Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Х. Д. Икрамов

ВЫДЕЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ЧАСТИ СИНГУЛЯРНОГО МАТРИЧНОГО ПУЧКА КАК РАЦИОНАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

1. Пусть A и B – матрицы размера $m \times n$, элементами которых являются рациональные числа или числа из $\mathbf{Q}[i]$ (поля рациональных гауссовых чисел). Предположим, что определяемый этими матрицами пучок

$$A + \lambda B \tag{1}$$

сингулярен. В общем случае приведение такого пучка к канонической форме Кронекера невозможно осуществить, если допускается только использование арифметических операций и извлечение корней натуральной степени. Причина в том, что построение формы Кронекера предполагает предварительное вычисление собственных значений пучка (1). В то же время в процессе приведения к канонической форме есть этап, который можно выполнить посредством конечного числа арифметических операций, даже не привлекая радикалов. Вычислительный алгоритм с этими свойствами, – конечность и использование только арифметических операций, – будем называть *рациональным*.

Цель настоящего сообщения – показать, что выделение из пучка (1) его регулярной части (говорят также *регулярного ядра*) достигается рациональным алгоритмом. Мы сделаем это, проанализировав обоснование формы Кронекера и критерия строгой эквивалентности двух матричных пучков, приведенное в книге Ф. Р. Гантмахера (см. [1, гл. XII, §§ 3–5]).

2. Выделение из пучка (1) его регулярной части состоит из ряда однотипных шагов. Поэтому достаточно показать, что такой шаг можно проделать, используя рациональные вычисления.

Ключевые слова: сингулярный матричный пучок, регулярная часть, строгая эквивалентность, рациональный алгоритм.

Присмотримся к первому шагу приведения (к форме Кронекера), как он описан в теореме 4 из 12-й главы книги Гантмахера. Для определенности предположим, что ранг r пучка (1) удовлетворяет неравенству $r < n$. (Поскольку пучок $A + \lambda B$ сингулярен, хотя бы одно из неравенств $r < n$ или $r < m$ должно выполняться.)

Шаг начинается с вычисления минимального (столбцевого) индекса ε и соответствующего полиномиального решения

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \cdots + (-1)^\varepsilon \lambda^\varepsilon x_\varepsilon \quad (x_\varepsilon \neq 0) \tag{2}$$

уравнения

$$(A + \lambda B)x = 0. \tag{3}$$

С этой целью строится последовательность матриц

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & B & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad \cdots \tag{4}$$

до тех пор, пока члены M_k этой последовательности сохраняют полный столбцевой ранг $(k+1)n$. Индекс ε определяется условием, что M_ε – первая матрица последовательности (4), для которой

$$\operatorname{rank} M_\varepsilon < (\varepsilon + 1)n. \tag{5}$$

Ранги матриц M_k определяются стандартным способом, а именно приведением к треугольному виду посредством элементарных преобразований строк.

Пусть индекс ε уже известен. Чтобы найти полиномиальный вектор $x(\lambda)$ (см. (2)), вычисляется нетривиальное решение однородной системы линейных уравнений

$$M_\varepsilon X = 0. \tag{6}$$

Вектор X размерности $(\varepsilon+1)n$ интерпретируется как результат вытягивания в длинный столбец постоянных векторных компонент $x_0, x_1, \ldots, x_\varepsilon$ представления (2). Тем самым последние n элементов в X образуют ненулевой вектор. Заметим, что матрицу M_ε в системе (6) можно заменить вычисленной ранее треугольной (точнее, трапецеидальной) матрицей, после чего вектор X определяется обратной подстановкой.

3. Как уже было отмечено, вектор x_ε ненулевой. Однако о системе

$$x_0, x_1, \ldots, x_\varepsilon \tag{7}$$

можно сказать большее, а именно: она линейно независима. Кроме того, линейно независима система

$$Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_\varepsilon. \tag{8}$$

Оба этих факта установлены в первой части доказательства теоремы XII.4 в книге Гантмахера.

Обозначим через P_ε матрицу размера $n \times (\varepsilon + 1)$, составленную по столбцам из векторов (7). Припишем к ней справа еще $n-(\varepsilon+1)$ столбцов так, чтобы получить невырожденную матрицу P. Эти недостающие столбцы определяются путем стандартной процедуры, штудируемой на семинарах 1-го курса по линейной алгебре. В геометрических терминах эта процедура есть достройка линейно независимой системы векторов до базиса n-мерного пространства, а в вычислительном отношении она сводится к конечной последовательности элементарных преобразований столбцов (расширенной) матрицы P_ε.

Аналогичные построения проведем для системы (8), т.е. из векторов $Ax_1, \ldots, Ax_\varepsilon$ составим по столбцам матрицу Q_ε размера $m \times \varepsilon$ и, если $\varepsilon < m$, припишем к ней справа $m - \varepsilon$ столбцов с тем, чтобы получить невырожденную $m \times m$-матрицу Q.

Имея матрицы P и Q, выполним эквивалентное (или *строго эквивалентное* в терминологии Гантмахера) преобразование пучка (1):

$$A + \lambda B \to \widetilde{A}_1 + \lambda \widetilde{B}_1,$$

где

$$\widetilde{A}_1 = Q^{-1}AP, \qquad \widetilde{B}_1 = Q^{-1}BP.$$

Это преобразование сводится к рациональным процедурам обращения матрицы Q и перемножения матриц. Вычисление нового пучка упрощается тем, что первые его $\varepsilon + 1$ столбцов заранее известны. Эти столбцы образуют λ-матрицу вида

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $\varepsilon \times (\varepsilon + 1)$. Сам же пучок $\widetilde{A}_1 + \lambda\widetilde{B}_1$ выглядит так:

$$\widetilde{A}_1 + \lambda\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \widehat{A}_1 + \lambda\widehat{B}_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $D, F, \widehat{A}_1$ и $\widehat{B}_1$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, и минимальный (столбцевой) индекс пучка $\widehat{A}_1 + \lambda\widehat{B}_1$ не меньше числа ε.

4. Чтобы закончить рассматриваемый шаг кронекеровского процесса, нужно показать, что внедиагональный пучок $D + \lambda F$ можно аннулировать, выполнив дополнительное преобразование эквивалентности

$$\widetilde{A}_1 + \lambda\widetilde{B}_1 \to A_1 + \lambda B_1 \tag{10}$$

и не изменив при этом диагонального пучка L_ε. Это приведет к превращению пучка $A_1 + \lambda B_1$ в прямую сумму вида

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \breve{A}_1 + \lambda\breve{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Если пучок $\breve{A}_1 + \lambda\breve{B}_1$ регулярен, то он и является регулярной частью исходного пучка $A + \lambda B$. В этом случае процесс закончен. Если же $\breve{A}_1 + \lambda\breve{B}_1$ – все еще сингулярный пучок, то дальнейшие шаги проводятся с этим пучком по описанному выше образцу. Размеры его меньше размеров m и n исходного пучка.

Возвращаясь к преобразованию (10), запишем соотношения эквивалентности между пучками:

$$A_1 = S\widetilde{A}_1 R, \qquad B_1 = S\widetilde{B}_1 R.$$

Невырожденные матрицы R и S будем искать в виде

$$R = \begin{pmatrix} I_{\varepsilon+1} & -X \\ 0 & I_{n-\varepsilon-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} I_\varepsilon & Y \\ 0 & I_{m-\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Учитывая формулу (9), получим пучок

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} L_\varepsilon & D + \lambda F + Y(\widehat{A}_1 + \lambda\widehat{B}_1) - L_\varepsilon X \\ 0 & \widehat{A}_1 + \lambda\widehat{B}_1 \end{pmatrix}.$$

Заключительная часть доказательства теоремы XII.4 в книге Гантмахера – это обоснование разрешимости матричного уравнения

$$L_\varepsilon X - Y(\widehat{A}_1 + \lambda\widehat{B}_1) = D + \lambda F. \tag{11}$$

Зная, что матрицы X и Y существуют, мы можем найти их, рассматривая (11) как систему линейных уравнений относительно элементов обеих матриц и решая эту систему методом Гаусса.

5. Мы проследили за составляющими процедуры, приводящей к выделению из сингулярного пучка блока вида L_ε и уменьшению размеров остающегося сингулярного пучка. Оказалось, что все эти составляющие могут быть реализованы рациональными вычислениями. Если бы вместо неравенства $r < n$ мы рассматривали случай $r < m$, то аналогичные действия со строками пучка привели бы к выделению на его диагонали блока вида L_σ^T. Конечное число шагов того и другого типа приводит к регулярному пучку. Следовательно, выделение регулярной части исходного сингулярного пучка может быть осуществлено посредством рационального алгоритма.

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука, 1966.

Ikramov Kh. D. Isolation of the regular part of a singular matrix pencil as a rational algorithm.

A finite computational algorithm using only arithmetic operations is said to be rational. It is shown that the isolation of the regular part of a singular matrix pencil can be achieved through a rational algorithm.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 9 октября 2015 г.