Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Х. Д. Икрамов

О НЕЙТРАЛЬНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ

1. Рассмотрим квадратичное матричное уравнение

$$X^T DX + AX + X^T B + C = 0, \tag{1}$$

в котором коэффициенты A, B, C, D и искомое решение X суть $n \times n$-матрицы. Сопоставим этому уравнению $2n \times 2n$-матрицу

$$M = \begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Предположим, что уравнение (1) совместно, и пусть X_0 – некоторое его решение:

$$X_0^T DX_0 + AX_0 + X_0^T B + C = 0. \tag{3}$$

Положим

$$Z_0 = \begin{pmatrix} I_n \\ X_0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда (3) можно переписать в виде

$$Z_0^T M Z_0 = 0. \tag{5}$$

Будем рассматривать $\mathbf{C}^{2n}$ как комплексное евклидово пространство, т.е. определим скалярное произведение векторов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n})$$

как

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{2n} y_{2n}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ подпространство в $\mathbf{C}^{2n}$, для которого Z_0 является базисной матрицей. Из равенства (5) вытекает, что

$$(Mx, y) = 0 \tag{6}$$

для любых векторов $x, y \in \mathcal{L}_0$. Будем называть подпространство с таким свойством *нейтральным* подпространством матрицы M. Таким образом, разрешимость уравнения (1) влечет за собой наличие n-мерного нейтрального подпространства у ассоциированной с этим

Ключевые слова: квадратичное матричное уравнение, нейтральное подпространство, конгруэнции, жорданова форма, коквадрат.

уравнением матрицы (2). Соответственно наличие нескольких решений означает существование у M различных n-мерных нейтральных подпространств. Напротив, отсутствие таких подпространств указывает на неразрешимость уравнения (1).

Пусть, наоборот, $\mathcal{L}$ – нейтральное подпространство размерности n матрицы M, а

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

– его базисная матрица, разбитая на $n \times n$-блоки Z_1 и Z_2. Если блок Z_1 невырожден, то матрицу Z можно заменить другой базисной матрицей того же подпространства

$$W = \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad X = Z_2 Z_1^{-1}. \tag{8}$$

Нейтральность подпространства $\mathcal{L}$ означает, что

$$W^T M W = 0,$$

откуда следует: блок X есть решение уравнения (1). Итак, всякое n-мерное нейтральное подпространство $\mathcal{L}$ матрицы M дает решение исходного квадратичного уравнения при дополнительном условии невырожденности верхнего блока Z_1 в любой базисной матрице.

Если в матрице (7) невырожден блок Z_2, то таким же образом можно показать разрешимость уравнения

$$Y^T C Y + BY + Y^T A + D = 0. \tag{9}$$

Если невырожденны и Z_1, и Z_2, то порождаемые ими решения X и Y уравнений (1) и (9) являются взаимно обратными матрицами.

Описанная связь между решениями уравнения (1) и нейтральными подпространствами естественным образом приводит к вопросу: каковы те матрицы четного порядка $2n$, для которых существуют нейтральные подпространства размерности n? Это заведомо не все матрицы, как показывает простой пример

$$M = \begin{pmatrix} J_n(0) & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Здесь $J_n(0)$ – (правая) жорданова клетка с нулем на главной диагонали. Хотя матрица (10) имеет нейтральные подпространства, у нее нет таких подпространств размерности n, что согласуется с отсутствием решений у ассоциированного квадратичного уравнения

$$X^T X + J_n(0) = 0.$$

В самом деле, для любой матрицы X матрица $X^T X$ симметрична и, следовательно, не может быть равна $J_n(0)$, если $n > 1$.

На вопрос, поставленный в предыдущем абзаце, в [1] был дан положительный ответ для всего класса комплексных симметричных матриц M. Более того, ответ остается положительным для более общего класса сопряженно-нормальных матриц и даже для еще более общего класса конгруэнтно-нормальных матриц. Во всех этих случаях требуемое нейтральное подпространство может быть найдено численно устойчивым образом.

Цель настоящего сообщения – указать достаточные условия существования нейтральных подпространств половинной размерности для матриц M, вообще говоря, не принадлежащих ни к одному из указанных выше специальных матричных классов. Эти условия, формулируемые в разделе 3, опираются на описание канонической формы комплексных матриц относительно конгруэнций, данное в [2, §4.5] (см. также [3]). Краткое изложение этого вопроса читатель найдет в разделе 2.

2. Достаточные условия из раздела 3 предполагают два ограничения на матрицу M. Прежде всего, мы считаем эту матрицу *невырожденной*. Второе ограничение будет сформулировано позже.

Сама по себе вырожденность матрицы M не является препятствием для существования нейтральных подпространств. Наиболее очевидный пример – нулевая матрица, для которой всякое подпространство нейтрально. Случай $M = J_{2n}(0)$ (т.е. M – (правая) жорданова клетка с нулем на главной диагонали) менее тривиален. Здесь нейтральное подпространство размерности n – это линейная оболочка координатных векторов $e_1, e_3, \ldots, e_{2n-1}$. Тем самым нейтральным подпространством искомой размерности обладает и всякая матрица, конгруэнтная клетке $J_{2n}(0)$.

И все же в данном сообщении мы ограничимся случаем невырожденной матрицы M. Это позволит нам связать с M матрицу

$$N = M^{-T} M, \tag{11}$$

называемую в [2] коквадратом матрицы M (точнее, T-cosquare, поскольку авторы [2] различают два типа конгруэнций, а именно T-конгруэнции как матричные преобразования вида $A \to S^T AS$ и *-конгруэнции как преобразования $A \to S^* AS$; матрица S в обоих случаях невырожденна).

Предположим, что матрица M подвергается конгруэнции

$$M \to \widetilde{M} = X^T M X.$$

Тогда

$$M^{-1} \to \widetilde{M}^{-1} = X^{-1} M^{-1} X^{-T}$$

и

$$N = M^{-T} M \to \widetilde{N} = \widetilde{M}^{-T} \widetilde{M} = (X^{-1} M^{-T} X^{-T})(X^T M X) = X^{-1} N X,$$

т.е. коквадрат матрицы M претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей X. Неудивительно поэтому, что каноническая форма матрицы M относительно конгруэнций тесно связана с жордановой формой ее коквадрата.

Связь эта такова. В канонической форме невырожденной матрицы M могут присутствовать диагональные блоки только двух типов. Это, во-первых, матрицы вида

$$\Gamma_k = \left(\begin{array}{ccccccc} & & & & & & (-1)^{k+1} \\ & & & & & \cdots & (-1)^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -1 & \cdots & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & -1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \end{array} \right), \tag{12}$$

где индекс k указывает порядок матрицы, и, во-вторых, блоки четной размерности

$$H_{2k}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Здесь $J_k(\mu)$ – жорданова клетка с числом μ на главной диагонали, а μ — ненулевое число, отличное от $(-1)^{k+1}$.

Легко проверить, что коквадратом матрицы (13) является прямая сумма

$$J_k(\mu) \oplus J_k(\mu)^{-1}.$$

Второе слагаемое указанной суммы есть матрица, подобная жордановой клетке $J_k(\mu^{-1})$. Это обстоятельство дает нам важную информацию относительно спектра коквадрата N: если число μ ($\mu \notin \{1, -1\}$) есть собственное значение матрицы N, то μ^{-1} – также собственное значение, причем жорданова структура N относительно обоих чисел одинакова.

Коквадрат матрицы (12) подобен жордановой клетке $J_k((-1)^{k+1})$ (см. [2, задача 4.5.P25]). Теоретически порядок блока Γ_k в канонической форме матрицы M может быть любым натуральным числом. Если число $k = 2m + 1$ нечетно, то можно показать, что Γ_k не имеет нейтрального подпространства размерности $m + 1$. (Наличие нейтрального подпространства размерности m очевидно – это линейная оболочка первых координатных векторов $e_1, \ldots, e_m$.) Этот факт заставляет нас принять второе ограничение на матрицу M: *ее коквадрат* $N = M^{-*}M$ *не должен иметь собственных значений* 1 *и* -1.

3. При ограничениях на матрицу M, принятых в разделе 2, каноническая форма этой матрицы относительно конгруэнций есть прямая сумма только блоков вида (13). Такой блок, рассматриваемый как самостоятельная матрица порядка $2k$, имеет два очевидных нейтральных подпространства размерности k, а именно линейные оболочки первых координатных векторов $e_1, \ldots, e_k$ и последних координатных векторов $e_{k+1}, \ldots, e_{2k}$.

Предположим, что каноническая форма матрицы M есть прямая сумма

$$H_{2k_1}(\mu_1) \oplus H_{2k_2}(\mu_2) \oplus \cdots \oplus H_{2k_l}(\mu_l), \tag{14}$$

где

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n.$$

Числа $\mu_1, \ldots, \mu_l$ необязательно различны. В таком случае нейтральным подпространством матрицы (14) является, например, линейная оболочка координатных векторов $e_1, \ldots, e_{k_1}$, e_{2k_1+1}, $\ldots$, $e_{2k_1+k_2}$, $\ldots$, e_{n-2k_l+1}, $\ldots$, e_{n-k_l}. Тем самым установлено следующее утверждение.

Теорема. *Всякая невырожденная комплексная матрица M четного порядка $2n$ имеет нейтральное подпространство размерности n, если в спектре ее коквадрата $N = M^{-T}M$ нет чисел 1 и -1.*

Это утверждение является всего лишь теоремой существования. Вопрос об устойчивом построении нейтрального подпространства остается пока открытым.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *О разрешимости одного класса квадратичных матричных уравнений.* — Докл. РАН **455** (2014), 135–137.
2. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition.* — Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
3. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Canonical forms for complex matrices congruence and *congruence.* — Linear Algebra Appl. **416** (2006), 1010–1032.

Ikramov Kh. D. Neutral subspaces of complex matrices.

Consider the quadratic matrix equation $X^TDX + AX + X^TB + C = 0$, where all the matrices are square and have the same order n. With this equation, we associate a block matrix M of the double order $2n$. the solvability of the equation turns out to be related to the existence of neutral subspaces of dimension n for this matrix. Reasonably general conditions ensuring the existence of such subspaces are presented.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 28 июля 2015 г.