Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

А. Э. Гутерман, О. В. Маркова

ПРОБЛЕМА РЕАЛИЗУЕМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИНЫ ДЛЯ ПАРЫ КВАЗИ-КОММУТИРУЮЩИХ МАТРИЦ

§1. Введение

Методы работы с алгебрами условно можно разделить на качественные и количестенные. В то время как качественные методы исследуют в основном структурную теорию и свойства конкретных элементов или подалгебр, количественные методы нацелены на исследование числовых характеристик алгебры. Примечательно, что многие задачи требуют одновременного применения обоих типов методов. Одной из важных количественных характеристик конечномерной алгебры является функция длины, которая определяется следующим образом, см., например, [11].

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное *поле* и пусть $\mathcal{A}$ – *конечномерная ассоциативная алгебра над* $\mathbb{F}$ с *системой порождающих* $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_h\} \subset \mathcal{A}$. Пусть $\langle S \rangle$ обозначает *линейную оболочку* (множество всех конечных линейных комбинаций элементов из S с коэффициентами из $\mathbb{F}$) множества S в некотором линейном пространстве над $\mathbb{F}$. Для конечного множества (алфавита) $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ конечные последовательности букв из B назовем *словами*. Пусть B^* обозначает *множество всех слов в алфавите* B, а F_B – *свободную полугруппу над алфавитом* B, т.е. B^* с операцией *конкатенации*.

Определение 1.1. *Длина* слова $b_{i_1} \ldots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t. Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B *длины* 0.

Пусть B^t, $t \geqslant 0$, обозначает множество всех слов в алфавите B длины не большей t, и $B^t \setminus B^{t-1}$ – множество всех слов в алфавите B длины равной t, $t \geqslant 1$.

Ключевые слова: конечномерные алгебры; функция длины; квази-коммутирующие матрицы.

Работа частично финансово поддержана грантами МД-962.2014.1, РФФИ 13-01-00234-а и 15-31-20329 и грантом ДААД – исследовательский проект “Владимир Вернадский”.

Замечание 1.2. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме и их также можно называть словами от образующих и использовать естественные обозначения $\mathcal{S}^t$ и $\mathcal{S}^t \setminus \mathcal{S}^{t-1}$.

Если $\mathcal{A}$ – *алгебра с единицей* $1_{\mathcal{A}}$, то положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, иначе положим $\mathcal{S}^0 = \varnothing$. Обозначим через $\mathcal{L}_t(\mathcal{S})$ *линейную оболочку всех слов* из $\mathcal{S}^t$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для *алгебр с единицей*, и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$ в противном случае. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \ldots, a_h\}$.

Определение 1.3. *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется наименьшее неотрицательное целое число k, для которого $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$. Обозначим длину системы порождающих $\mathcal{S}$ через $l(\mathcal{S})$.

Определение 1.4. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется $l(\mathcal{A}) = \max\limits_{\mathcal{S}} l(\mathcal{S})$, где максимум берется по всем системам порождающих этой алгебры.

Основываясь на [4, теорема 3.1], в дальнейшем мы будем предполагать, что все рассматриваемые алгебры являются алгебрами с единицей.

Слово $v \in \mathcal{S}^t \setminus \mathcal{S}^{t-1}$ называется *сократимым над* $\mathcal{S}$, если существует номер $i < t$ такой, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины, в противном случае назовем его *несократимым над* $\mathcal{S}$.

Обозначим через E, E_n единичную матрицу, через O, O_n – нулевую матрицу в $M_n(\mathbb{F})$ – множестве всех $n \times n$ матриц над $\mathbb{F}$. Пусть $E_{i,j}$ обозначает (i,j)-ую матричную единицу в $M_n(\mathbb{F})$, т.е. матрицу с 1 на (i,j)-ом месте и 0 на остальных. *Спектр* квадратной матрицы, т.е. множество её собственных значений в $\mathbb{F}$, обозначим через $\sigma(A)$, жорданову клетку порядка k с собственным числом λ обозначим $J_k(\lambda)$, а степень минимального многочлена матрицы A обозначим через $\deg(A)$. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле и $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. В дальнейшем под *первообразным корнем из единицы* $\varepsilon_k \in \mathbb{F}$ *порядка* k понимается такой корень из единицы степени k, что $\varepsilon_k^m \neq 1$ для всех $1 \leqslant m < k$.

Матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если

$$\dim_{\mathbb{F}} \langle E,\ C,\ C^2, \ldots,\ C^{n-1} \rangle = n.$$

Предметом ряда исследований были оценки длины подалгебр матричной алгебры, а также определение длины конкретных порождающих множеств. В частности, было показано, что длина коммутативного порождающего подмножества, а значит, и длина коммутативной подалгебры $M_n(\mathbb{F})$, не превосходит $n-1$, см. [4]. Показано, что если все элементы порождающего множества одновременно триангуляризуемы над $\mathbb{F}$, то длина этого множества также не превосходит $n-1$, см. [10]. Некоторые другие оценки длины систем порождающих могут быть найдены в работах [1, 11].

Естественным и важным обобщением коммутативности является ситуация, когда произведения AB и BA не равны, а только лишь линейно зависимы, а именно, матрицы A и B коммутируют с точностью до скалярного фактора: существует такой элемент $\varepsilon \in \mathbb{F}$, что $AB = \varepsilon BA$.

Определение 1.5. Если A, B такие матрицы из $M_n(\mathbb{F})$, что AB и BA линейно зависимы, то будем говорить, что A и B *квази-коммутируют*. Если нам будет важен конкретный множитель $\omega \in \mathbb{F}$ из соотношения квази-коммутативности $AB = \omega BA$, будем говорить, что A, B *коммутируют с точностью до множителя* ω (или ω-*коммутируют*).

Квази-коммутирующие пары матриц важны в связи с целым рядом прикладных задач, см. [7, 9]. Вопросы, связанные со структурой пар квази-коммутирующих матриц и возможными значениями множителя коммутативности, активно изучаются, см., например, обзорную работу [6] и статью [8]. Важным инструментом в изучении квази-коммутирующих матриц является следующая пренормальная форма.

Теорема 1.6 ([2, теоремы 1–2, пункты 4 и 5 в доказательстве теоремы 2 на стр. 9])**.** *Пусть $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле и пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, которые удовлетворяют соотношению $AB = \varepsilon BA$ для некоторого скаляра $\varepsilon \in \mathbb{F}$, $\varepsilon \neq 1$, и матрица AB не является нильпотентной. Тогда найдутся целое число r, $0 \leqslant r \leqslant n-2$, и обратимая матрица $P \in M_n(\mathbb{F})$ такие, что*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} S & X \\ O & A_r \end{bmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{bmatrix} T & Y \\ O & B_r \end{bmatrix}, \tag{1}$$

причём число ε обязательно является первообразным корнем из единицы порядка $k > 1$, *делящего $n - r$; S и T – верхнетреугольные* *матрицы порядка r, матрицы ST и TS нильпотентны и*

$$A_r = \begin{bmatrix} C & O & \dots & O \\ O & \varepsilon C & \dots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \dots & \varepsilon^{k-1}C \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & D_1 \\ D_2 & O & \dots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \dots & D_k & O \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $C \in M_{(n-r)/k}(\mathbb{F})$ – такая невырожденная матрица, что $\sigma(C) \cap \varepsilon^j\sigma(C) = \varnothing$ для всех $j = 1, \dots, k-1$; $D_1, \dots, D_k \in M_{(n-r)/k}(\mathbb{F})$ – произвольные невырожденные матрицы, удовлетворяющие соотношениям $D_iC = CD_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

В [5] установлено, что длина произвольной пары квази-коммутирующих матриц всегда оценивается сверху линейной функцией от порядка матриц. Также доказано, что если пара порождающих коммутирует или произведение матриц является нильпотентным, то все возможные значения длины, т.е. все значения из интервала между минимальным и максимальным значениями, реализуемы. В то же время, для пар квази-коммутирующих матриц, не удовлетворяющих перечисленным выше условиям, в интервале между минимальным и максимальным из возможных значений существуют “дыры”, т.е. нереализуемые значения. Здесь мы говорим, что число $k \in \mathbb{N}$ *реализуемо*, если существует пара квази-коммутирующих матриц $\mathcal{S} = \{A_1, A_2\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ такая, что $l(\mathcal{S}) = k$, иначе оно *нереализуемо*.

В данной работе мы исследуем *вопрос реализуемости длин пар квази-коммутирующих матриц*. Отдельно здесь можно выделить вопрос реализуемости для данного множителя коммутативности ω, а именно вопрос существования ω-коммутирующей пары данной длины.

В §2 настоящей статьи построены серии примеров реализуемости, в частности, серии квази-коммутирующих пар матриц, на которых реализуются нечётные значения длины, и, в случае $\omega = -1$, серии квази-коммутирующих пар матриц, на которых реализуются чётные значения длины. Ранее для первообразного корня из единицы ε_k порядка k при $n \geqslant k$ для матриц порядка n был известен только пример реализуемости числа $2k-2$ и при дополнительном условии $k|n$ – чисел вида $sk-2$ при $2 \leqslant s \leqslant \frac{n}{k}+1$ (см. [5, разделы 3–4]). Примеры из §2 показывают реализуемость серии чисел $sk-1$ при $2 \leqslant s \leqslant \left[\frac{n-1}{k}\right]$ (независимо от наличия делимости $k|n$). Для $\omega = -1$ как следствие показано отсутствие “дыр” в отрезке $[2, 2\left[\frac{n}{2}\right]]$.

В §3 даны полные ответы на вопрос реализуемости значений длины для всех множителей коммутативности в случае матриц порядков 5 и 6. Заметим, что случай, когда порядок матрицы не превосходит 4, уже был подробно рассмотрен в работе [5].

§2. Примеры реализуемости

В данном разделе мы строим примеры некоторых серий квази-коммутирующих пар матриц, на которых реализуются нечётные значения длины. Основной результат состоит в том, что для любых натуральных $m, k \geqslant 2$, $n \geqslant mk$, и корня ω порядка k из 1 существует ω-коммутирующая пара матриц порядка n длины $mk-1$.

Теорема 2.1. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ и пусть $\mathbb{F}$ – поле, содержащее первообразный корень ε_k из 1 порядка k. Тогда для любого $n \geqslant (m+1)k$ существуют матрицы $A_n, B_n \in M_n(\mathbb{F})$ такие, что $(A_nB_n)^n \neq 0$, $A_nB_n = \varepsilon_k B_nA_n$ и $l(\{A_n, B_n\}) = (m+1)k-1$.*

Доказательство. I. Пусть $n = (m+1)k$. Рассмотрим матрицы

$$A_n = \begin{bmatrix} O_k & L & L & \dots & L \\ O_{m,k} & J_m(1) & O_m & \dots & O_m \\ O_{m,k} & O_m & \varepsilon_k J_m(1) & \dots & O_m \\ & & & \ddots & \\ O_{m,k} & O_m & O_m & \dots & \varepsilon_k^{k-1} J_m(1) \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} J_k(0) & \varepsilon_k^{k-1} U & \dots & \varepsilon_k U & U \\ O_{m,k} & O_m & \dots & O_m & J_m(1) \\ O_{m,k} & J_m(1) & \dots & O_m & O_m \\ & & \ddots & & \\ O_{m,k} & O_m & \dots & J_m(1) & O_m \end{bmatrix},$$

где L – произвольная ненулевая матрица размера $k \times m$. Матрица U однозначно определяется из уравнения $A_nB_n = \varepsilon_k B_nA_n$:

$$\varepsilon_k(J_k(0)L + \varepsilon_k^{k-1} U J_m(1)) = LJ_m(1),$$

откуда

$$U = L - \varepsilon_k J_k(0) L (J_m(1))^{-1}.$$

Непосредственно вычислим A_n^k:

$$A_n^k = \begin{bmatrix} O_k & LJ_m(1)^{k-1} & \varepsilon_k^{k-1} LJ_m(1)^{k-1} & \dots & (\varepsilon_k^{k-1})^{k-1} LJ_m(1)^{k-1} \\ O_{m,k} & J_m(1)^k & O_m & \dots & O_m \\ O_{m,k} & O_m & J_m(1)^k & \dots & O_m \\ & & & \ddots & \\ O_{m,k} & O_m & O_m & \dots & J_m(1)^k \end{bmatrix}.$$

Перейдем к вычислению матрицы B_n^k, чтобы показать, что независимо от выбора матрицы L имеет место равенство $B_n^k = A_n^k$. Обозначим $B_n = \begin{bmatrix} J_k(0) & Y_1 \\ O & B \end{bmatrix}$ и $B_n^k = \begin{bmatrix} J_k(0)^k & Y_k \\ O & B^k \end{bmatrix}$. Тогда $J_k(0)^k = 0$, $B^k = J_m(1)^k \oplus \dots \oplus J_m(1)^k$, и

$$Y_k = \sum_{i=0}^{k-1} J_k(0)^i Y_1 B^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} J_k(0)^i \begin{bmatrix} \varepsilon_k^{k-1} U & \dots & \varepsilon_k U & U \end{bmatrix} B^{k-i-1}.$$

Для любого $s = 1, \dots, k$ получаем

$$\begin{aligned} (Y_k)_{k-s+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_k^{i+s} J_k(0)^i U J_m(1)^{k-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_k^{i+s} J_k(0)^i (L - \varepsilon_k J_k(0) L (J_m(1))^{-1}) J_m(1)^{k-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_k^{i+s} J_k(0)^i L J_m(1)^{k-i-1} - \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_k^{j+s} J_k(0)^j L J_m(1)^{k-j-1} \\ &= \varepsilon_k^s L J_m(1)^{k-1} - \varepsilon_k^{k+s} J_k(0)^k L J_m(1)^{-1} = \varepsilon_k^s L J_m(1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Применяя соотношение $(k-1)(k-s) \equiv s \pmod k$, получаем требуемое равенство $B_n^k = A_n^k$. Таким образом, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_n B_n &= \varepsilon_k B_n A_n, \\ B_n^k &= A_n^k, \\ A_n (A_n^k - E)^m &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, произвольное слово от A_n, B_n с точностью до умножения на скаляр совпадает со словом той же длины, содержащим не более $k-1$ буквы B_n. Более того, все слова, содержащие по крайней мере

$km+1 = n-k+1$ букв A_n, сократимы, в то время как множество матриц $E, A_n, \ldots, A_n^{km}$ линейно независимо. Значит, $l(\{A_n, B_n\}) < km + 1 + k - 1 = k(m+1) = n$.

Предположим, что слово $A_n^{km}B_n^{k-1}$ сократимо и приведем это утверждение к противоречию. Обозначим $A_n = \begin{bmatrix} O & X_1 \\ O & A \end{bmatrix}$. Рассуждая аналогично доказательству [5, лемма 3.4], получаем, что для любого индекса $h \in \mathbb{N}$ структура расположения ненулевых блоков матрицы $A^h B^i$ совпадает со структурой матрицы B^i, матрицы B^i и B^j имеют одинаковую блочную структуру тогда и только тогда, когда $i \equiv j \pmod{k}$, и ненулевые блоки матриц $E = B^0, B, \ldots, B^{k-1}$ попарно не пересекаются.

Следовательно, из сократимости слова $A_n^{km}B_n^{k-1}$ вытекает равенство

$$A_n^{km}B_n^{k-1} = \sum_{j=0}^{km-1} \alpha_j A_n^j B_n^{k-1}. \tag{3}$$

Рассматривая элементы в матрицах, расположенные на позиции $(1,k)$, имеем

$$(B_n^{k-1})_{1,k} = 1, \quad (A_n^p B_n^{k-1})_{1,k} = 0 \ \text{ для } \ p \geqslant 1,$$

откуда следует, что $\alpha_0 = 0$.

Тогда равенство (3) влечёт равенство $A^{km}B^{k-1} = \sum\limits_{j=1}^{km-1} \alpha_j A^j B^{k-1}$, из которого, в силу обратимости матриц A и B, следует, что $A^{km-1} = \sum\limits_{j=1}^{km-1} \alpha_j A^{j-1}$. Получаем противоречие с линейной независимостью степеней матрицы A, из которого вытекает требуемое утверждение:

$$l(\{A_n, B_n\}) = k(m+1) - 1 = n - 1.$$

II. Для $n \geqslant (m+1)k + 1$ рассмотрим матрицы $A_n = O_{n-(m+1)k} \oplus A_{(m+1)k}$, $B_n = O_{n-(m+1)k} \oplus B_{(m+1)k}$. Для матриц A_n, B_n выполнены те же соотношения, что и для матриц $A_{(m+1)k}, B_{(m+1)k}$, поэтому $l(\{A_n, B_n\}) = (m+1)k - 1$. $\square$

Ещё одну серию примеров реализуемости удаётся построить для пар матриц, квази-коммутирующих с множителем -1.

Предложение 2.2. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и $2m \leqslant n$. Если характеристика поля $\mathbb{F}$ отлична от 2, то пара матриц*

$$A_{m,n} = \begin{bmatrix} J_m(1) & O & O \\ O & -J_m(1) & O \\ O & O & O_{n-2m} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F}),$$

$$B_{m,n} = \begin{bmatrix} O & E_m & O \\ E_m & O & O \\ O & O & O_{n-2m} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

удовлетворяет условиям $A_{m,n}B_{m,n} = -B_{m,n}A_{m,n}$ и $l(\{A_{m,n}, B_{m,n}\}) = 2m$.

Доказательство. В случае $n = 2m$ длина данной пары матриц вычислена в [5, пример 3.11].

Пусть $n > 2m$. По построению,

$$\mathcal{L}(\{A_{m,n}, B_{m,n}\}) = \mathcal{L}(\{A_{m,2m}, B_{m,2m}\}) \oplus \mathbb{F}E_{n-2m}.$$

По доказанному выше, $\mathcal{L}(\{A_{m,2m}, B_{m,2m}\}) = \mathcal{L}_{2m}(\{A_{m,2m}, B_{m,2m}\})$. Также имеем

$$O_{2m} \oplus E_{n-2m} = E_n - B_{m,n}^2 \in \mathcal{L}_2(\{A_{m,n}, B_{m,n}\}) \subseteq \mathcal{L}_{2m}(\{A_{m,n}, B_{m,n}\}),$$

откуда получаем требуемое утверждение. □

Следствие 2.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики, отличной от 2. Для любого $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, и любого $l \in [2, 2\left[\frac{n}{2}\right]] \cap \mathbb{N}$ в $M_n(\mathbb{F})$ существует (-1)-коммутирующая пара длины l.*

Доказательство. Получается объединением результатов предложения 2.2 и теоремы 2.1 (для $k = 2$). □

§3. Квази-коммутирующие матрицы малых порядков

В данном разделе решён вопрос о реализуемости натуральных чисел как длин квази-коммутирующих пар матриц порядков 5 и 6. Для матриц, порядок которых не превосходит 4, аналогичный ответ на вопрос о реализуемости был получен ранее в работе [5].

Сначала докажем два общих предложения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Предложение 3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\mathbb{F}$ – поле, содержащее первообразные корни из единицы ε_{n-1} и ε_n порядков $n-1$ и*

n соответственно. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ такие, что произведение AB не является нильпотентным. Тогда

i) *если $AB = \varepsilon_n BA$, то $l(\{A, B\}) = 2n - 2$;*
ii) *если $AB = \varepsilon_{n-1} BA$, то $l(\{A, B\}) = 2n - 4$.*

Доказательство. Утверждение следует из [5, теорема 3.2], поскольку если $AB = \varepsilon_n BA$, то

$$2n - 2 = 2\,\mathrm{ord}\,(\varepsilon_n) - 2 \leqslant l(\{A, B\}) \leqslant 2n - 2,$$

и если $AB = \varepsilon_{n-1} BA$, то

$$2n - 4 = 2\,\mathrm{ord}\,(\varepsilon_{n-1}) - 2 \leqslant l(\{A, B\}) \leqslant 2n - 4,$$

где $\mathrm{ord}\,(\alpha)$ обозначает порядок элемента α в мультипликативной группе поля. □

Предложение 3.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ – произвольные матрицы, имеющие блочную структуру* (1). *Тогда для произвольного слова V от A, B длины не меньшей r все слова от A, B вида VA^{n-r} либо VB^{n-r} длин не меньших n являются сократимыми.*

Доказательство. Из теоремы Гамильтона–Кэли [3] следует, что существуют многочлены $u(x), v(x)$ из $\mathbb{F}[x]$ степеней, не превосходящих $n-r-1$, такие что $A_r^{n-r} = u(A_r)$ и $B_r^{n-r} = v(B_r)$. Согласно [10, лемма 4.2], имеем $l(\{S, T\}) \leqslant r - 1$, значит, существует многочлен $f(x, y) \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ степени, не превосходящей $r - 1$, такой что $V(S, T) = f(S, T)$.

Тогда

$$(V(A, B) - f(A, B))(B^{n-r} - v(B)) = \begin{bmatrix} O & * \\ O & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ O & O \end{bmatrix} = O;$$

$$(V(A, B) - f(A, B))(A^{n-r} - u(A)) = \begin{bmatrix} O & * \\ O & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * \\ O & O \end{bmatrix} = O.$$

Раскрывая скобки в левых частях равенств, получаем, что слова VB^{n-r} и VA^{n-r} сократимы. □

3.1. Матрицы порядка 5. При $n = 5$ справедливы следующие оценки.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_5(\mathbb{F})$ такие, что $AB = \omega BA$ для некоторого $\omega \in \mathbb{F}$, и положим $\mathcal{S} = \{A, B\}$. Тогда*

1) $l(\mathcal{S}) = 8$ *тогда и только тогда, когда* ω *является первообразным корнем из единицы порядка* 5 *и матрица* AB *не является нильпотентной*;
2) $l(\mathcal{S}) = 6$ *тогда и только тогда, когда* ω *является первообразным корнем из единицы порядка* 4 *и матрица* AB *не является нильпотентной*;
3) $l(\mathcal{S}) \leqslant 4$ *для всех остальных значений* ω.

Доказательство. Поскольку множество векторов над $\mathbb{F}$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда оно линейно зависимо над произвольным расширением $\mathbb{F}$, то длина множества матриц над алгебраическим замыканием данного поля совпадает с его длиной над исходным полем. Следовательно, мы можем предполагать без ограничения общности, что поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

1. Если $\omega = 1$, т.е. матрицы A и B коммутируют, или если AB – нильпотентная матрица (в частности, если ω не является корнем из единицы), то оценка $l(\mathcal{S}) \leqslant 4$ следует из [4, теорема 6.1] и [5, лемма 2.3].

2. Если ω – первообразный корень из единицы порядка $k = 4$ или 5, то $l(\mathcal{S}) = 2k - 2$ согласно предложению 3.1.

3. Пусть ω – первообразный корень из единицы порядка $k = 2$ или $k = 3$.

В силу взаимной простоты чисел k и 5, по теореме 1.6 можно считать, что матрицы A и B имеют блочную структуру (1), причём их треугольные блоки имеют порядок $1 \leqslant r \leqslant 3$.

Рассмотрим слова от A и B длины 5. Слова A^5 и B^5 сократимы по теореме Гамильтона–Кэли [3]. Условие $k \nmid 5$ влечёт сократимость слов A^4B и AB^4 (см. [5, лемма 3.5]). Таким образом, для доказательства оценки $l(\mathcal{S}) \leqslant 4$ достаточно проверить сократимость слов A^3B^2 и A^2B^3.

i. Если $r = 2$ или $r = 3$, то слова A^rB^{5-r} и B^rA^{5-r} сократимы по предложению 3.2.

ii. Если $r = 1$, то $k|4$ и $k \leqslant 3$, откуда $k = 2$ и $\omega = -1$. Согласно (2), имеем

$$A = \begin{bmatrix} s & X_1 & X_2 \\ O & C & O \\ O & O & -C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} t & Y_1 & Y_2 \\ O & O & D_1 \\ O & D_2 & O \end{bmatrix},$$

где $st = 0$, $C, D_1, D_2 \in M_2(\mathbb{F})$.

Если $C = \gamma E_2$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{F}$, то $(B - tE_5)(A^2 - \gamma^2 E_5) = 0$ аналогично доказанному в пункте i. Значит, слово BA^2 сократимо, откуда следует, что слова $B^2A^3 = A^3B^2$ и $B^3A^2 = A^2B^3$, содержащие его в качестве подслова, тоже сократимы.

Предположим, что матрица C не является скалярной. Ненулевая нескалярная матрица порядка 2 является циклической; следовательно, матрицы D_1 и D_2, коммутирующие с матрицей C, являются линейными многочленами от C и, в частности, $D_1D_2 = D_2D_1$. Тогда

$$A^2 = \begin{bmatrix} s^2 & X_1' & X_2' \\ O & C^2 & O \\ O & O & C^2 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} t^2 & Y_1' & Y_2' \\ O & D_1D_2 & O \\ O & O & D_2D_1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы C^2 и D_1D_2 также выражаются в виде линейных многочленов от C, т.е. $C^2 = \gamma_1 C + \gamma_0 E_2$, $D_1D_2 = \delta_1 C + \delta_0 E_2$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ обозначают собственные числа матрицы C. Тогда

$$(C^2 - (\lambda_1\gamma_1 + \gamma_0)E_2)(D_1D_2 - (\lambda_2\delta_1 + \delta_0)E_2) = \gamma_1\delta_1\chi_C(C) = 0,$$

где $\chi_C(t)$ обозначает характеристический многочлен матрицы C, и

$$(A^2 - (\lambda_1\gamma_1 + \gamma_0)E_5)(B^2 - (\lambda_2\delta_1 + \delta_0)E_5) = \begin{bmatrix} u & Z_1 & Z_2 \\ O & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix}.$$

Умножая данное равенство слева на матрицу $A - sI_5$ или $B - tI_5$, получаем в правой части равенства нулевую матрицу. Значит, слова A^3B^2 и $BA^2B^2 = A^2B^3$ сократимы, что доказывает утверждение. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. При $n = 5$ полный ответ на вопрос реализуемости длин квази-коммутирующих пар матриц приведен в следующей таблице*:

$l(\{A,B\})$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
$AB = BA$	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$AB = \omega BA,\ \omega \neq 1,\ (AB)^5 = 0$	-	+	+	+	+	-	-	-	-
$(AB)^5 \neq 0,\ AB = -BA$	-	-	+	+	+	-	-	-	-
$(AB)^5 \neq 0,\ AB = \varepsilon_3 BA$	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$(AB)^5 \neq 0,\ AB = \varepsilon_4 BA$	-	-	-	-	-	-	+	-	-
$(AB)^5 \neq 0,\ AB = \varepsilon_5 BA$	-	-	-	-	-	-	-	-	+

Здесь знаком “+” обозначены реализуемые значения и знаком “-” – нереализуемые.

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_5(\mathbb{F})$ такие, что $AB = \omega BA$ для некоторого $\omega \in \mathbb{F}$.

1. Для $\omega = 1$ утверждение следует из [5, теорема 2.2].

2. Для ω, не являющегося корнем из единицы, утверждение следует из [5, теорема 2.4].

3. Для $\omega = \varepsilon_k$ нижняя граница реализуемости $l(\{A, B\}) \geqslant 2k - 2$ получена в [5, теорема 3.2]. Верхние границы и утверждение для $\omega = \varepsilon_4, \varepsilon_5$ получены в теореме 3.3.

4. Для $\omega = -1$ примеры реализуемости $3, 4$ построены в теореме 2.1 (если положить $m = 1$) и предложении 2.2 (если положить $m = 2$) соответственно. □

3.2. Матрицы порядка 6.

Предложение 3.5. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_6(\mathbb{F})$ такие, что $AB = \omega BA$ для некоторого $\omega \in \mathbb{F}$ и матрица AB не является нильпотентной, и положим $\mathcal{S} = \{A, B\}$. Тогда*

1) $l(\mathcal{S}) = 10$ *тогда и только тогда, когда* $\omega = \varepsilon_6$;
2) $l(\mathcal{S}) = 8$ *тогда и только тогда, когда* $\omega = \varepsilon_5$;
3) $l(\mathcal{S}) = 7$ *тогда и только тогда, когда* $\omega = \varepsilon_3$;
4) $l(\mathcal{S}) = 6$ *тогда и только тогда, когда* $\omega = \varepsilon_2$ *или* $\omega = \varepsilon_4$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.3, мы можем предполагать без ограничения общности, что поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

I. Если $\omega = 1$, то матрицы A и B коммутируют. Если ω не является корнем из единицы, то матрица AB нильпотентна. В обоих случаях $l(\mathcal{S}) \leqslant 5$ согласно [4, теорема 6.1] и [5, лемма 2.3].

II. Если ω – первообразный корень из единицы порядка $k = 5$ или $k = 6$, то $l(\mathcal{S}) = 2k - 2$ согласно предложению 3.1.

III. Рассмотрим случай, когда ω – первообразный корень из единицы порядка $2 \leqslant k \leqslant 4$.

i. Пусть $k = 3$. Покажем, что в этом случае $l(\mathcal{S}) \neq 6$. В силу теоремы 1.6 можно считать, что матрицы A и B имеют блочную структуру (1) либо без треугольного блока, либо с треугольным блоком порядка $r = 3$.

Если $r = 3$, то слова AB^5, BA^5, A^2B^4, B^2A^4, A^3B^3 длины 6 сократимы в силу предложения 3.2; следовательно, $l(\mathcal{S}) \leqslant 5$.

Рассмотрим вариант $r = 0$, т.е. случай, когда матрицы A, B имеют вид (2).

Если ни одна из матриц A, B не является циклической, то $l(\mathcal{S}) \leqslant 2(n - k) - 2 = 4$ по [5, теорема 4.4]. Предположим, что матрица A

является циклической. Это условие влечёт, что матрица $C \in M_2(\mathbb{F})$ также является циклической, т.е. C не является скалярной матрицей. Докажем, что матрица C^3 также не является скалярной. Из теоремы 1.6 следует, что если у матрицы C есть два различных собственных числа λ_1, λ_2, то $(\lambda_1/\lambda_2)^3 \neq 1$, откуда получаем, что собственные числа матрицы C^3 тоже различны. Если матрица C сопряжена с жордановой матрицей $J_2(\lambda)$, то из обратимости матрицы A получаем, что $\lambda \neq 0$, а тогда матрица C^3 сопряжена с матрицей $\begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$. Следовательно, матрица C^3 является скалярной тогда и только тогда, когда $\operatorname{char}\mathbb{F} = 3$. Данное условие не выполнено, поскольку поле характеристики 3 не содержит первообразного корня из единицы порядка 3 (т.к. $x^3 - 1 = (x-1)^3$ для любого $x \in \mathbb{F}$). Тогда $\langle E, A^3\rangle = \langle E, C \oplus C \oplus C\rangle$. Из того, что централизатор циклической матрицы C совпадает с алгеброй с единицей, порождённой C (см., например, [3, глава VIII,§2]), и соотношения $D_iC = CD_i$, получаем, что $D_i = p_i(C)$ для некоторого многочлена p_i степени не большей $\frac{n}{k} - 1$, $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, все матрицы D_i попарно коммутируют. Таким образом, имеем $B^3 = D_1D_2D_3 \oplus D_1D_2D_3 \oplus D_1D_2D_3 \in \langle E, A^3\rangle$. Значит, в базис пространства $\mathcal{L}(\mathcal{S})$, состоящий из слов от A, B, входят слова видов A^j, A^jB, A^jB^2. Из условий обратимости матрицы B, попарного непересечения блоков матриц B^0, B и B^2 и равенства $\deg A = 5$ получаем, что слово A^5B^2 несократимо и $l(\mathcal{S}) = 7$, аналогично доказательству [5, пример 3.11].

ii. Пусть $k = 4$. Пример пары матриц длины $2k - 2 = 6$ построен в [5, пример 3.8]. Таким образом, достаточно показать, что другие значения не реализуются. Нижняя оценка длины $l(\mathcal{S}) \geqslant 2k-2 = 6$ следует из [5, теорема 3.2]. По теореме 1.6 можно считать, что матрицы A и B имеют блочную структуру (1) с треугольным блоком порядка $r = 2$. В этом случае слова A^3B^4, B^3A^4, A^2B^5 и B^2A^5 длины 7 сократимы в силу предложения 3.2, откуда получается верхняя оценка $l(\mathcal{S}) \leqslant 6$.

iii. Пусть $k = 2$. Пример пары матриц длины 6 построен в предложении 2.2 (если положить $m = 3$). По аналогии с рассуждением в предыдущем пункте остаётся показать, что значения $l(\mathcal{S}) > 6$ не реализуемы для $k = 2$. По теореме 1.6 снова можно считать, что матрицы A и B имеют блочную структуру (1) с треугольным блоком размера $r = 0, 2, 4$. Тогда по [5, теорема 4.4]

$$l(\mathcal{S}) \leqslant \max\{n + k - 2, 2(n-k) - r - 2\} \leqslant \max\{6, 6 - r\} = 6. \qquad \square$$

Теорема 3.6. *Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. При $n = 6$ полный ответ на вопрос реализуемости длин квази-коммутирующих пар матриц приведен в следующей таблице*:

$l(\{A,B\})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$AB = BA$	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
$AB = \omega BA,\ \omega \neq 1,\ (AB)^6 = 0$	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-
$(AB)^6 \neq 0,\ AB = -BA$	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$(AB)^6 \neq 0,\ AB = \varepsilon_3 BA$	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	-
$(AB)^6 \neq 0,\ AB = \varepsilon_4 BA$	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
$(AB)^6 \neq 0,\ AB = \varepsilon_5 BA$	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
$(AB)^6 \neq 0,\ AB = \varepsilon_6 BA$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+

Доказательство. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_5(\mathbb{F})$ такие, что $AB = \omega BA$ для некоторого $\omega \in \mathbb{F}$.

Ссылки на утверждения для $\omega = 1$ или ω, не являющегося корнем из единицы, а также на нижнюю границу реализуемости $l(\{A,B\}) \geqslant 2k-2$ для корня порядка k из единицы даны в доказательстве теоремы 3.4. Верхние границы реализуемости и утверждение для $\omega = \varepsilon_5, \varepsilon_6$ получены в предложении 3.5.

Для $\omega = -1$ примеры реализуемости длин $3, 5$ построены в теореме 2.1 (если положить $m = 1$ и $m = 2$), а реализуемости 4 – в предложении 2.2 (если положить $m = 2$) соответственно.

Для $\omega = \varepsilon_3$ пример реализуемости длины 5 построен в теореме 2.1 (если положить $m = 1$). $\square$

Благодарности. Авторы благодарят профессора Фолькера Мерманна за интересные обсуждения этого круга вопросов.

Литература

1. D. Constantine, M. Darnall, *Lengths of finite dimensional representations of PBW algebras.* — Linear Algebra Appl. **395** (2005), 175–181.
2. M. P. Drazin, *A reduction for the matrix equation $AB = \varepsilon BA$.* — Proc. Camb. Philos. Soc. **47** (1951), 7–10.
3. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Наука, 1967.
4. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
5. A. E. Guterman, O. V. Markova, V. Mehrmann, *Lengths of quasi-commutative pairs of matrices*, to appear in Linear Algebra Appl.
6. O. Holtz, V. Mehrmann, H. Schneider, *Potter, Wielandt, and Drazin on the Matrix Equation $AB = \omega BA$: New Answers to Old Questions.* — Amer. Math. Monthly **111**, No. 8 (2004), 655–667.

7. C. Kassel, *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics, **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.
8. R. Loewy, V. Mehrmann, *A note on Potter's theorem for quasi-commutative matrices*. — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1812–1825.
9. Yu. I. Manin, *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM, Montréal, 1988.
10. О. В. Маркова, *Вычисление длин матричных подалгебр специального вида*. — Фундамент. и прикл. матем. **13**, No. 4 (2007), 165–197.
11. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra*. — J. Algebra **197** (1997), 535–545.

Guterman A. E., Markova O. V. The realizability problem for values of the length function for quasi-commuting matrix pairs.

The paper continues the investigation of the lengths of quasi-commuting matrix pairs; specifically, it considers the problem of realizability of different positive integers as values of the length function for quasi-commuting matrix pairs.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: alexander.guterman@gmail.com

E-mail: ov_markova@mail.ru

Поступило 3 ноября 2015 г.