Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ОБРАТНЫХ В НОРМЕ l_∞ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение и предварительные сведения

Задача оценки сверху $\|A^{-1}\|_\infty$ для матриц A, принадлежащих различным матричным классам, исследовалась в последнее время рядом авторов, см., в частности, [1–6,10,11,14]. В указанных работах оценки были установлены для матриц из некоторых подклассов $\mathcal{H}$-матриц и блочных $\mathcal{H}$-матриц.

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется $\mathcal{H}$-матрицей, если ее матрица сравнения $\mathfrak{M}(A) = (\mu_{ij})$, определенная соотношениями

$$\mu_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. матрица $\mathfrak{M}(A)$ невырождена, а ее обратная $[\mathfrak{M}(A)]^{-1}$ неотрицательна. В соответствии с этим определением, все $\mathcal{H}$-матрицы невырождены.

Напомним некоторые определения и факты, которые потребуются нам в дальнейшем.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, имеет строгое диагональное преобладание, т.е. является SDD (strictly diagonally dominant) матрицей, если

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже

$$r_i(A) = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

– усеченные абсолютные строчные суммы матрицы A.

Ключевые слова: обратная матрица, блочная матрица, $\mathcal{M}$-матрица, $\mathcal{H}$-матрица, блочная $\mathcal{H}$-матрица, бесконечная норма, верхняя оценка, SDD матрица, S-SDD матрица, матрица Некрасова, S-некрасовская матрица, квазинекрасовская матрица, P$\mathcal{H}$-матрица, блочная P$\mathcal{H}$-матрица.

Пусть S – непустое подмножество множества индексов $\langle n\rangle = \{1,\dots,n\}$. Тогда S-SDD матрицы определяются следующим образом [8, 15], см. также [3]. Пусть

$$r_i^S(A) = \sum_{j\in S\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \quad i \in S, \tag{1.2}$$

– частичные строчные суммы, соответствующие подмножеству S. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-SDD (S-strictly diagonally dominant) матрицей, если выполнены следующие два условия:

$$|a_{ii}| > r_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{1.3}$$

и

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] \left[|a_{jj}| - r_j^{\bar S}(A)\right] > r_i^{\bar S}(A)\, r_j^S(A) \\ \text{для всех } i \in S \text{ и } j \in \bar S, \tag{1.4}$$

где $\bar S := \langle n\rangle \setminus S$.

Ясно, что SDD матрицы образуют собственный подкласс класса S-SDD матриц.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется матрицей Некрасова, или сокращенно N-матрицей, если

$$|a_{ii}| > h_i(A), \quad i = 1,\dots,n, \tag{1.5}$$

где величины $h_i(A)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} h_1(A) &= r_1(A) = \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|; \\ h_i(A) &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j(A) + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2,\dots,n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Как хорошо известно, класс N некрасовских матриц, с одной стороны, является подклассом класса $\mathcal{H}$-матриц [12]; с другой стороны, он содержит класс SDD матриц.

Заметим, что, как следует из определения, все диагональные элементы матриц Некрасова, равно как и других $\mathcal{H}$-матриц, ненулевые.

В матричных терминах вектор $h(A) = (h_i(A))$ можно записать в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \tag{1.7}$$

где $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор, I_n – единичная матрица порядка n, а $A = D + L + U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ соответственно на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную (L) и строго верхнюю треугольную (U) части. Таким образом, условие (1.5) равносильно неравенству (см. [12])

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e = [I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e < e. \tag{1.8}$$

Класс SN, состоящий из S-некрасовских матриц, где S – непустое собственное подмножество множества индексов, был определен в работе [7] в терминах величин

$$\begin{aligned} &h_1^S(A) = r_1^S(A);\\ &h_i^S(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} h_j^S(A) + \sum_{\substack{j \geqslant i+1\\ j\in S}} |a_{ij}|, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, называется S-некрасовской матрицей (или SN-) матрицей, если

$$|a_{ii}| > h_i^S(A) \quad \text{для всех} \quad i \in S \tag{1.10}$$

и

$$\Big[|a_{ii}| - h_i^S(A)\Big] \ \Big[|a_{jj}| - h_j^{\bar{S}}(A)\Big] > h_i^{\bar{S}}(A)\ h_j^S(A)$$
$$\text{для всех} \quad i \in S \quad \text{и} \quad j \in \bar{S}. \tag{1.11}$$

Обозначим

$$e^S = (e_i^S), \quad e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S,\\ 0, & i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно понять, соотношения (1.9) можно записать в следующей матрично-векторной форме:

$$h^S(A) = |L||D|^{-1}h^S(A) + |U|e^S,$$

или

$$h^S(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e^S. \tag{1.12}$$

Как легко следует из определений, матрицы Некрасова образуют собственный подкласс класса S-некрасовских матриц. С другой стороны, класс SN содержит S-SDD матрицы (см. [6,7]).

Следующий матричный класс был введен в работе [3], где было доказано, что он является подклассом класса $\mathcal{H}$-матриц и содержит класс N матриц Некрасова.

Матрица $A = D+L+U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами называется квазинекрасовской (или QN-) матрицей, если матрица

$$G \equiv [P(A)]^{-1}\mathfrak{M}(A) = I_n - [P(A)]^{-1}|L||D|^{-1}|U| \tag{1.13}$$

имеет строгое диагональное преобладание. Здесь и ниже мы используем обозначение

$$P(A) = (|D| - |L|)|D|^{-1}(|D| - |U|) = \mathfrak{M}(A) + |L||D|^{-1}|U|. \tag{1.14}$$

Ясно, что матрица $P(A)$ монотонна, т.е. она обратима и ее обратная $[P(A)]^{-1}$ неотрицательна.

Поскольку, в силу (1.13), G является Z-матрицей (т.е. ее внедиагональные элементы неположительны), из свойства строгого диагонального преобладания матрицы G следует, что она является $\mathcal{M}$-матрицей, а свойство строгого диагонального преобладания G равносильно неравенству

$$Ge = [P(A)]^{-1}\mathfrak{M}(A)e = (I_n - [P(A)]^{-1}|L||D|^{-1}|U|)e > 0. \tag{1.15}$$

Итак, $A \in \mathrm{QN}$ тогда и только тогда, когда

$$e > [P(A)]^{-1}|L||D|^{-1}|U|e. \tag{1.16}$$

Класс P$\mathcal{H}$-матриц был введен в работе [10].

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть

$$\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{m} M_i, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \tag{1.17}$$

– разбиение множества индексов $\langle n\rangle$ на m непересекающихся непустых подмножеств. Обозначим

$$A_{ij} = A[M_i, M_j] = (a_{rs})_{\substack{r\in M_i\\ s\in M_j}}, \quad i,j = 1,\dots,m, \tag{1.18}$$

и представим A в блочном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Определим следующий набор из $m_1\times\cdots\times m_m$ агрегированных матриц порядка m:

$$A^{(i_1,i_2,\ldots,i_m)} \equiv \begin{bmatrix} s_{i_1}(A_{11}) & s_{i_1}(A_{12}) & \ldots & s_{i_1}(A_{1m}) \\ s_{i_2}(A_{21}) & s_{i_2}(A_{22}) & \ldots & s_{i_2}(A_{2m}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{i_m}(A_{m1}) & s_{i_m}(A_{m2}) & \ldots & s_{i_m}(A_{mm}) \end{bmatrix},$$
$$i_k \in M_k, \quad k=1,\ldots,m. \tag{1.20}$$

Здесь $m_i = |M_i|$, $i=1,\ldots,m$, и

$$s_{i_k}(A_{kp}) = (A_{kp}e)_{i_k}, \quad i_k\in M_k, \quad k,p=1,\ldots,m,$$

– строчные суммы блоков A_{kp} с учетом знаков их элементов.

Будем говорить, что матрица A является P$\mathcal{M}$-матрицей относительно разбиения (1.17), если A – Z-матрица и все матрицы $A^{(i_1,\ldots,i_m)}$, $i_k\in M_k$, $k=1,\ldots,m$, определенные в соответствии с (1.20), являются невырожденными $\mathcal{M}$-матрицами. Также мы будем говорить, что A является P$\mathcal{H}$-матрицей относительно разбиения (1.17), если $\mathfrak{M}(A)$ – P$\mathcal{M}$-матрица относительно того же разбиения множества индексов.

Ясно, что матрица A является P$\mathcal{M}$-матрицей (P$\mathcal{H}$-матрицей) относительно самого мелкого (точечного) разбиения $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^{n}\{i\}$ тогда и только тогда, когда A – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица ($\mathcal{H}$-матрица). С другой стороны, для самого грубого разбиения $\langle n\rangle = M_1$ с $m=1$ матрица A является P$\mathcal{H}$-матрицей тогда и только тогда, когда она является SDD матрицей. При $m=2$, $\langle n\rangle = S\cup\overline{S}$, A является $P\mathcal{H}$-матрицей тогда и только тогда, когда она принадлежит классу S-SDD, см., например, [10].

Важно отметить, что все упомянутые выше подклассы класса $\mathcal{H}$-матриц, так же как и сам класс $\mathcal{H}$-матриц, замкнуты относительного левого умножения на невырожденные диагональные матрицы.

В работе [12] в контексте общих векторных норм было введено понятие блочной $\mathcal{H}$-матрицы, а также были определены некоторые подклассы класса блочных $\mathcal{H}$-матриц. В том частном случае, когда используется норма l_∞, определение блочной $\mathcal{H}$-матрицы в смысле Робера принимает следующий вид.

Пусть $A=(A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant N\leqslant n$, – блочная матрица. Предположим, что ее блочно-диагональная часть

$$\mathrm{Diag}\,(A_{11},\ldots,A_{NN})$$

невырождена.

Определим $N \times N$ матрицы

$$R(A) \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\|A_{11}^{-1}A_{12}\|_\infty & \dots & -\|A_{11}^{-1}A_{1N}\|_\infty \\ -\|A_{22}^{-1}A_{21}\|_\infty & 1 & \dots & -\|A_{22}^{-1}A_{2N}\|_\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{NN}^{-1}A_{N1}\|_\infty & -\|A_{NN}^{-1}A_{N2}\|_\infty & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

и

$$N(A) \equiv \operatorname{diag}(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1}, \dots, \|A_{NN}^{-1}\|_\infty^{-1}) \cdot R(A). \quad (1.22)$$

Во введенных обозначениях матрица A называется блочной $\mathcal{H}$-матрицей (относительно бесконечной нормы и рассматриваемого блочного разбиения), или B$\mathcal{H}$-матрицей, если $N(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей.

Матрица $N(A)$ также используется для определения блочных аналогов и других матричных свойств. Конкретно, блочная матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, называется

- блочной SDD (BSDD) матрицей, если $N(A)$ – SDD матрица;
- блочной S-SDD (BS-SDD) матрицей, если $N(A)$ – S-SDD матрица;
- блочной матрицей Некрасова (BN-матрицей), если $N(A)$ – матрица Некрасова;
- блочной SN- (BSN-) матрицей, если $N(A)$ – SN-матрица;
- блочной QN- (BQN-) матрицей, если $N(A)$ – QN-матрица;
- блочной P$\mathcal{H}$- (BP$\mathcal{H}$-) матрицей, если $N(A)$ – P$\mathcal{M}$-матрица.

Поскольку все указанные точечные матричные классы являются подклассами класса $\mathcal{H}$-матриц, то, очевидно, их блочные аналоги, определенные выше, являются подклассами класса B$\mathcal{H}$-матриц.

Здесь представляется уместным сделать следующее замечание. Как уже было упомянуто, класс $\mathcal{H}$-матриц и все его рассматриваемые подклассы $\mathcal{K}$ замкнуты относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы. Благодаря этому свойству, матрицы $N(A)$ и $R(A)$ одновременно принадлежат такому подклассу $\mathcal{K}$ класса $\mathcal{H}$ или же не принадлежат ему, так что в приведенном выше определении B$\mathcal{K}$-матриц матрицу $N(A)$ можно заменить несколько более простой матрицей $R(A)$, т.е. игнорировать диагональный сомножитель $\operatorname{diag}(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1}, \dots, \|A_{NN}^{-1}\|_\infty^{-1})$.

Другое полезное замечание состоит в том, что если подкласс $\mathcal{K}$ класса $\mathcal{H}$ замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы, то, как легко видеть, отвечающий ему подкласс B$\mathcal{K}$ блочных $\mathcal{K}$-матриц замкнут относительно левого умножения на невырожденные блочно-диагональные матрицы соответствующих размеров.

В данной работе, используя тот же подход, что и в работе [5], мы распространяем верхние оценки для бесконечной нормы обратных, известные для некоторых подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц, на соответствующие подклассы класса B$\mathcal{H}$-матриц. Хотя используемый подход тот же самый, что и в работе [5], и основывается на том же самом результате Робера, см. теорему 3.1 ниже, предлагаемые в данной работе оценки, вообще говоря, улучшают соответствующие оценки из работы [5] для BSDD, BS-SDD, BN- и BSN- матриц, т.е. для всех подклассов, рассматриваемых в [5]. Мы достигаем улучшений двумя способами. Во-первых, точечные оценки применяются нами к другим матрицам, а, во-вторых, мы используем более точные оценки для соответствующих подклассов класса точечных $\mathcal{H}$-матриц. Оценка Вараха для матриц из подкласса блочных SDD-матриц [14] улучшается сразу несколькими способами: явно, за счет перехода к классу BSDD, а также и неявно, посредством указания на возможность применения оценок, установленных для более широких классов – BS-SDD, BN-, BSN- и BQN-матриц, которые содержат класс BSDD матриц в качестве подкласса. Также мы улучшаем оценку для блочных P$\mathcal{H}$-матриц, установленную в работе [13], опять же за счет перехода к более широкому классу BP$\mathcal{H}$. Наконец, для BQN-матриц устанавливается новая оценка.

Работа построена следующим образом. Для удобства читателей в §2 мы напоминаем все оценки для бесконечной нормы обратных к матрицам из разных подклассов точечных $\mathcal{H}$-матриц, на которых базируются соответствующие блочные оценки. Автору неизвестны какие-либо оценки для других подклассов класса $\mathcal{H}$-матриц, но если такие оценки имеются, то их можно перенести на соответствующие блочные $\mathcal{H}$-матрицы абсолютно тем же способом. В §3 мы напоминаем базовый результат Робера и приводим новые оценки норм обратных для матриц из перечисленных выше подклассов класса блочных $\mathcal{H}$-матриц; также мы проводим сравнение полученных результатов с установленными ранее.

§2. Верхние оценки для обратных к некоторым $\mathcal{H}$-матрицам

Для начала напомним классический результат Вараха.

Теорема 2.1 ([14]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SDD *матрица порядка* $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}| - r_i(A)\}}. \tag{2.1}$$

Для S-SDD матриц мы будем использовать следующую верхнюю оценку, установленную в работе [11] и доказанную другим способом в работе [1]. Заметим также, что оценка теоремы 2.2 является частным случаем оценки (2.9) теоремы 2.6, отвечающим $m = 2 : \langle n\rangle = S \cup \bar{S}$ (см. [10]).

Теорема 2.2. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – S-SDD *матрица, где* S – *некоторое непустое собственное подмножество множества индексов* $\langle n\rangle$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar{S}} \max\left\{\rho_{ij}^S(A),\ \rho_{ji}^{\bar{S}}(A)\right\}, \tag{2.2}$$

где

$$\rho_{ij}^S(A) = \frac{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{(|a_{ii}| - r_i^S(A))(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) - r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A)},$$
$$i \in S, \quad j \in \bar{S}, \tag{2.3}$$

а $r_i^S(A)$ *определены в* (1.2).

В следующей теореме приводится верхняя оценка в норме l_∞ обратной к матрице Некрасова, улучшающая более ранние оценки, предложенные в статье [4]. Отметим, что для SDD матрицы A оценка (2.4) заведомо не хуже, чем классическая оценка Вараха (2.1).

Теорема 2.3 ([2]). *Пусть* $A = (a_{ij}) = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – *матрица Некрасова порядка* $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)}, \tag{2.4}$$

где вектор $z(A) = (z_i(A))$ *определяется с помощью соотношения*

$$z(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1} e, \tag{2.5}$$

а вектор $h(A) = (h_i(A))$ *определен в* (1.6) *и* (1.7).

Как было показано в работе [3], оценка следующей теоремы, вообще говоря, улучшает две верхние оценки нормы обратной к SN-матрице, предложенные в статье [6], а также для матриц Некрасова она улучшает оценку теоремы 2.3.

Теорема 2.4 ([3]). *Пусть S – непустое собственное подмножество множества $\langle n\rangle$, $n \geqslant 2$, и пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – SN-матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in \bar S} \max\left\{\xi_{ij}^S(A),\ \xi_{ji}^{\bar S}(A)\right\}, \tag{2.6}$$

где

$$\xi_{ij}^S(A) = \frac{z_j(A)\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right] + z_i(A)h_j^S(A)}{\left[|a_{ii}| - h_i^S(A)\right]\left[|a_{jj}| - h_j^{\bar S}(A)\right] - h_i^{\bar S}(A)h_j^S(A)}, \qquad i\in S, \quad j \in \bar S, \tag{2.7}$$

а векторы $z(A)$ и $h^S(A) = (h_i^S(A))$ определены в (2.5) *и* (1.12).

Теперь мы приведем верхнюю оценку для нормы l_∞ обратной к QN-матрице. Так же как и оценка (2.6), она улучшает оценку теоремы 2.3 для некрасовской матрицы A, см. [3].

Теорема 2.5 ([3]). *Пусть $A = D + L + U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – QN-матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \frac{\{[P(A)]^{-1}e\}_i}{\{[P(A)]^{-1}\mathfrak{M}(A)e\}_i}, \tag{2.8}$$

где матрица $P(A)$ определена в (1.14).

Наконец, приведем известную верхнюю оценку для нормы l_∞ обратной к P$\mathcal{H}$-матрице.

Теорема 2.6 ([10]). *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – P$\mathcal{H}$-матрица относительно некоторого разбиения $\langle n\rangle = \bigcup_{i=1}^m M_i$, $1 \leqslant m \leqslant n$, множества индексов на m непересекающихся непустых подмножеств. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{\left\|\left[\mathfrak{M}(A)^{(i_1,\dots,i_m)}\right]^{-1}\right\|_\infty\right\}, \tag{2.9}$$

где максимум берется по всем $i_k \in M_k$, $k = 1,\dots,m$.

§3. Верхние оценки обратных к блочным $\mathcal{H}$-матрицам

Следуя работе [12], для заданной блочной матрицы $B = (B_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ определим неотрицательную матрицу порядка N по формуле

$$M(B) \equiv \begin{bmatrix} \|B_{11}\|_\infty & \dots & \|B_{1N}\|_\infty \\ \dots & \dots & \dots \\ \|B_{N1}\|_\infty & \dots & \|B_{NN}\|_\infty \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Очевидно, что

$$\|B\|_\infty \leqslant \|M(B)\|_\infty. \tag{3.2}$$

Следующая теорема является базисным результатом, на котором основывается перенос точечных оценок на случай блочных матриц.

Теорема 3.1 ([12]). *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, – блочная $\mathcal{H}$-матрица. Тогда она невырождена, причем*

$$M(A^{-1}) \leqslant [N(A)]^{-1}, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{M}$-матрица $N(A)$ определена в соответствии с (1.21)–(1.22).

Ввиду неравенства (3.2), из теоремы 3.1 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *Если A – B$\mathcal{H}$-матрица, то*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[N(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) – это главный инструмент, позволяющий получать верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для блочной $\mathcal{H}$-матрицы A, если известна верхняя оценка для $\|[N(A)]^{-1}\|_\infty$.

В частности, комбинируя следствие 3.1 с теоремами 2.1–2.6, мы немедленно получаем следующие оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для матриц A из рассматриваемых подклассов класса B$\mathcal{H}$-матриц.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$,* – BSDD *матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min_{i\in\langle n\rangle}\{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}(1-\sum\limits_{j\neq i}\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty)\}}. \tag{3.5}$$

Ясно, что оценка (3.5), вообще говоря, улучшает оценку теоремы 6 работы [5]. Улучшение достигается благодаря применению точечной оценки нормы обратной непосредственно к матрице $N(A)$, тогда как в работе [5] точечные оценки применяются к матрице $R(A)$, что равносильно использованию неравенства

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty\}\cdot\|[R(A)]^{-1}\|_\infty \tag{3.6}$$

вместо (3.4). Понятно, что оценка (3.6), вообще говоря, менее точна, чем оценка (3.4), используемая в настоящей работе.

Теорема 3.3. *Пусть* $A=(A_{ij})_{i,j=1}^N\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant N\leqslant n$, – BS-SDD *матрица, где* S – *непустое подмножество множества* $\langle N\rangle$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S}\max\left\{\rho_{ij}^S(N(A)),\ \rho_{ji}^{\bar S}(N(A))\right\}, \tag{3.7}$$

где

$$\rho_{ij}^S(N(A))=\frac{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}-r_i^S(N(A))+r_j^S(N(A))}{\left[\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}-r_i^S(N(A))\right]\left[\|A_{jj}^{-1}\|_\infty^{-1}-r_j^{\bar S}(N(A))\right]-r_i^{\bar S}(N(A))r_j^S(N(A))},$$

$$i\in S,\quad j\in\bar S. \tag{3.8}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $A=(A_{ij})_{i,j=1}^N\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant N\leqslant n$, – BN-*матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\frac{z_i(N(A))}{\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}-h_i(N(A))}. \tag{3.9}$$

Теорема 3.5. *Пусть* $A=(A_{ij})_{i,j=1}^N\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $1\leqslant N\leqslant n$, – BSN-*матрица, где* S – *непустое подмножество множества* $\langle N\rangle$. *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i\in S,\, j\in\bar S}\max\left\{\xi_{ij}^S(N(A)),\ \xi_{ji}^{\bar S}(N(A))\right\}, \tag{3.10}$$

где

$$\xi_{ij}^S(N(A))=\frac{z_j(N(A))\left[\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}-h_i^S(N(A))\right]+z_i(N(A))h_j^S(N(A))}{\left[\|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}-h_i^S(N(A))\right]\left[\|A_{jj}^{-1}\|_\infty^{-1}-h_j^{\bar S}(N(A))\right]-h_i^{\bar S}(N(A))h_j^S(N(A))},$$

$$i\in S,\quad j\in\bar S. \tag{3.11}$$

Аналогично теореме 3.2, теоремы 3.3–3.5 улучшают соответственно теоремы 8, 10 и 12 работы [5], что связано с использованием неравенства (3.4), а не (3.6). С другой стороны, полученные оценки (3.7), (3.9) и (3.10) улучшают соответствующие результаты работы [5] также и потому, что мы применяем более точные оценки норм обратных для случая точечных S-SDD, некрасовских и S-некрасовских матриц, см. [3].

Теорема 3.6. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, *–* BQN-*матрица. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} \frac{\{[P(N(A))]^{-1}e\}_i}{\{[P(N(A))]^{-1}N(A)e\}_i}, \tag{3.12}$$

где матрица P *определена в* (1.14).

Теорема 3.7. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant N \leqslant n$, *–* BP$\mathcal{H}$-*матрица, т.е.* $N(A)$ *–* P$\mathcal{M}$-*матрица относительно некоторого разбиения* $\langle N\rangle = \bigcup_{i=1}^m M_i$, $1 \leqslant m \leqslant N$, *множества индексов на* m *непустых непересекающихся подмножеств. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1,\dots,i_m} \left\{ \left\| \left[N(A)^{(i_1,\dots,i_m)} \right]^{-1} \right\|_\infty \right\}, \tag{3.13}$$

где максимум берется по всем $i_k \in M_k$, $k = 1, \dots, m$.

Дальнейшее сравнение представленных в этой работе оценок с более ранними оценками основано на сравнительных результатах Робера [12], которые мы напоминаем ниже. Определим Z-матрицу

$$\widetilde{N}(A) \equiv \begin{bmatrix} \|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1} & -\|A_{12}\|_\infty & \dots & -\|A_{1N}\|_\infty \\ -\|A_{21}\|_\infty & \|A_{22}^{-1}\|_\infty^{-1} & \dots & -\|A_{2N}\|_\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{N1}\|_\infty & -\|A_{N2}\|_\infty & \dots & \|A_{NN}^{-1}\|_\infty^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Матрица (3.14) была введена в работе [9], и ее часто называют блочной матрицей сравнения для A. Как легко видеть,

$$\widetilde{N}(A) \leqslant N(A), \tag{3.15}$$

так что если $\widetilde{N}(A)$ – $\mathcal{M}$-матрица, то $N(A)$ и подавно является $\mathcal{M}$-матрицей.

Известно [9] (а также легко следует из (3.15) и теоремы 3.1), что если $\widetilde{N}(A)$ является $\mathcal{M}$-матрицей, то матрица A невырождена. Будем называть такие матрицы A $\tilde{\text{B}}\mathcal{H}$-матрицами. Из неравенства (3.15) немедленно вытекает, что

$$\widetilde{B}\mathcal{H} \subset \text{B}\mathcal{H}, \tag{3.16}$$

и если A принадлежит некоторому подклассу класса $\tilde{\text{B}}\mathcal{H}$-матриц, то она тем более принадлежит и соответствующему подклассу класса B$\mathcal{H}$-matrices. Кроме того, если $A \in \tilde{\text{B}}\mathcal{H}$, то

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|[N(A)]^{-1}\|_\infty \leqslant \|[\widetilde{N}(A)]^{-1}\|_\infty. \tag{3.17}$$

Таким образом, не только класс B$\mathcal{H}$-матриц содержит класс $\tilde{\mathrm{B}}\mathcal{H}$-матриц в качестве подкласса, а подклассы класса B$\mathcal{H}$-матриц содержат соответствующие подклассы класса $\tilde{\mathrm{B}}\mathcal{H}$-матриц, но и верхние оценки бесконечной нормы A^{-1} через оценки для $N(A)$, вообще говоря, точнее, чем те же оценки через $\widetilde{N}(A)$. Следовательно, если мы применим одну и ту же оценку (например, оценку (2.1) для случая SDD матриц) к $N(A)$ и к $\widetilde{N}(A)$, то результат, вообще говоря, будет точнее в случае $N(A)$.

Заметим, что блочные SDD матрицы, определенные в работе [14], а также и блочные P$\mathcal{H}$-матрицы, определенные в работе [13], в терминологии данной статьи являются соответственно $\tilde{\mathrm{B}}$SDD и $\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{P}\mathcal{H}$-матрицами.

Ввиду вышесказанного мы приходим к заключению, что оценки теорем 3.2 и 3.7 применимы к более широким классам матриц и соответственно улучшают оценки работ [14] и [13]. То же можно сказать и об оценках теорем 3.3–3.5 в сравнении с оценками теорем 7, 9 и 11 работы [5].

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки определителей и обратных для некоторых H-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 81–102.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
4. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
5. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of* block *matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
6. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
7. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
8. L. Cvetković, V. Kostić, R. Varga, *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area.* — ETNA **18** (2004), 73–80.
9. D. G. Feingold, R. S. Varga, *Block diagonally dominant matrices and generalization of the Gerschgorin circle theorem.* — Pacific J. Math. **12** (1962), 1241–1249.
10. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
11. N. Morača, *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and S−SDD matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **206** (2007), 666–678.

12. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative classiques par blocs.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
13. E. Šanca, V. Kostić, *Diagonal scaling of a special type and its benefits.* — Proc. Appl. Math. Mech. **13** (2013), 409–410.
14. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.
15. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Bounds on the l_∞ norm of inverses for certain block matrices.

The paper suggests upper bounds for the l_∞ norm of the inverses to block matrices belonging to certain subclasses of the class of block $\mathcal{H}$-matrices, which improve and supplement known results.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 29 октября 2015 г.