если же $\epsilon^{(j_0-1)} = -1$, имеем $e^{i\frac{2\pi}{n}(j_0-1)} = e^{i\pi}$. Получаем, что

$$j_0 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2} > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

так как число j_0 натуральное, то n должно быть четным: $n = 2m$, и тогда получаем $m + 1 > m$. Поэтому все числа d_j в соотношении (5) должны быть нулями.

Таким образом, в шахматном циркулянте ненулевыми могут быть лишь самое большое два собственных значения. Они располагаются в следующих позициях. Если $n = 2m + 1$, то возможно только одно ненулевое собственное значение d_1, если $n = 2m$, то d_1 и d_{m+1}.

Рассмотрим вид теплицевого циркулянта C со спектром $d(C) = \lambda e_1$. Имеем

$$\{C\}_{kj} = \frac{1}{n}\lambda.$$

Получаем шахматный циркулянт ранга один $C \in Ch\left(\frac{1}{n}\lambda, \frac{1}{n}\lambda\right)$.

Теперь пусть $n = 2m$ и $d(C) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_{m+1}$:

$$\begin{aligned}\{C\}_{kj} &= \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_2 \epsilon^{-(k-1)m}\epsilon^{(j-1)m} = \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_2 \epsilon^{(j-k)m} \\ &= \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_2 \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{(j-k)m} = \frac{1}{n}\lambda_1 + \frac{1}{n}\lambda_2 \left(e^{i\pi}\right)^{j-k} \\ &= \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2(-1)^{j-k}).\end{aligned}$$

Получаем шахматный циркулянт ранга два

$$C \in \mathrm{Ch}\ \left(\frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2), \frac{1}{n}(\lambda_1 - \lambda_2)\right).$$

Теперь мы можем указать все максимальные алгебры ганкелевых циркулянтов. Описывать их будем наборами d собственных значений соответствующих теплицевых циркулянтов. Каждая алгебра будет подчиняться условию, что для каждого индекса $j = 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ одно из чисел d_j и d_{n+2-j} обязательно равно нулю. Для этого описываемую алгебру будем характеризовать вектором r размера $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, состоящим из нулей и единиц, и обозначать $\mathcal{H}_r$.

Пусть сначала $n = 2m$. Фиксируем вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_{m-1})^t$, где $r_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$. Определим $\mathcal{H}_r$ как

$$\mathcal{H}_r = \left\{ H \mid H = F_n^* D F_n \mathcal{P}_n,\ \exists\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}), \right.$$

$$\left. d_j = \begin{cases} \lambda_1, & j = 1, \\ \lambda_j r_{j-1}, & j = 2, \dots, m, \\ \lambda_{m+1}, & j = m+1, \\ \lambda_{n+2-j}(1 - r_{n+1-j}), & j = m+2, \dots, n, \end{cases} \right\}.$$

Рассмотрим произведение двух матриц $H_1 = C_1 \mathcal{P}_n$ и $H_2 = C_2 \mathcal{P}_n$ из $\mathcal{H}_r$, где

$$C_1 = F_n^* D^{(1)} F_n, \tag{8}$$

$$C_2 = F_n^* D^{(2)} F_n, \tag{9}$$

$$D^{(1)} = \mathrm{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}), \tag{10}$$

$$D^{(2)} = \mathrm{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}). \tag{11}$$

Пусть матрице C_1 соответствует вектор $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(1)})$, а матрице C_2 соответствует вектор $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(2)})$ в определении алгебры.

Рассмотрим

$$H_1H_2 = C_1\mathcal{P}_nC_2\mathcal{P}_n = C_1(C_2)^t = F_n^*D^{(1)}\widehat{D}^{(2)}F_n. \tag{12}$$

Пусть $D = D^{(1)}\widehat{D}^{(2)}$, тогда для $j = 2,\ldots,m$

$$\{D\}_{jj} = d_j^{(1)}d_{n+2-j}^{(2)} = \lambda_j^{(1)}r_{j-1}\lambda_j^{(2)}(1-r_{j-1}) = 0, \tag{13}$$

для $j = m+2,\ldots,n$

$$\{D\}_{jj} = d_j^{(1)}d_{n+2-j}^{(2)} = \lambda_{n+2-j}^{(1)}(1-r_{n+1-j})\lambda_{n+2-j}^{(2)}r_{n+1-j} = 0. \tag{14}$$

Получаем, что H_1H_2 – шахматный циркулянт, принадлежащий описанной алгебре.

Пусть теперь $n = 2m+1$. Фиксируем вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)^t$, где $r_j \in \{0,1\}$, $j = 1,2,\ldots,m$. Определим $\mathcal{H}_r$ как

$$\mathcal{H}_r = \Biggl\{H \mid H = F_n^*DF_n\mathcal{P}_n,\ \exists\ \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1}),$$

$$d_j = \begin{cases} \lambda_1, & j = 1, \\ \lambda_j r_{j-1}, & j = 2,\ldots,m+1, \\ \lambda_{n+2-j}(1-r_{n+1-j}), & j = m+2,\ldots,n, \end{cases} \Biggr\}.$$

Снова рассмотрим произведение двух матриц $H_1 = C_1\mathcal{P}_n$ и $H_2 = C_2\mathcal{P}_n$ из $\mathcal{H}_r$ с условиями (8)–(11). Пусть матрице C_1 соответствует вектор $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m+1}^{(1)})$, а матрице C_2 соответствует вектор $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)},\ldots,\lambda_{m+1}^{(2)})$ в определении алгебры. И в этом случае получаем (12)–(14). Значит, H_1H_2 – шахматный циркулянт. Если положить $C_2 = C_1$, то получим, что квадрат C_1 является шахматным циркулянтом.

В результате мы описали все максимальные алгебры ганкелевых циркулянтов. Всего таких алгебр конечное число $2^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}$.

§3. Алгебры ганкелевых косых циркулянтов

Теперь исследуем множество ганкелевых косых циркулянтов. Очевидно, что линейная комбинация ганкелевых косых циркулянтов является ганкелевым косым циркулянтом. Поэтому, чтобы получить алгебры ганкелевых косых циркулянтов, рассмотрим вопрос, когда произведение ганкелевых косых циркулянтов или квадрат ганкелевого косого циркулянта являются ганкелевыми косыми циркулянтами.

Пусть H_1 и H_2 – два ганкелевых косых циркулянта, которые представим как $H_1 = S_1\mathcal{P}_n$, $H_2 = S_2\mathcal{P}_n$, где S_1 и S_2 – косые циркулянты. Тогда, в силу (7),

$$H_1H_2 = S_1{S_2}^t.$$

Матрица $S_1{S_2}^t$ также будет косым циркулянтом, т.е. теплицевой. Чтобы матрица $S_1{S_2}^t$ была еще и ганкелевой, нужно потребовать, чтобы она была шахматной. Поэтому теперь рассмотрим вопрос о представлении теплицевых косых циркулянтов, являющихся шахматными матрицами, которые будем называть *шахматными теплицевыми косыми циркулянтами.*

Пусть S – шахматный теплицев косой циркулянт. В отличие от шахматных теплицевых циркулянтов, такие матрицы возможны лишь в случае нечетного порядка $n = 2m+1$, при этом $S \in \mathrm{Ch}\ (\alpha, -\alpha)$. В этом случае, ранг матрицы не больше единицы и, в силу (6), она может иметь только одно ненулевое собственное значение d_{m+2}.

Рассмотрим вид теплицевого косого циркулянта S со спектром $d(S) = \lambda e_{m+2}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\{S\}_{kj} &= \frac{1}{n}\lambda\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1}\epsilon^{-(k-1)(m+1)}\epsilon^{(m+1)(j-1)}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{-(j-1)} \\
&= \frac{1}{n}\lambda\left(e^{-i\frac{\pi}{n}}\right)^{j-k}\epsilon^{(m+1)(j-k)} = \frac{1}{n}\lambda\left(e^{-i\frac{\pi}{n}}e^{i\frac{2\pi}{n}(m+1)}\right)^{j-k} \\
&= \frac{1}{n}\lambda\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{(-1+2m+2)(j-k)} = \frac{1}{n}\lambda\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^{(2m+1)(j-k)} \\
&= \frac{1}{n}\lambda\left(e^{i\pi}\right)^{(j-k)} = \frac{1}{n}\lambda\left(-1\right)^{(j-k)}.
\end{aligned}$$

Получаем шахматный циркулянт ранга один $S \in \mathrm{Ch}\left(\frac{1}{n}\lambda, -\frac{1}{n}\lambda\right)$.

Теперь укажем все максимальные алгебры ганкелевых косых циркулянтов. Описывать их будем наборами собственных значений соответствующих теплицевых косых циркулянтов. Считаем, что $n = 2m+1$. По аналогии с циркулянтами каждую алгебру будем характеризовать вектором r размера m, состоящим из нулей и единиц, и обозначать $\mathcal{H}_r$.

Фиксируем вектор $r=(r_1,r_2,\ldots,r_m)^t$, где $r_j\in\{0,1\}$, $j=1,2,\ldots,m$. Определим $\mathcal{H}_r$ как

$$\mathcal{H}_r=\Bigg\{H \mid H=G_{-1}F_n^*DF_nG_{-1}^*\mathcal{P}_n,\ \exists\,\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m+1}),$$

$$d_j=\begin{cases}\lambda_1r_1, & j=1,\\ \lambda_1(1-r_1), & j=2,\\ \lambda_{j-1}r_{j-1}, & j=3,\ldots,m+1,\\ \lambda_{m+1}, & j=m+2,\\ \lambda_{n+2-j}(1-r_{n+2-j}), & j=m+3,\ldots,n,\end{cases}\Bigg\}.$$

Рассcмотрим произведение двух матриц $H_1=S_1\mathcal{P}_n$ и $H_2=S_2\mathcal{P}_n$ из $\mathcal{H}_r$, где

$$\begin{aligned}S_1&=G_{-1}F_n^*D^{(1)}F_nG_{-1}^*,\\ S_2&=G_{-1}F_n^*D^{(2)}F_nG_{-1}^*,\\ D^{(1)}&=\operatorname{diag}(d_1^{(1)},d_2^{(1)},\ldots,d_n^{(1)}),\\ D^{(2)}&=\operatorname{diag}(d_1^{(2)},d_2^{(2)},\ldots,d_n^{(2)}).\end{aligned}$$

Пусть матрице S_1 соответствует вектор $\lambda^{(1)}=(\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m+1}^{(1)})$, а матрице S_2 соответствует вектор $\lambda^{(2)}=(\lambda_1^{(2)},\ldots,\lambda_{m+1}^{(2)})$ в определении алгебры.

Рассмотрим

$$H_1H_2=S_1\mathcal{P}_nS_2\mathcal{P}_n=S_1(S_2)^t=G_{-1}F_n^*D^{(1)}\widetilde{D}^{(2)}F_nG_{-1}^*.$$

Пусть $D=D^{(1)}\widetilde{D}^{(2)}$, тогда

$$\begin{aligned}\{D\}_{11}&=d_1^{(1)}d_2^{(2)}=\lambda_1^{(1)}r_1\lambda_1^{(2)}(1-r_1)=0,\\ \{D\}_{22}&=d_2^{(1)}d_1^{(2)}=\lambda_1^{(1)}(1-r_1)\lambda_1^{(2)}r_1=0,\end{aligned}$$

для $j=3,\ldots,m+1$,

$$\{D\}_{jj}=d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(2)}=\lambda_j^{(1)}r_{j-1}\lambda_j^{(2)}(1-r_{j-1})=0,$$

для $j=m+3,\ldots,n$,

$$\{D\}_{jj}=d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(2)}=\lambda_{n+3-j}^{(1)}(1-r_{n+2-j})\lambda_{n+3-j}^{(2)}r_{n+2-j}=0.$$

Получаем, что H_1H_2 – шахматный косой циркулянт. Если положить $S_2=S_1$, то получим, что квадрат S_1 является шахматным косым циркулянтом.

В результате мы описали все максимальные алгебры ганкелевых косых циркулянтов. Всего таких алгебр для нечетного $n = 2m + 1$ конечное число 2^m.

Литература

1. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами.* Наука, М., 1987.
2. В. Н. Чугунов, *О частных решениях нормальной $T + H$-задачи.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **50**, No. 4 (2010), 612–617.

Tyrtyshnikov E. E., Chugunov V. N. On algebras of Hankel circulants and Hankel skew-circulants.

A parametrization of all maximum algebras of Hankel circulants and Hankel skew-circulants is presented.

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8, 119333 Москва, Россия

E-mail: eugene.tyrtyshnikov@gmail.com

E-mail: chugunov.vadim@gmail.com

Поступило 14 сентября 2015 г.