Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

**Ю. К. Демьянович, Д. М. Лебединский,
Н. А. Лебединская**

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ КООРДИНАТНЫХ СПЛАЙНОВ

§1. Введение

Неполиномиальные сплайны и вэйвлетные разложения широко используются (см. [1]). Известно, что неполиномиальные сплайны можно получать из аппроксимационных соотношений с помощью генерирующей вектор-функции $\varphi(t)$ с неполиномиальными компонентами (см. [2,3]). Если вронскиан этих компонент отличен от нуля, то среди множества генерируемых этой вектор-функцией пространств сплайнов заданного порядка (при фиксированной сетке) существует единственное пространство сплайнов максимальной гладкости; это пространство называется пространством B_φ-сплайнов. При рассмотрении последовательности вложенных сеток соответствующая последовательность пространств B_φ-сплайнов образует вложенную цепочку пространств, для которой получены вэйвлетные разложения (см. [3]). Известные ранее представления координатных B_φ-сплайнов весьма сложны, что затрудняло их исследование. В работе [4] найдены более простые представления координатных B_φ-сплайнов второго порядка, использующие некоторое расширение вронскиана компонент генерирующей функции.

В данной работе получены двусторонние оценки непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов второго порядка и найдены достаточные условия их неотрицательности. Полученные оценки точны в том смысле, что они переходят в равенства в случае известных квадратичных B-сплайнов (т.е. в случае, когда генерирующая вектор-функция $\varphi(t)$ имеет вид $(1,t,t^2)^T$). Результаты применены к непрерывно дифференцируемым тригонометрическим координатным сплайнам второго порядка.

Ключевые слова: координатные сплайны, двусторонние оценки, генерирующая вектор-функция, компоненты представления, локально квазиравномерная сетка.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 14-1-00069 и 15-01-08847.

§2. Предварительные результаты

На конечном интервале (α,β) вещественной оси рассмотрим сетку

$$X: \quad \cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

такую, что $\lim\limits_{j\to-\infty} x_j = \alpha$, $\lim\limits_{j\to+\infty} x_j = \beta$.

Введем трехкомпонентную вектор-функцию $\varphi(t)$, компоненты которой дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$. Представляя $\varphi(t)$ в виде вектор-столбца, будем считать, что вронскиан $\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t)$ не обращается в ноль на отрезке $[\alpha,\beta]$. Не нарушая общности, предположим, что выполнено условие

(A)

$$\det(\varphi,\varphi',\varphi'')(t) \geqslant c > 0 \qquad \forall t \in [\alpha,\beta].$$

Обозначим множество всех целых чисел через $\mathbb{Z}$, а множество всех трехкомпонентных вектор-столбцов с вещественными компонентами – через $\mathbb{R}^3$.

При $s \in \mathbb{Z}$ введем сокращенные обозначения для вектор-столбцов $\varphi(x_s)$, $\varphi'(x_s)$, $\varphi''(x_s)$:

$$\varphi_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_s), \quad \varphi'_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_s), \quad \varphi''_s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_s).$$

Определим вектор-столбец $\mathbf{a}^*_j$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью символического определителя

$$\mathbf{a}^*_j \stackrel{\text{def}}{=} \det\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

первая строка которого состоит из векторов φ_{j+1}, φ'_{j+1}, а вторая строка – из чисел $\det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi_{j+1})$, $\det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi'_{j+1})$.

Рассмотрим вектор-столбцы $\mathbf{b}_s$, определяемые соотношениями

$$\mathbf{b}_s^T\mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s,\varphi'_s,\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

где символ T означает транспонирование; таким образом вектор-столбец $\mathbf{b}_s$ фактически составлен из алгебраических дополнений к элементам последнего столбца матрицы $(\varphi_s,\varphi'_s,\mathbf{x})$.

Очевидно, что

$$\mathbf{b}_s^T\mathbf{a}^*_j = \det\begin{pmatrix} \det(\varphi_s,\varphi'_s,\varphi_{j+1}) & \det(\varphi_s,\varphi'_s,\varphi'_{j+1}) \\ \det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2},\varphi'_{j+2},\varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}.$$

Цепочка векторов $\{\mathbf{b}_s^T\}$ локально ортогональна цепочке векторов $\{\mathbf{a}_j^*\}$, т.е.

$$\mathbf{b}_j^T \neq 0, \quad \mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_{j-2}^* = \mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_{j-1}^* = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Если выполнено условие (A), то при достаточно малом

$$h_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$$

рассматриваемая в этом пункте цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j^*\}_{j\in\mathbb{Z}}$, определенная формулами (2.1), является полной (см. [3]), т.е.

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}^*, \mathbf{a}_{j-1}^*, \mathbf{a}_j^*) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Сплайны $\omega_j^*(t)$ определяются из аппроксимационных соотношений

$$\mathbf{a}_{k-2}^*\omega_{k-2}^*(t) + \mathbf{a}_{k-1}^*\omega_{k-1}^*(t) + \mathbf{a}_k^*\omega_k^*(t) = \varphi(t)\, \forall t \in (x_k, x_{k+1})\, \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{supp}\omega_j^* = [x_j, x_{j+3}]. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Сплайны ω_{k-2}^*, ω_{k-1}^*, ω_k^* на интервале (x_k, x_{k+1}) могут быть представлены равенствами*

$$\omega_{k-2}^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}^*}, \tag{2.4}$$

$$\omega_{k-1}^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^*} - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_k^*}{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^*}\frac{\mathbf{b}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_k^*}, \tag{2.5}$$

$$\omega_k^*(t) = \frac{\mathbf{b}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_k^*}, \tag{2.6}$$

причем их правые части зависят разве лишь от векторов

$$\varphi_{k-1}, \quad \varphi'_{k-1}, \quad \varphi_k, \quad \varphi'_k, \quad \varphi_{k+1}, \quad \varphi'_{k+1}, \quad \varphi_{k+2}, \quad \varphi'_{k+2}. \tag{2.7}$$

Доказательство см. в работе [2].

Теорема 2. *Справедливы формулы:*

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^*} \quad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.8}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^*} - \frac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^*}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^*} \frac{\mathbf{b}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^*} \quad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{2.9}$$

$$\omega_j^*(t) = \frac{\mathbf{b}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^*} \quad \text{при} \quad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{2.10}$$

$$\operatorname{supp} \omega_j^* = [x_j, x_{j+3}]. \tag{2.11}$$

Правые части формул (2.8)–(2.10) *определяются векторами*

$$\varphi_s,\ \varphi_s', \quad \text{где}\ \ s = j,\ j+1,\ j+2,\ j+3.$$

Доказательство легко вытекает из формул (2.4)–(2.7).

Сплайны ω_j^* называются координатными B_φ-сплайнами второго порядка, порожденными вектор-функцией $\varphi(t)$; вектор-функцию $\varphi(t)$ назовем *генератором* B_φ*-сплайнов* ω_j^*. Пространство, натянутое на функции ω_j^*, будем обозначать $\mathbb{S}^*(X,\varphi)$,

$$\mathbb{S}^*(X,\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_j c_j \omega_j^* \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Используя теорему 2, нетрудно установить (см. [3]), что сплайны ω_j^* непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha,\beta]$, и потому $\mathbb{S}^*(X,\varphi) \subset C^1[\alpha,\beta]$.

Введем обозначения:

$$A_i(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{b}_i^T \varphi(t), \quad i = k-1, k, k+1; \quad B_k \overset{\text{def}}{=} \mathbf{b}_{k+1} \mathbf{a}_{k-2}^*;$$
$$C_j \overset{\text{def}}{=} \mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^*, \quad j = k-1, k; \qquad D_k \overset{\text{def}}{=} \mathbf{b}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^*.$$

В этих обозначениях, согласно формулам (2.4)–(2.6), при $t \in (x_k, x_{k+1})$ имеем

$$\omega_{k-2}^*(t) = \frac{A_{k+1}(t)}{B_k},$$
$$\omega_{k-1}^*(t) = \frac{A_{k-1}(t)}{C_{k-1}} - \frac{D_k}{C_{k-1}} \cdot \frac{A_k(t)}{C_k},$$
$$\omega_k^*(t) = \frac{A_k(t)}{C_k}.$$

Формулы (2.8)–(2.10) можно (см. [4]) представить в форме

$$\omega_j^*(t) = \begin{cases} \frac{A_j(t)}{C_j} & \text{при } t \in [x_j, x_{j+1}) \\ \frac{A_j(t)}{C_j} - \frac{D_{j+1}}{C_j} \cdot \frac{A_{j+1}(t)}{C_{j+1}} & \text{при } t \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ \frac{A_{j+3}(t)}{B_{j+2}} & \text{при } t \in [x_{j+2}, x_{j+3}] \\ 0 & \text{при } t \notin [x_j, x_{j+3}] \end{cases} \tag{2.12}$$

Выражения $A_j(t)$, $A_{j+1}(t)$, $A_{j+3}(t)$, B_{j+2}, C_j, C_{j+1}, D_{j+1} называются *компонентами представления* функции ω_j^*.

§3. Оценки координатных B_φ-сплайнов

Для оценки координатных B_φ-сплайнов воспользуемся оценками компонент $A_j(t)$, $A_{j+1}(t)$, B_j, C_j, C_{j+1}, D_j (см. [4]).

Введем обозначение

$$w_j(\eta) = \det(\varphi_j, \varphi'_j, \varphi''(\eta))$$

и положим

$$m_j = \min_{x_{j-2} \leqslant \eta \leqslant x_{j+2}} w_j(\eta), \tag{3.1}$$

$$M_j = \max_{x_{j-2} \leqslant \eta \leqslant x_{j+2}} w_j(\eta). \tag{3.2}$$

Принимая во внимание условие (A), в дальнейшем будем считать сетку столь мелкой, что

$$m_j > 0 \qquad \text{при} \quad j = k-1, k, k+1, k+2. \tag{3.3}$$

Лемма 1. *При предположениях* (3.3) *для* $t \in [x_k, x_{k+1}]$ *верны неравенства*

$$\frac{m_j}{2}(t - x_j)^2 \leqslant A_j(t) \leqslant \frac{M_j}{2}(t - x_j)^2, \qquad j = k-1, k, k+1. \tag{3.4}$$

Лемма 2. *В условиях* (3.3) *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} & m_k m_{k+1}(x_k - x_{k-1})^3 - M_k M_{k+1}[(x_{k+1} - x_{k-1})^3 - (x_{k+1} - x_k)^3] \\ & \leqslant 6B_k \leqslant M_k M_{k+1}(x_k - x_{k-1})^3 \\ & - m_k m_{k+1}[(x_{k+1} - x_{k-1})^3 - (x_{k+1} - x_k)^3].) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Лемма 3. *В условиях* (3.3) *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} & - M_j M_{j+2}(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_j) \leqslant 2C_j \\ & \leqslant -m_j m_{j+2}(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_j). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Лемма 4. *При выполнении условий* (3.3) *справедливо неравенство*

$$-M_{k-1}M_{k+2}(x_{k+2}-x_{k-1})(x_{k+2}-x_{k+1})(x_{k+1}-x_{k-1}) \leqslant 2D_k$$
$$-m_{k-1}m_{k+2}(x_{k+2}-x_{k-1})(x_{k+2}-x_{k+1})(x_{k+1}-x_{k-1}). \quad (3.7)$$

Доказательства лемм 1–4 можно найти в работе [4].

Лемма 5. *Если* $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, *то* $m_j = M_j = 2$ *для всех* $j \in \mathbb{Z}$, *и для* $t \in [x_k, x_{k+1}]$ *справедливы соотношения*:

$$A_i(t) = (t - x_i)^2 \quad \text{при} \quad i = k-1, k, k+1, \quad (3.8)$$
$$B_k = -2(x_{k+1}-x_{k-1})(x_k - x_{k-1})(x_{k+1}-x_k), \quad (3.9)$$
$$C_j = -2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j) \quad \text{при} \quad j = k-1, k, \quad (3.10)$$
$$D_k = -2(x_{k+2}-x_{k-1})(x_{k+2}-x_{k+1})(x_{k+1}-x_{k-1}). \quad (3.11)$$

Доказательство. При $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$ получаем $w_j(\eta) \equiv 2$ и потому $m_j = M_j = 2$ $\forall j \in \mathbb{Z}$; подставляя эти значения в формулы (3.4)–(3.7), видим, что все неравенства в них заменяются равенствами, и при этом получаются соотношения (3.8)–(3.11). □

Лемма 6. *Если* $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, *то в формуле* (2.12) *следует положить*

$$A_s(t) = (t - x_s)^2 \quad \text{при} \quad s = j, j+1, j+3, \quad (3.12)$$
$$B_{j+2} = -2(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2}), \quad (3.13)$$
$$C_s = -2(x_{s+2}-x_s)(x_{s+2}-x_{s+1})(x_{s+1}-x_s) \quad \text{при} \quad s = j, j+1, \quad (3.14)$$
$$D_{j+1} = -2(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j). \quad (3.15)$$

Формулы (3.12)–(3.15) следуют из соотношений (3.8)–(3.11) в результате соответствующей замены индексов.

Теорема 3. *Оценки* (3.4)–(3.7) *компонент представления функции* ω_j^* *точны: они превращаются в равенства для* $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$; *в этом случае функция* ω_j^* *является известным полиномиальным* B*-сплайном второй степени.*

Доказательство. Для доказательства следует воспользоваться леммами 1–5 и представлением (2.12). □

§4. Некоторые следствия из предыдущих неравенств

Из (3.4) имеем

$$0 < m_j(t-x_j)^2 \leqslant 2A_j(t) \leqslant M_j(t-x_j)^2, \tag{4.1}$$

$$0 < m_{j+1}(t-x_{j+1})^2 \leqslant 2A_{j+1}(t) \leqslant M_{j+1}(t-x_{j+1})^2. \tag{4.2}$$

Согласно (3.6),

$$\begin{aligned}&-M_jM_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j) \leqslant 2C_j\\ &\leqslant -m_jm_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j) < 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.1)–(4.3) вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Верны неравенства*

$$\begin{aligned}&-\frac{M_j(t-x_j)^2}{m_jm_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} \leqslant \frac{A_j(t)}{C_j}\\ &\leqslant -\frac{m_j(t-x_j)^2}{M_jM_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} < 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Заменяя здесь j на $j+1$, получаем

Следствие 1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}&-\frac{M_{j+1}(t-x_{j+1})^2}{m_{j+1}m_{j+3}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_{j+1})} \leqslant \frac{A_{j+1}(t)}{C_{j+1}}\\ &\leqslant -\frac{m_{j+1}(t-x_{j+1})^2}{M_{j+1}M_{j+3}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_{j+1})} < 0.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Из (3.7) при $k=j+1$ имеем

$$\begin{aligned}&-M_jM_{j+3}(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j) \leqslant 2D_{j+1}\\ &\leqslant -m_jm_{j+3}(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j) < 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.3) и (4.6) находим

$$\begin{aligned}0 &< \frac{m_jm_{j+3}(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})}{M_jM_{j+2}(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} \leqslant \frac{D_{j+1}}{C_j}\\ &\leqslant \frac{M_jM_{j+3}(x_{j+3}-x_j)(x_{j+3}-x_{j+2})}{m_jm_{j+2}(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Перемножая неравенства (4.5) и (4.7), видим, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. *Справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}0 &< \frac{m_j m_{j+3} m_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{M_{j+1}M_{j+3}M_jM_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}\\ &\leqslant -\frac{D_{j+1}}{C_j}\frac{A_{j+1}(t)}{C_{j+1}}\\ &\leqslant \frac{M_jM_{j+3}M_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{m_{j+1}m_{j+3}m_jm_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

§5. Оценка координатного сплайна

Теорема 4. *При $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$ справедливы двусторонние неравенства*

$$\begin{aligned}&-\frac{M_j(t-x_j)^2}{m_jm_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}\\ &+\frac{m_jm_{j+3}m_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{M_{j+1}M_{j+3}M_jM_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}\\ &\leqslant \omega_j^*(t) \leqslant -\frac{m_j(t-x_j)^2}{M_jM_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}\\ &+\frac{M_jM_{j+3}M_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{m_{j+1}m_{j+3}m_jm_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Доказательство. Складывая неравенства (4.8) с (4.4), получаем

$$\begin{aligned}&-\frac{M_j(t-x_j)^2}{m_jm_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}\\ &+\frac{m_jm_{j+3}m_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{M_{j+1}M_{j+3}M_jM_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}\\ &\leqslant \frac{A_j(t)}{C_j}-\frac{D_{j+1}}{C_j}\frac{A_{j+1}(t)}{C_{j+1}}\\ &\leqslant -\frac{m_j(t-x_j)^2}{M_jM_{j+2}(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}\\ &+\frac{M_jM_{j+3}M_{j+1}(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{m_{j+1}m_{j+3}m_jm_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}.\end{aligned}$$

В соответствии с формулой (2.12), в середине только что указанных двусторонних неравенств находится представление функции $\omega_j^*(t)$ при $t \in (x_{j+1}, x_{j+2})$; таким образом, неравенства (5.1) установлены. □

Введем обозначения:

$$m_{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{m_j, m_{j+1}, m_{j+2}, m_{j+3}\},$$
$$M_{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{M_j, M_{j+1}, M_{j+2}, M_{j+3}\}.$$

Для краткости в дальнейшем нижний индекс часто будем опускать, так что $m = m_{(j)}$, $M = M_{(j)}$.

Следствие 2. *Справедливы соотношения*:

$$\begin{aligned} &-\frac{M(t-x_j)^2}{m^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} \\ &+\frac{m^3(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{M^4(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)} \\ &\leqslant \omega_j^*(t) \leqslant -\frac{m(t-x_j)^2}{M^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} \\ &+\frac{M^3(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{m^4(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Соотношения (5.2) *точны*: *в случае, когда* $\varphi(t) = (1, t, t^2)$, *неравенства в* (5.2) *превращаются в равенства, определяющие непрерывно дифференцируемый квадратичный* B*-сплайн.*

Рассмотрим локально квазиравномерную сетку, т.е. сетку со свойством

$$K^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

где K – фиксированное число, $K \geqslant 1$.

Лемма 9. *Для сетки со свойством* (5.3)

1) *при целом* p, $p \geqslant 0$, *справедливы соотношения*

$$K^{-p} \leqslant \frac{x_{j+p+1}-x_{j+p}}{x_{j+1}-x_j} \leqslant K^p, \tag{5.4}$$

2) *при* $K > 1$ *и натуральном числе* s *верны соотношения*

$$\frac{K^{-s}-1}{K^{-1}-1} \leqslant \frac{x_{j+s}-x_j}{x_{j+1}-x_j} \leqslant \frac{K^s-1}{K-1}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Для целого $p \geqslant 0$ имеем

$$\frac{x_{j+p+1}-x_{j+p}}{x_{j+1}-x_j} = \frac{x_{j+p+1}-x_{j+p}}{x_{j+p}-x_{j+p-1}} \frac{x_{j+p}-x_{j+p-1}}{x_{j+p-1}-x_{j+p-2}} \cdots \frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j},$$

откуда получаем соотношение (5.4).

Для натурального числа s имеем

$$\frac{x_{j+s}-x_j}{x_{j+1}-x_j}=\frac{x_{j+s}-x_{j+s-1}}{x_{j+1}-x_j}+\frac{x_{j+s-1}-x_{j+s-2}}{x_{j+1}-x_j}+\cdots+\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+1}-x_j},$$

откуда, применяя неравенство (5.4) к каждому слагаемому рассматриваемой суммы, получаем

$$K^{-(s-1)}+K^{-(s-2)}+\cdots+1\leqslant\frac{x_{j+s}-x_j}{x_{j+1}-x_j}\leqslant K^{s-1}+K^{s-2}+\cdots+1;$$

таким образом, при $K>1$ выводим соотношение (5.5). □

Следствие 3. *В условиях леммы* 9 *справедливы следующие неравенства*:

$$K^{-1}+1\leqslant\frac{x_{j+2}-x_j}{x_{j+1}-x_j}\leqslant K+1, \tag{5.6}$$

$$2K^{-1}+1\leqslant\frac{x_{j+3}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}}\leqslant 2K+1, \tag{5.7}$$

$$K^{-2}+K^{-1}\leqslant\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}\leqslant K^2+K. \tag{5.8}$$

Доказательство. Формула (5.6) получается из (5.5) при $s=2$. Для доказательства соотношения (5.7) воспользуемся представлением

$$\frac{x_{j+3}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}}=\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{x_{j+2}-x_{j+1}}+\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{x_{j+2}-x_{j+1}}+\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}}$$

и вытекающими из (5.4) соотношениями

$$K^{-1}\leqslant\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{x_{j+2}-x_{j+1}}\leqslant K,\quad K^{-1}\leqslant\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}}\leqslant K.$$

Аналогичным образом использование представления

$$\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}=\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{x_{j+1}-x_j}+\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}$$

и формулы (5.4) при $p=2$ и $p=1$ соответсвенно приводит к соотношению (5.8). □

Для оценки сплайна ω_j^* в случае локально квазиравномерной сетки со свойством (5.3) применим неравенства (5.6)–(5.8) к соотношению (5.2).

Сначала оценим снизу левую часть неравенства (5.2); она состоит из двух слагаемых (первое слагаемое отрицательное, а второе –

положительное). Оценивая первое слагаемое снизу, воспользуемся неравенствами

$$(K^{-1}+1)(x_{j+1}-x_j) \leqslant x_{j+2}-x_j, \qquad K^{-1}(x_{j+1}-x_j) \leqslant x_{j+2}-x_{j+1}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} &-\frac{M(t-x_j)^2}{m^2(K^{-1}+1)K^{-1}(x_{j+1}-x_j)^3} \\ &\leqslant -\frac{M(t-x_j)^2}{m^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Оценим снизу второе слагаемое левой части в (5.2), используя соотношения

$$\begin{aligned} 2K^{-1}+1 &\leqslant \frac{x_{j+3}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}}, \\ x_{j+3}-x_{j+1} &\leqslant (K^2+K)(x_{j+1}-x_j), \\ x_{j+2}-x_{j+1} &\leqslant K(x_{j+1}-x_j); \end{aligned}$$

в результате получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{m^3(t-x_{j+1})^2(2K^{-1}+1)}{M^4(K^2+K)K(x_{j+1}-x_j)^3} \\ &\leqslant \frac{m^3(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{M^4(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Перейдем к оценке правой части сверху; ее также проведем в два этапа: сначала оценим сверху первое слагаемое, а затем – второе. Для оценки первого слагаемого

$$-\frac{m(t-x_j)^2}{M^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)}$$

используем неравенства

$$x_{j+2}-x_j \leqslant (K+1)(x_{j+1}-x_j), \qquad x_{j+2}-x_{j+1} \leqslant K(x_{j+1}-x_j).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &-\frac{m(t-x_j)^2}{M^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+1}-x_j)} \\ &\qquad\leqslant -\frac{m(t-x_j)^2}{M^2K(K+1)(x_{j+1}-x_j)^3}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Используя неравенства

$$\frac{x_{j+3}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \leqslant 2K+1,$$
$$K^{-1}(x_{j+1}-x_j) \leqslant x_{j+2}-x_{j+1},$$
$$(K^{-2}+K^{-1})(x_{j+1}-x_j) \leqslant x_{j+3}-x_{j+1},$$

оценим сверху второе слагаемое правой части:

$$\frac{M^3(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{m^4(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)} \leqslant \frac{M^3(t-x_{j+1})^2(2K+1)}{m^4(K^{-2}+K^{-1})K^{-1}(x_{j+1}-x_j)^3}. \quad (5.12)$$

Теорема 5. *При локально квазиравномерной сетке со свойством* (5.3) *справедливы следующие оценки*:

$$-\frac{M(t-x_j)^2K^2}{m^2(K+1)(x_{j+1}-x_j)^3}+\frac{m^3(t-x_{j+1})^2(2+K)}{M^4(K+1)K^3(x_{j+1}-x_j)^3} \leqslant \omega_j^* \leqslant -\frac{m(t-x_j)^2}{M^2K(K+1)(x_{j+1}-x_j)^3} + \frac{M^3(t-x_{j+1})^2(2K+1)K^3}{m^4(K+1)(x_{j+1}-x_j)^3}, \quad t\in(x_{j+1},x_{j+2}). \quad (5.13)$$

Доказательство. Используя неравенства (5.9)–(5.12), из (5.3) после элементарных преобразований получаем оценку (5.13). □

§6. О знакоопределенности координатных функций

Для исследования знакоопределенности координатных функций сначала рассмотрим условия неположительности правой части неравенства (5.1) при $t\in(x_{j+1},x_{j+2})$. Деля ее на положительное число

$$\frac{M_jM_{j+3}M_{j+1}(x_{j+3}-x_j)}{m_{j+1}m_{j+3}m_jm_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+1})^2(x_{j+1}-x_j)},$$

исследуем неположительность квадатичной функции

$$f(t)\overset{\text{def}}{=}-\alpha(t-x_j)^2+(t-x_{j+1})^2 \quad \text{при} \quad t\in(x_{j+1},x_{j+2}), \quad (6.1)$$

где $\alpha>0$,

$$\alpha\overset{\text{def}}{=}\frac{m_j^2m_{j+1}m_{j+2}m_{j+3}}{M_j^2M_{j+1}M_{j+2}M_{j+3}}\cdot\frac{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})}{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)}. \quad (6.2)$$

Очевидно, что

$$f(x_{j+1}) = -\alpha(x_{j+1} - x_j)^2 < 0, \qquad f''(t) = 2(1-\alpha).$$

Ясно, что при $\alpha < 1$ неположительность $f(t)$ на промежутке $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ эквивалентна неравенству

$$f(x_{j+2}) \leqslant 0, \tag{6.3}$$

ибо в этом случае функция $f(t)$ вогнута. При $\alpha > 1$ эта функция выпукла, а ее экстремальная точка лежит левее упомянутого промежутка, так что на нем эта функция неположительна. Легко проверяется ее неположительность на рассматриваемом промежутке и при $\alpha = 1$.

Условие (6.3) перепишем в виде

$$1 \leqslant \alpha\Big(\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} + 1\Big)^2. \tag{6.4}$$

Вводя обозначение

$$M \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{M_j^2 M_{j+1} M_{j+2} M_{j+3}}{m_j^2 m_{j+1} m_{j+2} m_{j+3}}, \tag{6.5}$$

соотношению (6.4) придадим форму

$$M \leqslant \frac{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+3} - x_j)}\Big(\frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} + 1\Big)^2,$$

или (что то же самое)

$$M \leqslant \frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{x_{j+3} - x_j}\,\frac{x_{j+2} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}}. \tag{6.6}$$

Воспользуемся обозначениями

$$a \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}}, \qquad b \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{x_{j+2} - x_{j+1}}$$

и перепишем (6.6) в виде

$$M \leqslant \frac{(a+1)(b+1)}{a+b+1} \iff M - 1 \leqslant \frac{ab}{a+b+1};$$

последнее эквивалентно соотношению

$$M - 1 \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} \cdot \frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{x_{j+3} - x_j}. \tag{6.7}$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Достаточным условием неположительности координатного B_φ-сплайна ω_j^* является условие* (6.7).

Доказательство. Отрицательность координатного сплайна $\omega_j^*(t)$ на интервалах (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}) очевидным образом следует из представления (2.12) и формул (3.4)–(3.6), а его неположительность на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}) – из неположительности функции (6.1), установленной условием (6.7). □

Замечание. Доказанная теорема точна для координатного непрерывно дифференцируемого сплайна второй степени (его знакоопределенность известна): если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то $\mathcal{M} = 1$ и условие (6.7) выполняется для произвольной неравномерной сетки.

§7. Тригонометрический координатный сплайн

Пусть выполнено предположение
(B)

$$x_{j+1} - x_j < \pi \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим тригонометрические минимальные сплайны второго порядка, полагая $\varphi(t) = (1, \sin\, t, \cos\, t)^T$. По формулам (2.1) получаем полную цепочку векторов

$$\mathbf{a}_j^* = -2\sin\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\\ \sin\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}\\ \cos\frac{x_{j+2}+x_{j+1}}{2}\end{pmatrix}.$$

Для удобства положим $c_j \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}\right)$, $\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} c_j\mathbf{a}_j^*$ и подставим $\mathbf{a}_j^* = \mathbf{a}_j/c_j$ в аппроксимационные соотношения (2.2)–(2.3); это приведет к соотношениям

$$\mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2}^{\mathcal{T}}(t) + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}^{\mathcal{T}}(t) + \mathbf{a}_k\omega_k^{\mathcal{T}}(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{supp}\omega_j^{\mathcal{T}} = [x_j, x_{j+3}],$$

откуда определятся (см. [5]) непрерывно дифференцируемые координатные сплайны $\omega_j^{\mathcal{T}}$, представимые формулами

$$\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \sin^2\Big(\frac{t - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\Big) \quad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{7.1}$$

$$\begin{gathered}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\sin\Big(\frac{x_{j+2} + x_{j+3}}{2} - t\Big)\cos\frac{x_{j+1} - x_j}{2} \\ + \sin\Big(t - \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2} + \sin\frac{x_{j+1} + x_j - x_{j+3} - x_{j+2}}{2}\Bigg] \\ \times \sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big) \\ \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}),\end{gathered} \tag{7.2}$$

$$\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \sin^2\Big(\frac{t - x_{j+3}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2}\Big) \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}]. \tag{7.3}$$

Докажем, что координатный сплайн $\omega_j^{\mathcal{T}}(t)$ неотрицателен. Для этого сначала найдем его первую и вторую производные на промежутке (x_{j+1}, x_{j+2}); из формулы (7.2) имеем:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\omega_j^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\Bigg[-\cos\Big(\frac{x_{j+2} + x_{j+3}}{2} - t\Big)\cos\frac{x_{j+1} - x_j}{2} \\ + \cos\Big(t - \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2}\Bigg] \\ \times \sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big),\end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2}{dt^2}\omega_{j+1}^{\mathcal{T}}(t) = \frac{1}{2}\Bigg[-\sin\Big(\frac{x_{j+2} + x_{j+3}}{2} - t\Big)\cos\frac{x_{j+1} - x_j}{2} \\ - \sin\Big(t - \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\Big)\cos\frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{2}\Bigg] \\ \times sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3} - x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big).\end{gathered}$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega^{\mathcal{T}}_{j+1}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}). \tag{7.5}$$

Отыскивая первую и вторую производные функции $\omega^{\mathcal{T}}_j(t)$ на промежутках (x_j, x_{j+1}) и (x_{j+2}, x_{j+3}), из (7.1) и (7.3) найдем

$$\frac{d}{dt}\omega^{\mathcal{T}}_j(t) = \frac{1}{2}\sin\Big(t - x_j\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\Big), \tag{7.6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega^{\mathcal{T}}_j(t) = \frac{1}{2}\cos\Big(t - x_j\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+2} - x_j}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+1} - x_j}{2}\Big) \tag{7.7}$$

при $t \in (x_j, x_{j+1})$ и

$$\frac{d}{dt}\omega^{\mathcal{T}}_j(t)=\frac{1}{2}\sin\Big(t - x_{j+3}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}\Big), \tag{7.8}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega^{\mathcal{T}}_j(t)=\frac{1}{2}\cos\Big(t-x_{j+3}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\Big)\sin^{-1}\Big(\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}\Big) \tag{7.9}$$

при $t \in (x_{j+2}, x_{j+3})$.

Таким образом, доказано следующее утверждение, анонсированное в работе [5].

Теорема 7. *Координатный тригонометрический сплайн $\omega^{\mathcal{T}}_j(t)$ положителен на интервале (x_j, x_{j+3}); он является вогнутой функцией на интервалах (x_j, x_{j+1}), (x_{j+2}, x_{j+3}) и выпуклой функцией на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}).*

Доказательство. Из соотношения (7.5) следует, что на интервале (x_{j+1}, x_{j+2}) сплайн $\omega^{\mathcal{T}}_j(t)$ – выпуклая функция, а из соотношений (7.7) и (7.9) ясно, что на интервалах (x_j, x_{j+1}), (x_{j+2}, x_{j+3}) он является вогнутой функцией. Учитывая, что $\omega^{\mathcal{T}}_j(t) \in C^1(\alpha, \beta)$ (см. [5]), из формул (7.6) и (7.8) заключаем, что сплайн $\omega^{\mathcal{T}}_j(t)$ положителен. □

Если $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1, \cos t, \sin t)^T$, то получается координатный $\mathcal{T}$-сплайн $\overline{\omega}^{\mathcal{T}}_j$, отличающийся лишь отрицательным сомножителем от только что рассмотренного сплайна $\omega^{\mathcal{T}}_j$. Полученные выше результаты легко трансформируются для этого случая; в частности, сплайн $\overline{\omega}^{\mathcal{T}}_j$ неположителен. Для выяснения степени эффективности доказанного в теореме 6 критерия неположительности применим его к этому случаю.

Очевидно, что

$$w_j(\eta) = \det(\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(\eta)) = \cos(x_j - \eta).$$

Согласно (3.1) имеем

$$m_i = \min_{x_{i-2} \leqslant \eta \leqslant x_{i+2}} \cos(x_i - \eta),$$

так что

$$m_i = \cos(\max\{|x_i - x_{i-2}|, |x_{i+2} - x_i|\}).$$

Вводя обозначения

$$h_s \stackrel{\text{def}}{=} x_{s+1} - x_s, \tag{7.10}$$
$$\widetilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{j, j+1, j+2, j+3\}} \max\{h_{i-2} + h_{i-1}, h_i + h_{i+1}\},$$

видим, что

$$m_i = \cos(\max\{h_{i-2} + h_{i-1}, h_i + h_{i+1}\}) \geqslant \cos(\widetilde{H}).$$

Пусть

$$h_{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{j-2, j, \ldots, j+4\}} h_i;$$

тогда $\max\{h_{i-2} + h_{i-1}, h_i + h_{i+1}\} \leqslant 2h_{(j)}$, а значит и

$$\widetilde{H} \leqslant 2h_{(j)}, \qquad m_i \geqslant \cos(2h_{(j)}).$$

В рассмариваемом случае

$$M_i = \max_{x_{i-2} \leqslant \eta \leqslant x_{i+2}} \cos(x_i - \eta) = 1;$$

из (6.4) и (6.7) видно, что условие

$$\cos^{-5}(2h_{(j)}) - 1 \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+2} - x_{j+1}} \cdot \frac{x_{j+3} - x_{j+2}}{x_{j+3} - x_j} \tag{7.11}$$

достаточно для неположительности рассматриваемого базисного тригонометрического сплайна $\overline{\omega}_j^{\mathcal{T}}(t)$.

Теорема 8. *Достаточное условие неположительности базисного тригонометрического сплайна $\overline{\omega}_j^{\mathcal{T}}(t)$ имеет вид*

$$\cos^5(2h_{(j)}) \geqslant \frac{h_{j+1}(h_j + h_{j+1} + h_{j+2})}{(h_{j+1} + h_{j+2})(h_j + h_{j+1})}. \tag{7.12}$$

Доказательство получается элементарными преобразованиями формул (7.11) с использованием обозначений (7.10).

Из соотношения (7.2) вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Достаточное условие неположительности тригонометрического координатного сплайна $\overline{\omega}_j^{\mathcal{T}}(t)$ на равномерной сетке шага h имеет вид*

$$\cos(2h) \geqslant \sqrt[5]{\frac{3}{4}}. \tag{7.13}$$

Заметим, что теорема 8 не дает точных условий знакоопределенности для координатного сплайна $\overline{\omega}_j^{\mathcal{T}}(t)$ (это легко вытекает из сравнения условий (B) и (7.12); см. также (7.13)).

§8. Заключение

Полученные достаточные условия знакоопределенности координатных минимальных сплайнов второго порядка показывают, что при достаточно мелкой локально квазиравномерной сетке упомянутые сплайны – знакоопределенные функции. Упомянутые условия точны в случае квадратичных B_φ-сплайнов, но не точны для тригонометрических B_φ-сплайнов.

Литература

1. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М., 2005.
2. Ю. К. Демьянович, О. М. Косогоров, *Аппроксимация минимальными сплайнами.* — Проблемы мат. анализа **43** (2009), 69–86.
3. Ю. К. Демьянович, *Теория сплайн-всплесков.* СПб., Изд-во С. Петерб. ун-та, 2013.
4. Ю. К. Демьянович, И. Г. Бурова, *Интегральное представление и точные оценки B_φ-сплайнов.* — Проблемы мат. анализа **75** (2014), 61–69.
5. И. Г. Бурова, Ю. К. Демьянович, *О гладкости сплайнов.* — Ж. матем. моделир. **16**, No. 12 (2004), 40–43.

Dem'yanovich Yu. K., Lebedinskii D. M., Lebedinskaya N. A. Two-sided estimates of some coordinate splines.

Two-sided estimates of continuously differentiable coordinate splines of the second order are established, and sufficient conditions of their nonnegativeness are provided. The results obtained are applied to trigonometric splines.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Yuri.Demjanovich@gmail.com
E-mail: d.lebedinsky@spbu.ru
E-mail: n.lebedinskaya@spbu.ru

Поступило 23 ноября 2015 г.