Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Л. Ю. Колотилина

НОВЫЕ УСЛОВИЯ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1. В работе [9] для матриц с постоянной главной диагональю А. Мелманом были предложены новые условия невырожденности и отвечающие им области локализации собственных значений, являющиеся объединениями специфических овалов Кассини. Подобное исследование мотивируется, по крайней мере, двумя причинами. Во-первых, для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющей условию

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = \xi, \tag{1}$$

два классических множества локализации ее собственных значений, а именно, простейшее множество Гершгорина ([4]; см. также, напр., [11, Theorem 1.1])

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}| \leqslant r_i'(A)\}, \tag{2}$$

состоящее из кругов с центрами в диагональных элементах матрицы, и множество Островского–Брауэра ([10, 2]; см. также, напр., [11, Theorem 2.2])

$$\Delta(A) = \bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - a_{ii}|\, |z - a_{jj}| \leqslant r_i'(A)\, r_j'(A)\right\}, \tag{3}$$

состоящее из овалов Кассини с фокусами в диагональных элементах, оба вырождаются до единственных кругов

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - \xi| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i'(A)\} \tag{4}$$

и

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - \xi| \leqslant \max_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \{r_i'(A)\, r_j'(A)\}^{1/2}\right\} \tag{5}$$

Ключевые слова: достаточные условия невырожденности; области, содержащие собственные значения; круги Гершгорина; овалы Кассини; строгое диагональное преобладание; теорема Островского; теорема Островского–Брауэра.

соответственно.

Здесь и далее мы используем следующие обозначения:

$$r_i'(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad r_i(A) = r_i'(A) + |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. $r_i(A)$ и $r_i'(A)$ – это i-ые полные и усеченные абсолютные строчные суммы матрицы A; $r'(A) = (r_i'(A))$ и $r(A) = (r_i(A))$ – соответствующие векторы; $c_i'(A) = r_i'(A^T)$, $i = 1, \dots, n$, – усеченные абсолютные столбцовые суммы A, и $c'(A) = (c_i'(A))$ - вектор из этих сумм;

$$\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

– спектр собственных значений матрицы A.

Другая причина для рассмотрения матриц с постоянной главной диагональю состоит в том, что этот матричный класс содержит теплицевы матрицы. Соответственно, полученные в работе [9] общие результаты были адаптированы для случая теплицевых матриц, для которых вычисления существенно удешевляются.

В работе [9] были установлены следующие два общих результата, эквивалентных друг другу.

Теорема 1. *Если матрица* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условию* (1), *то*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \Omega(A) \equiv \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \left| (z-\xi)^2 - (B^2)_{ii} \right| \leqslant r_i'(B^2) \right\}, \qquad (6)$$

где мы используем обозначение

$$A = \xi I_n - B; \qquad (7)$$

кроме того, имеет место включение

$$\Omega(A) \subseteq \Delta(A).$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *выполнены неравенства*

$$|\xi^2 - (B^2)_{ii}| > r_i'(B^2), \quad i = 1, \dots, n, \qquad (8)$$

то матрица A *невырождена; кроме того, достаточные условия невырожденности* (8) *являются более слабыми, чем условия невырожденности Островского–Брауэра*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i'(A)\, r_j'(A), \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \qquad (9)$$

(отвечающие множеству локализации собственных значений $\Delta(A)$), которые в предположении (1) *сводятся к единственному неравенству*

$$|\xi|^2 > \max_{i \neq j} \{r'_i(A)\, r'_j(A)\}. \tag{10}$$

Как было отмечено в работе [9], теоремы 1 и 2 “могут быть адаптированы к тому случаю, когда диагональные элементы не являются постоянными, но кластеризованы вблизи некоторого значения, если только их кластеризация является достаточно тесной в сравнении с величиной внедиагональных элементов матрицы.”

В настоящей работе предложены некоторые обобщения теорем 1 и 2 на произвольные матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, а также на матрицы с ненулевыми диагональными элементами. Вообще говоря, никакой кластеризации диагональных элементов матрицы мы не предполагаем. Тем не менее, в работе предложены и такие общие условия невырожденности и соответствующие им множества локализации собственных значений, которые особенно подходят для матриц, имеющих близкие элементы на главной диагонали.

Работа построена следующим образом. В следующем разделе мы обобщаем теоремы 1 и 2 на произвольные матрицы и, в частности, приводим обобщения, особенно подходящие для матриц с кластеризованными диагональными элементами. В разделе 3 предложена серия обобщений теоремы 2 на матрицы с ненулевыми диагональными элементами; показано что полученные условия невырожденности являются более слабыми, чем известные условия так называемого диагонального преобладания порядка k, $k \geqslant 0$, предложенные в работе [1]. Обобщения, установленные в разделах 2 и 3, основаны на том, что на некоторые вспомогательные матрицы, из невырожденности которых следует невырожденность исходной матрицы, накладываются условия строгого диагонального преобладания. В разделе 4 новые достаточные условия невырожденности, а также и области локализации собственных значений получаются при помощи иных известных условий невырожденности, более сложных, чем условие строгого диагонального преобладания, которые применяются к вспомогательным матрицам, рассматриваемым в разделах 2 и 3. В разделе 5 представлены заключительные замечания.

2. Прежде всего, мы покажем, что для матрицы A с постоянной главной диагональю условия невырожденности Мелмана (8) в действительности являются более слабыми, чем не только классические условия Островского–Брауэра (9), но и их ослабленный вариант (см. неравенства (11) ниже), который учитывает структуру разреженности матрицы A. Соответственно, множество локализации собственных значений Мелмана $\Omega(A)$ содержится в подмножестве $\Delta'(A)$ (см. (17)) множества Островского–Брауэра $\Delta(A)$. Для доказательства этого факта нам понадобятся следующие определение и теорема [1], см. также [5].

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, называется *квазинеприводимой*, если все ее диагональные элементы, которые являются неприводимыми компонентами порядка 1, отличны от нуля. В частности, любая матрица, все диагональные элементы которой ненулевые, очевидно, является квазинеприводимой.

Теорема 3 ([1]). *Если матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, квазинеприводима и при некотором $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ удовлетворяет условиям*

$$|a_{ii}|^{\alpha}\, |a_{jj}|^{1-\alpha} > r_i'(A)^{\alpha}\, r_j'(A)^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad i \neq j \ \text{таких, что}\ a_{ij} \neq 0, \tag{11}$$

то A является невырожденной.

Теперь мы готовы показать, что для матрицы, удовлетворяющей условию (1), условия невырожденности (8) являются более слабыми, чем условия (11) с $\alpha = 1/2$, которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$|\xi|^2 > \max_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \{r_i'(A)\, r_j'(A)\}, \tag{12}$$

т.е. условия (8) следуют из условия (12).

Действительно, поскольку

$$r_i(B^2) = \{|B^2|e\}_i \leqslant \{|B|r'(A)\}_i = \sum_{j\neq i:\ a_{ij}\neq 0} |a_{ij}| r_j'(A)$$

$$\leqslant r_i'(A) \max_{j\neq i:\ a_{ij}\neq 0} \left\{r_j'(A)\right\} \leqslant \max_{j\neq i:\ a_{ij}\neq 0} \left\{r_i'(A)\, r_j'(A)\right\},$$

то из неравенства (12) вытекает, что

$$|\xi|^2 > r_i(B^2) = |(B^2)_{ii}| + r_i'(B^2), \quad i = 1, \ldots, n,$$

откуда следует, что

$$r_i'(B^2) < |\xi|^2 - |(B^2)_{ii}| \leqslant \left|\xi^2 - (B^2)_{ii}\right|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, условие (12) является более сильным, чем условия (8).

Равносильно, множество локализации собственных значений Мелмана $\Omega(A)$ содержится в круге

$$\left\{z \in \mathbb{C}: \ |z-\xi| \leqslant \max_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \left\{r'_i(A)\, r'_j(A)\right\}^{1/2}\right\}, \tag{13}$$

отвечающем условию невырожденности (12).

Замечание 1. Если условие (12) выполнено, то (см. [6]) матрица $A = \xi I_n - B$ является невырожденной H-матрицей, тогда как при более слабых условиях (8), как показывает следующий простой пример, матрица A может и не быть H-матрицей. Тем самым, условия (8) отличаются от большинства известных достаточных условий невырожденности матриц, которые в действительности обеспечивают их принадлежность к классу невырожденных H-матриц.

Пример 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{так что} \quad \xi = 0, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрица B^2 является матрицей со строгим диагональным преобладанием – sdd-матрицей, так что условия (8) выполнены. При этом, поскольку $D_A = 0$, то матрица A не может быть H-матрицей.

Пусть теперь $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – произвольная матрица. Запишем ее в виде

$$A = D_A - B, \quad \text{где} \quad D_A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Заметим, что для невырожденности A, очевидно, достаточно, чтобы матрица

$$C(A) \equiv A(D_A + B) = D_A^2 - B^2 + (D_A B - B D_A) \tag{14}$$

была невырожденной. (Отметим, что у матрицы $D_A B - B D_A$ все элементы на главной диагонали являются нулевыми.) Таким образом, любое условие, достаточное для невырожденности матрицы $C(A)$, и подавно достаточно для невырожденности A. В частности, если матрица C имеет строгое диагональное преобладание, т.е. выполнены неравенства

$$|a_{ii}^2 - (B^2)_{ii}| > r'_i(B^2 + (BD_A - D_A B)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

то A невырождена.

Ясно, что в том случае, когда $D_A = \xi I_n$, мы имеем $BD_A - D_A B = 0$, так что условия (15) сводятся к условиям невырожденности Мелмана (8).

Итак, нами установлено следующее обобщение теоремы 2 на матрицы общего вида.

Теорема 4. *Если матрица* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *удовлетворяет условиям* (15), *то она невырождена.*

Стоит также отметить, что проверка условий (15), в которых дополнительно присутствует матрица $BD_A - D_A B$, не существенно дороже, чем проверка условий (8), поскольку, в общем случае, наиболее трудоемкой частью при вычислении как (8), так и (15) является вычисление элементов матрицы B^2.

В терминах локализации собственных значений теорему 4 можно эквивалентным образом переформулировать в следующем виде.

Теорема 5. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} A &\subseteq \Omega'(A) \\ &\equiv \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |(z-a_{ii})^2 - (B^2)_{ii}| \leqslant r'_i(B^2 + BD_A - D_A B) \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Если $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, то матрица $A - \lambda I_n$ не может удовлетворять условиям (15), так что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, мы имеем

$$|(a_{ii} - \lambda)^2 - (B^2)_{ii}| \leqslant r'_i(B^2 + B(D_A - \lambda I_n) - (D_A - \lambda I_n)B).$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$r'_i(B^2 + B(D_A - \lambda I_n) - (D_A - \lambda I_n)B) = r'_i(B^2 + BD_A - D_A B). \quad \square$$

Отметим, что множество $\Omega'(A)$, так же как и множество $\Omega(A)$, является объединением овалов Кассини.

К сожалению, в общем случае включение

$$\Omega'(A) \subseteq \Delta'(A),$$

где

$$\Delta'(A) \equiv \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j:\ a_{ij}\neq 0}}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}|\, |z - a_{jj}| \leqslant r'_i(A)\, r'_j(A) \right\}, \tag{17}$$

которое, как мы видели, справедливо для матриц с постоянной главной диагональю, может не иметь места, т.е. из условий (см. (11) с $\alpha = 1/2$)

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i'(A)\, r_j'(A) \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0 \qquad (18)$$

может не следовать, что $C(A)$ является sdd-матрицей. Более того, из классических условий Островского–Брауэра (9) также не обязательно следует (15). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий простейший пример, для которого условия (9) и (18) совпадают.

Пример 2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (9) и (18), очевидно, выполнены, но при этом матрица

$$C(A) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

не имеет диагонального преобладания.

Обратно, как показывает следующий пример, из условий (15) также не следует (18). Таким образом, условия (15), вообще говоря, не сравнимы с условиями (9) и (18).

Пример 3. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$C(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

имеет строгое диагональное преобладание, но матрица A не удовлетворяет ни условиям (18), ни условиям (9).

Рассмотри модификацию предложенного выше подхода, которая также применима к произвольным матрицам, но наилучшим образом подходит для матриц с кластеризованными диагональными элементами, удовлетворяющих условиям

$$|a_{ii} - \xi| \leqslant \varepsilon, \quad i \in S, \qquad (19)$$

где $\varepsilon \geqslant 0$, а S – подмножество множества индексов $\{1, \ldots, n\}$.

Теперь вместо матрицы $C(A)$, определенной в (14), мы рассмотрим матрицу

$$C_\xi(A) \equiv (D_A - B)(\xi I_n + B) = \xi D_A - B^2 + (D_A - \xi I_n)B, \qquad (20)$$

зависящую от скалярного параметра ξ. Тогда, потребовав, чтобы матрица $C_\xi(A)$ имела строгое диагональное преобладание, мы приходим к следующим достаточным условиям невырожденности A.

Теорема 6. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $\xi \in \mathbb{C}$. Если справедливы неравенства*

$$|\xi a_{ii} - (B^2)_{ii}| > r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (21)$$

то матрица A невырождена.

Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ в (19) неравенства в (21), соответствующие $i \in S$, стремятся к соответствующим неравенствам из (8), так что теорема 6 обобщает теорему 2 на матрицы общего вида и при этом учитывает кластеризацию их диагональных элементов.

Применяя теорему 6 к матрице $A - \lambda I_n$, где $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, с заменой ξ на $\xi - \lambda$, мы получаем соответствующее обобщение теоремы 1.

Теорема 7. *Пусть $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $\xi \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \Omega_\xi''(A) \equiv \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| (z - a_{ii})\,(z - \xi) - (B^2)_{ii} \right| \leqslant r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B) \right\}. \qquad (22)$$

Доказательство. Имеем:

$$C_{\xi-\lambda}(A - \lambda I_n) = (\xi - \lambda)(D_A - \lambda I_n) + (D_A - \xi I_n)B - B^2.$$

Поскольку матрица $C_{\xi-\lambda}(A - \lambda I_n)$ вырождена, то из теоремы 6 следует, что при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется неравенство

$$\left| (\xi - \lambda)(a_{ii} - \lambda) - (B^2)_{ii} \right| \leqslant r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B).$$

Теорема доказана. □

Ясно, что множество $\Omega_\xi''(A)$ является объединением овалов Кассини с фокусами в корнях

$$z_\pm = \frac{1}{2}\left\{ a_{ii} + \xi \pm \sqrt{(a_{ii} - \xi)^2 + 4(B^2)_{ii}} \right\}$$

квадратного уравнения

$$z^2 - (a_{ii} + \xi)z + a_{ii}\xi - (B^2)_{ii} = 0.$$

Кроме того, множество $\Omega''_\xi(A)$, очевидно, содержится в следующем объединении овалов Кассини с фокусами в диагональных элементах матрицы A и точке ξ:

$$\Omega''_\xi(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} : \; |(z - a_{ii})\,(z - \xi)| \leqslant (B^2)_{ii} + r'_i(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)\right\}$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} : \; |(z - a_{ii})\,(z - \xi)| \leqslant r_i(B^2) + |a_{ii} - \xi|\; r'_i(B)\right\}.$$

Ясно, что теорему 7 можно усилить следующим образом.

Следствие 1. *Пусть* $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \Omega''(A) \equiv \bigcap_{\xi\in\mathbb{C}} \Omega''_\xi(A).$$

Следствие 1 представляет теоретический интерес. На практике же, например, в случае матриц, диагональные элементы которых кластеризованы вблизи p точек $\xi_1, \ldots, \xi_p$, $p \geqslant 1$, можно воспользоваться более слабым, но вычислимым результатом:

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{i=1}^{p} \Omega''_{\xi_i}(A).$$

3. Ниже мы представим серию альтернативных обобщений условий невырожденности Мелмана (8), но на этот раз только для матриц $A = (a_{ij}) = D_A - B$ с ненулевыми диагональными элементами:

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Для таких матриц невырожденность A, очевидно, равносильна невырожденности отмасштабированной по Якоби матрицы

$$\bar{A} \equiv D_A^{-1}A = I_n - D_A^{-1}B \equiv I_n - \bar{B}.$$

Заметим, что последняя матрица имеет постоянную главную диагональ: $D_{\bar{A}} = I_n$. Применяя теорему 2 к $\bar{A}$, мы заключаем, что если

$$|1 - (\bar{B}^2)_{ii}| > r'_i(\bar{B}^2), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

то обе матрицы A и $\bar{A}$ невырождены.

Очевидно, что при $D_A = \xi I_n$, $\xi \neq 0$, условия (24) равносильны условиям Мелмана (8).

К сожалению, в том случае, когда $D_A \neq \xi I_n$, в неравенства, описывающие множества локализации собственных значений, ассоциированные с условиями невырожденности (24), λ входит достаточно нетривиальным образом, что делает эти множества неинтересными с точки зрения практического использования.

Как легко видеть, условия (24) можно заменить на единственное, более сильное, достаточное условие

$$1 > \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(\bar{B}^2), \tag{25}$$

из которого условия (24) следуют тривиальным образом.

Условие (25), в свою очередь, можно усилить до условия

$$1 > \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(|\bar{B}|^2), \tag{26}$$

более дешевого с вычислительной точки зрения (поскольку $r(|\bar{B}|^2)$ можно вычислить посредством двукратного умножения $|\bar{B}|$ на векторы) и при этом все еще более слабого, чем ослабленные условия Островского–Брауэра (18).

Действительно,

$$r_i(|\bar{B}|^2) = (|\bar{B}|\; r(\bar{B}))_i = \sum_{j\neq i:\; a_{ij}\neq 0} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} r_j(\bar{B}) \leqslant \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} \max_{j\neq i:\; a_{ij}\neq 0} \left\{ \frac{r_j'(A)}{|a_{jj}|} \right\},$$

так что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(|\bar{B}|^2) \leqslant \max_{1\leqslant i\neq j\leqslant n:\; a_{ij}\neq 0} \frac{r_i'(A)\, r_j'(A)}{|a_{ii}|\,|a_{jj}|}.$$

Следовательно, из условий (18) следует (26), и мы имеем цепочку импликаций

$$(18) \Longrightarrow (26) \Longrightarrow (25) \Longrightarrow (24). \tag{27}$$

В следующей теореме условия (24) обобщаются на случай произвольного $k \geqslant 1$.

Теорема 8. *Если при некотором $k \geqslant 1$ матрица $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, с ненулевыми диагональными элементами удовлетворяет условиям*

$$|1 - (\bar{B}^k)_{ii}| > r_i'(\bar{B}^k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{28}$$

то она невырождена.

Доказательство. Определим матрицу

$$\bar{C}^{(k)} = \bar{A}(I_n + \bar{B} + \cdots + \bar{B}^{k-1}) = I_n - \bar{B}^k, \quad k \geqslant 1.$$

Ясно, что для невырожденности $\bar{A}$ (а также и A) достаточно, чтобы матрица $\bar{C}^{(k)}$ была бы невырожденной. Остается лишь заметить, что условия (28) в точности означают, что матрица $\bar{C}^{(k)}$ является sdd-матрицей, откуда и следует ее невырожденность. □

Заметим, что при $k = 1$ условия (28) попросту означают, что сама матрица A имеет строгое диагональное преобладание, тогда как при $k = 2$ они сводятся к условиям (24).

Для матриц с постоянной главной диагональю $D_A = \xi I_n$ из теоремы 8 вытекает следующее обобщение теоремы 2.

Следствие 2. *Если при некотором $k \geqslant 1$ матрица $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, такая что $D_A = \xi I_n$, $\xi \in \mathbb{C}$, удовлетворяет условиям*

$$|\xi^k - (B^k)_{ii}| > r'_i(B^k), \quad i = 1, \dots, n, \tag{29}$$

то она невырождена.

Доказательство. Действительно, если $\xi \neq 0$, то A невырождена в силу теоремы 8. В противном случае мы имеем $A = B$, и условия (29), означающие что $A^k = B^k$ является sdd-матрицей, гарантируют невырожденность A. □

Очевидно, условия (28) можно заменить на более сильные достаточные условия

$$1 > \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(\bar{B}^k) \tag{30}$$

и

$$1 > \max_{1\leqslant i\leqslant n} r_i(|\bar{B}|^k), \tag{31}$$

обобщающие соответственно условия (25) и (26) на случай $k \geqslant 1$.

Покажем, что условие (31) слабее, чем так называемые условия строгого диагонального преобладания порядка k, $k \geqslant 1$, с весом $\alpha = 1$ (см. [1]) для матрицы $\bar{A} = I_n - \bar{B}$:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{r'_{i_j}(A)}{|a_{i_j i_j}|} < 1 \tag{32}$$

для всех путей $(i_1, \dots, i_k)$ в ориентированном графе G_{A-D_A}, ассоциированном с матрицей $A - D_A$.

Действительно, при $k = 1$ мы имеем равенства

$$r_i(|\bar{B}|) = \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а при $k \geqslant 2$ имеем

$$r_i(|\bar{B}|^k) = (|\bar{B}| \cdot r(|\bar{B}|^{k-1}))_i = \sum_{i_2 \neq i\colon a_{ii_2} \neq 0} \frac{|a_{ii_2}|}{|a_{ii}|} r_{i_2}(|\bar{B}|^{k-1})$$

$$\leqslant \frac{r_i'(A)}{|a_{ii}|} \max_{i_2 \neq i\colon a_{ii_2} \neq 0} \left\{ r_{i_2}(|\bar{B}|^{k-1}) \right\}.$$

С помощью индукции легко убедиться, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i(|\bar{B}|^k) \leqslant \max_{i_1, \dots, i_k} \prod_{j=1}^{k} \frac{r_{i_j}'(A)}{|a_{i_j i_j}|}, \tag{33}$$

где максимум в правой части берется по всем путям $(i_1, \dots, i_k)$ в ориентированном графе G_{A-D_A}.

Ввиду (33), условие (31) следует из условий (32). Кроме того, строчные суммы $r_i(|\bar{B}|^k)$, $i = 1, \dots, n$, участвующие в (31), могут быть вычислены относительно недорого k-кратным умножением матрицы $|\bar{B}|$ на векторы.

Заметим также, что при выполнении строгих условий (32) матрица A является невырожденной H-матрицей (см. [6, Theorem 3.2]).

Таким образом, при $k \geqslant 1$ имеет место цепочка импликаций

$$(32) \Longrightarrow (31) \Longrightarrow (30) \Longrightarrow (28),$$

аналогичная (27).

4. Все условия невырожденности, представленные в разделах 2 и 3, основаны на требовании, что некоторая вспомогательная матрица, ассоциированная с заданной матрицей A, должна иметь строгое диагональное преобладание. Однако невырожденность вспомогательной матрицы можно обеспечить и при помощи других достаточных условий невырожденности, что приводит и к другим областям локализации собственных значений.

Проиллюстрируем этот подход, применяя к матрицам $C(A)$ и $C_\xi(A)$ (см. (14) и (20)) классические "смешанные" условия Островского [10] (также см., напр., [11, Theorem 1.16]), которые напоминаются ниже, и ослабленные условия Островского–Брауэра (18). Тем самым мы получаем обобщения соответствующих результатов, полученных в работах [7] и [8] для матриц с постоянной главной диагональю, на случай произвольных матриц.

Теорема 9. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Если*

$$|a_{ii}| > [r_i'(A)]^\alpha \, [c_i'(A)]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{34}$$

то A *невырождена.*

Применяя теорему 9 к матрице $C(A)$, мы немедленно приходим к следующей теореме невырожденности, обобщающей теорему 4, которая соответствует $\alpha = 1$ в (34).

Теорема 10. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Если*

$$|a_{ii}^2 - (B^2)_{ii}| > \left[r_i'(B^2 + BD_A - D_AB)\right]^\alpha \, \left[c_i'(B^2 + BD_A - D_AB\right]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{35}$$

то A *невырождена.*

Заметим, что теорема 10 обобщает теорему 2.2 работы [7] на произвольные матрицы и сводится к ней в случае матриц с постоянной главной диагональю.

Переформулировав теорему 10 на языке локализации собственных значений, мы приходим к следующему обобщению теоремы 5 данной статьи. Одновременно мы получаем и обобщение на случай произвольных матриц теоремы 2.5 работы [7], установленной для матриц с постоянной диагональю.

Теорема 11. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \bigcup_{i=1}^n \bigl\{z \in \mathbb{C} :\ |(z - a_{ii})^2 - (B^2)_{ii}| \leqslant \left[r_i'(B^2 + BD_A - D_AB)\right]^\alpha \, \left[c_i'(B^2 + BD_A - D_AB)\right]^{1-\alpha}\bigr\}. \tag{36}$$

Применяя теорему 9 к матрице $C_\xi(A)$, мы получаем следующее обобщение теоремы 6.

Теорема 12. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *и пусть* $\xi \in \mathbb{C}$. *Если*

$$|\xi a_{ii} - (B^2)_{ii}| > \left[r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)\right]^{\alpha} \, \left[c_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)\right]^{1-\alpha}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{37}$$

то A *невырождена.*

Соответствующие обобщения теоремы 7 и следствия 1 имеют следующий вид.

Теорема 13. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $\xi \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \bigcup_{i=1}^{n} \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |(z - a_{ii})(z - \xi) - (B^2)_{ii}| \leqslant [r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)]^{\alpha} \, [c_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)]^{1-\alpha} \Big\}. \tag{38}$$

Следствие 3. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{\xi\in\mathbb{C}} \bigcap_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \bigcup_{i=1}^{n} \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |(z - a_{ii})(z - \xi) - (B^2)_{ii}| \leqslant [r_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)]^{\alpha} \, [c_i'(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)]^{1-\alpha} \Big\}. \tag{39}$$

Следует отметить, что множества локализации собственных значений матрицы A, фигурирующие в теоремах 11 и 13, в определениях которых присутствует пересечение по α, представляют не только теоретический интерес, поскольку их можно определить в других терминах так, что они становятся практически вычислимыми, см. [3, 7].

Аналогичным образом, применяя условия невырожденности (18) к матрицам $C(A)$ и $C_\xi(A)$, мы приходим к следующим усилениям теорем 4–7.

Теорема 14. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Если*

$$|a_{ii}^2 - (B^2)_{ii}| \, |a_{jj}^2 - (B^2)_{jj}| > r_i'(B^2 + BD_A - D_AB) \, r_j'(B^2 + BD_A - D_AB) \quad \text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0, \tag{40}$$

то A *невырождена.*

Теорема 15. *пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *и пусть* $\xi \in \mathbb{C}$. *Если*

$$|\xi a_{ii} - (B^2)_{ii}|\, |\xi a_{jj} - (B^2)_{jj}| > r'_i(B^2 - (a_{ii} - \xi)B))\, r'_j(B^2 - (a_{jj} - \xi)B)$$
$$\text{для всех} \quad i \neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij} \neq 0, \tag{41}$$

то A *невырождена.*

На языке локализации собственных значений теоремы 14 и 15 формулируются следующим образом.

Теорема 16. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \big\{z \in \mathbb{C}:\ |(z - a_{ii})^2 - (B^2)_{ii}|\, |(z - a_{jj})^2 - (B^2)_{jj}| \leqslant r'_i(B^2 + BD_A - D_AB)\, r'_j(B^2 + BD_A - D_AB)\big\}. \tag{42}$$

Теорема 17. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $\xi \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcup_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \big\{z \in \mathbb{C}:\ |(z - a_{ii})(z - \xi) - (B^2)_{ii}|\, |(z - a_{jj})(z - \xi) - (B^2)_{jj}| \leqslant r'_i(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)\, r'_j(B^2 - (a_{jj} - \xi)B)\big\}. \tag{43}$$

Следствие 4. *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$\operatorname{Spec} A \subseteq \bigcap_{\xi\in\mathbb{C}} \bigcup_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0} \Big\{z \in \mathbb{C}:\ |(z - a_{ii})(z - \xi) - (B^2)_{ii}|\, |(z - a_{jj})(z - \xi) - (B^2)_{jj}| \leqslant r'_i(B^2 - (a_{ii} - \xi)B)\, r'_j(B^2 - (a_{jj} - \xi)B)\Big\}. \tag{44}$$

Заметим, что в случае матриц с постоянной главной диагональю теоремы 14,15 и 16, 17 улучшают (за счет учета структуры разреженности матриц) лемму 2.1 и теорему 2.2 работы [8].

Формулировку условий невырожденности, получающихся в результате применения теоремы 9 и условий (18) к матрицам $\bar{C}^{(k)} = I_n - \bar{B}^k$, $k \geqslant 1$, мы оставляем читателю.

5. В статье предложен общий подход, позволяющий получать условия невырожденности и множества локализации собственных значений для заданной матрицы A. Этот подход основан на применении известных условий невырожденности (в частности, простейшего условия строгого диагонального преобладания) к некоторым вспомогательным матрицам, из невырожденности которых следует невырожденность A. С его помощью получен ряд новых достаточных условий невырожденности и им соответствующих множеств локализации собственных значений.

Представленные результаты обобщают, а также и улучшают недавние результаты о невырожденности и локализации собственных значений для матриц с постоянной главной диагональю, установленные в работах [9, 7, 8], на случай произвольных матриц и матриц с ненулевыми элементами на главной диагонали.

Ясно, что разработанный подход может быть использован и в сочетании с другими известными достаточными условиями невырожденности для получения новых условий невырожденности и областей локализации собственных значений матриц.

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Проблема вырожденности/невырожденности для матриц, удовлетворяющих условиям диагонального преобладания, формулируемым в терминах ориентированных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 40–83.
2. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix: II*, Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
3. L. Cvetković, V. Kostić, R. Bru, F. Pedroche, *A simple generalization of Geršgorin's theorem.* — Adv. Comput. Math. **35** (2011), 271–280.
4. S. Geršgorin (S. Gerschgorin), *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Изв. акад. наук СССР, Сер. VII No. 6 (1931), 749–754.
5. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
6. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the Perron root, singularity/nonsingularity conditions, and eigenvalue inclusion sets.* — Numer. Algor. **42** (2006), 247–280.
7. C. Q. Li, Y. T. Li, *New regions including eigenvalues of Toeplitz matrices.* — Linear Multilinear Algebra **62** (2014), 229–241.
8. C. Q. Li, W. Q. Zhang, Y. T. Li, *A new eigenvalue inclusion set for matrices with a constant main diagonal.* — To appear in JIA (2015).
9. A. Melman, *Ovals of Cassini for Toeplitz matrices.* — Linear Multilinear Algebra **60** (2012), 189–199.

10. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
11. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. New nonsingularity conditions for general matrices and the associated eigenvalue inclusion sets.

The paper suggests generalizations of some known sufficient nonsingularity conditions for matrices with constant principal diagonal and the corresponding eigenvalue inclusion sets to the cases of arbitrary matrices and matrices with nonzero diagonal entries.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 13 октября 2015 г.