Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Е. Г. Голузина

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОДНОМ КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Обозначения и основные результаты

Пусть T – класс функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0.$$

В [1] получены зависящие от $f(r)$, $0 < r < 1$, точные оценки коэффициентов c_n для $n \leqslant 4$. В настоящей работе найдены зависящие от $f(r)$, $0 < r < 1$, точные оценки коэффициентов c_5 и c_6. При этом, как и в [1], использованы интегральное представление класса T [2, 3] и полученные в [4] результаты для множеств значений систем коэффициентов в классах функций, представимых интегралом Стилтьеса.

Введем следующие обозначения. Положим

$$\rho = r + \frac{1}{r}, \quad 0 < r < 1,$$

$$\varphi(x) = \Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^4 - 3\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^2 + 1,$$

$$x_1 = \Big(\rho - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\Big)^{-1}, \qquad x_2 = \Big(\rho - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\Big)^{-1},$$

$$x_3 = \Big(\rho + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\Big)^{-1}, \qquad x_4 = \Big(\rho + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\Big)^{-1},$$

$$x_M = \frac{1}{\rho}, \qquad x_{m1} = \Big(\rho + \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)^{-1}, \qquad x_{m2} = \Big(\rho - \sqrt{\frac{3}{2}}\Big)^{-1}.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Ключевые слова: типично вещественная функция, оценки коэффициентов.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in T$ *и* $0 < r < 1$, $x = f(r)$. *Если* $\rho \geqslant \frac{62}{21}$, *то имеют место точные оценки:*

$$c_5 \leqslant 5 \quad \text{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\Big], \tag{1}$$

$$c_5 \geqslant -\frac{5}{4} \quad \text{при} \quad x \in [x_{m1}, x_{m2}], \tag{2}$$

$$c_5 \geqslant \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \Big\{\Big[x_{m2}, \frac{1}{\rho-2}\Big] \bigcup \Big[\frac{1}{\rho+2}, x_{m1}\Big]\Big\}. \tag{3}$$

Если $\rho < \frac{62}{21}$, *то имеют место точные оценки* (1), (2) *и точные оценки:*

$$c_5 \geqslant \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \Big\{\Big[\frac{1}{\rho+2}, x_{m1}\Big] \bigcup \big[x_{m2}, \widetilde{x}_1\big]\Big\}, \tag{4}$$

$$c_5 \geqslant 5 - \frac{[1 - x(\rho-2)](5 - \varphi(\widetilde{x}_1))}{1 - \widetilde{x}_1(\rho - 2)} \quad \text{при} \quad x \in \Big[\widetilde{x}_1, \frac{1}{\rho-2}\Big]. \tag{5}$$

Здесь $x_{m2} < \widetilde{x}_1 < \frac{1}{\rho-2}$ *и* $\widetilde{x}_1$ *– корень уравнения*

$$x^3 - \frac{2(3\rho^2 + 4\rho + 1)}{(\rho+2)(\rho^2+1)} x^2 + \frac{3(3\rho+2)}{(\rho+2)(\rho^2+1)} x - \frac{4}{(\rho+2)(\rho^2+1)} = 0. \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\rho &= r + \frac{1}{r}, \quad 0 < r < 1;\\
\psi(x) &= \Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^5 - 4\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^3 + 3\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big);\\
x_{01} &= \frac{1}{\rho - \sqrt{3}},\ x_{02} = \frac{1}{\rho - 1},\ x_{03} = \frac{1}{\rho},\ x_{04} = \frac{1}{\rho+1},\ x_{05} = \frac{1}{\rho + \sqrt{3}};\\
x'_{m1} &= \Big(\rho - \sqrt{(6 + \sqrt{21})/5}\Big)^{-1}, \quad x'_{m2} = \Big(\rho + \sqrt{(6 - \sqrt{21})/5}\Big)^{-1},\\
x'_{M1} &= \Big(\rho - \sqrt{(6 - \sqrt{21})/5}\Big)^{-1}, \quad x'_{M2} = \Big(\rho + \sqrt{(6 + \sqrt{21})/5}\Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in T$ *и* $0 < r < 1, x = f(r)$. *Если* $\rho \geqslant \frac{21}{8}$, *то имеют место точные оценки:*

$$c_6 \leqslant \psi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2}, \widetilde{x}_2\Big], \tag{7}$$

$$c_6 \leqslant 6 - \frac{[1 - x(\rho-2)](6 - \psi(\widetilde{x}_2))}{1 - \widetilde{x}_2(\rho-2)} \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\widetilde{x}_2, \frac{1}{\rho-2}\Big], \tag{8}$$

$$c_6 \geqslant -6 + \frac{[x(\rho+2) - 1](6 + \psi(\widetilde{x}_3))}{\widetilde{x}_3(\rho+2) - 1} \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2}, \widetilde{x}_3\Big], \tag{9}$$

$$c_6 \geqslant \psi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\widetilde{x}_3, \frac{1}{\rho-2}\Big]. \tag{10}$$

Если $\rho_0 < \rho < \frac{21}{8}$, *то справедливы точные оценки* (7)–(9) *и точные оценки:*

$$c_6 \geqslant \psi(x) \quad \textit{при} \quad x \in [\widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4], \tag{11}$$

$$c_6 \geqslant 6 - \frac{[1 - x(\rho-2)](6 - \psi(\widetilde{x}_4))}{1 - \widetilde{x}_4(\rho-2)} \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\widetilde{x}_4, \frac{1}{\rho-2}\Big]. \tag{12}$$

Здесь $\frac{1}{\rho+2} < \widetilde{x}_2 < x'_{M2}$, $x'_{m1} < \widetilde{x}_3 < \frac{1}{\rho-2}$, $\widetilde{x}_3 < \widetilde{x}_4 < \frac{1}{\rho-2}$; $\widetilde{x}_2$ *и* $\widetilde{x}_4$ – *корни уравнения*

$$(\rho^4 + 2\rho^3 + 3)x^4 - 4(2\rho+3)\rho^2 x^3 + 18\rho(\rho+1)x^2 - 8(2\rho+1)x + 5 = 0, \tag{13}$$

а $\widetilde{x}_3$ – *корень уравнения*

$$(\rho^4 - 2\rho^3 + 3)x^4 + 4(3-2\rho)\rho^2 x^3 + 18\rho(\rho-1)x^2 + 8(1-2\rho)x + 5 = 0; \tag{14}$$

$\widetilde{x}_3(\rho_0) = \widetilde{x}_4(\rho_0)$. *Если* $\rho \leqslant \rho_0$, *то справедливы точные оценки* (7), (8) *и*

$$c_4 \geqslant 3(\rho^2 - 4)f(r) - 3\rho \quad \textit{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\Big].$$

§2. Доказательства

Для класса T имеет место интегральное представление:

$$f(z) \in T \Leftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1, \tag{15}$$

где M_1 – класс функций $\mu(t)$, неубывающих на [-1, 1] и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$. Из (15) получаем интегральное представление для системы $\{f(r),\, c_5\}$:

$$f(r) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\mu(t)}{\rho - 2t}, \quad c_5 = \int\limits_{-1}^{1} (16t^4 - 12t^2 + 1)\, d\mu(t), \quad \mu(t) \in M_1.$$

Из полученных в [4] общих результатов следует, что D – множество значений системы $\{f(r),\, c_5\}$ на классе T – совпадает с выпуклой оболочкой кривой l:

$$l = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y = \varphi(x), \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2},\, \frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\},$$

где $x = f(r)$, $y = c_5$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^4}[(\rho x - 1)^4 - 3x^2(\rho x - 1)^2 + x^4].$$

Имеем

$$\varphi(x_j) = 0, \quad j = 1,2,3,4;$$

$$\varphi'(x) = 4\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^3 \frac{1}{x^2} - 6\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^2},$$

$$\varphi'(x_{mj}) = 0, \quad j = 1,2; \quad \varphi'(x_M) = 0;$$

$$\varphi''(x) = 12\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^2 \frac{1}{x^4} - 8\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^3 \frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^2} + 12\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^3}.$$

Заметим, что $\varphi''\big(\frac{1}{\rho-2}\big) = 0$ при $\rho = \frac{62}{21}$. Поэтому в случае $\rho \geqslant \frac{62}{21}$ получаем, что $\partial D = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$, где ∂D – граница множества D.

Здесь и далее

$$l_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = 5 \quad \text{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2},\, \frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\},$$

$$l_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \Big[\frac{1}{\rho+2},\, x_{m1}\Big]\Big\},$$

$$l_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = -\frac{5}{4} \quad \text{при} \quad x \in [x_{m1},\, x_{m2}]\big\},$$

$$l_4 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \Big[x_{m2},\, \frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\}.$$

В случае $\rho < \frac{62}{21}$ имеем $\partial D = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4' \cup l_4''$, где

$$l_4' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in [x_{m2}, \widetilde{x}_1]\},$$

$$l_4'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 5 - \frac{[1-x(\rho-2)][5-\varphi(\widetilde{x}_1)]}{1-\widetilde{x}_1(\rho-2)} \ \text{при} \ x \in \Big[\widetilde{x}_1, \frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\}.$$

Здесь $\widetilde{x}_1$ – точка касания прямой $y = y_x'\big(x - \frac{1}{\rho-2}\big) + 5$ с кривой l.

Для нахождения точки $\widetilde{x}_1$ имеем уравнение

$$\varphi(x) = \varphi'(x)\Big(x - \frac{1}{\rho-2}\Big) + 5,$$

т.е. уравнение

$$\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^4 - 3\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^2 + 1 = \Big[4\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)^3 - 6\Big(\rho - \frac{1}{x}\Big)\Big]\frac{1}{x^2}\Big(x - \frac{1}{\rho-2}\Big) + 5.$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$\Big(x - \frac{1}{\rho-2}\Big)^2(\rho-2)\big[(\rho^2+1)(\rho+2)x^3 - 2(3\rho+1)(\rho+1)x^2 + 3(3\rho+2)x - 4\big] = 0.$$

Из сказанного выше нетрудно получить оценки (1)–(5).

Точкам на l_1 соответствуют функции

$$f_1(z) = \lambda_1 \frac{z}{(1-z)^2} + \lambda_2 \frac{z}{(1+z)^2},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(\rho-2)\big[f(r)(\rho+2) - 1\big], \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(\rho+2)\big[1 - f(r)(\rho-2)\big].$$

Точкам на l_2 соответствуют функции

$$f(z) = \frac{z}{1 - z\Big[\rho - \frac{1}{f(r)}\Big] + z^2} \tag{16}$$

при $f(r) \in [\frac{1}{\rho+2}, x_{m1}]$, а точкам на l_4 соответствуют функции (16) при $f(r) \in [x_{m2}, \frac{1}{\rho-2}]$.

Точкам на l_3 соответствуют функции

$$f(z) = \lambda_1 \frac{z}{1 - (\rho - \frac{1}{x_{m1}})z + z^2} + \lambda_2 \frac{z}{1 - (\rho - \frac{1}{x_{m2}})z + z^2}$$

при $f(r) \in [x_{m1}, x_{m2}]$, где

$$\lambda_1 = \frac{x_{m2} - f(r)}{x_{m2} - x_{m1}}, \qquad \lambda_2 = \frac{f(r) - x_{m1}}{x_{m2} - x_{m1}}.$$

Точкам на l_4' соответствуют функции (16) при $f(r)\in[x_{m2},\,\widetilde{x}_1]$, а точкам l_4'' – функции

$$f(z)=\lambda_1\frac{z}{1-(\rho-\frac{1}{\widetilde{x}_1})z+z^2}+\lambda_2\frac{z}{(1-z)^2}\quad\text{при}\quad f(r)\in\Big[\widetilde{x}_1,\,\frac{1}{\rho-2}\Big],$$

где

$$\lambda_1=\frac{1-x(\rho-2)}{1-\widetilde{x}_1(\rho-2)},\qquad \lambda_2=\frac{(x-\widetilde{x}_1)(\rho-2)}{1-\widetilde{x}_1(\rho-2)}.$$

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2.

Из (15) получаем интегральное представление для системы $\{f(r),c_6\}$:

$$f(r)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu(t)}{\rho-2t},\quad c_6=\int\limits_{-1}^{1}(32t^5-32t^3+6t)\,d\mu(t),\quad \mu(t)\in M_1.$$

Следовательно, в силу [4], $\widetilde{D}$ – множество значений системы $\{f(r),\,c_6\}$ на классе T – совпадает с выпуклой оболочкой кривой L:

$$L=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\,y=\psi(x),\quad x\in\Big[\frac{1}{\rho+2},\,\frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\},$$

где $x=f(r),\quad y=c_6,\quad \psi(x)=(\rho-\frac{1}{x})^5-4(\rho-\frac{1}{x})^3+3(\rho-\frac{1}{x})$.

Имеем

$$\psi(x_{0j})=0,\quad j=1,2,\ldots,5;$$

$$\psi'(x)=\Big[5\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^4-12\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^2+3\Big]\frac{1}{x^2},$$

$$\psi'(x'_{mj})=0,\quad \psi'(x'_{Mj})=0;\quad j=1,2.$$

Далее, имеем

$$\psi''(x)=20\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^3\frac{1}{x^4}-24\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^4}-\frac{6}{x^3}-10\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^4\frac{1}{x^3}+24\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^2\frac{1}{x^3}.$$

Заметим, что $\psi''\big(\frac{1}{\rho-2}\big)=0$ при $\rho=\frac{21}{8}$. Поэтому при $\rho\geqslant\frac{21}{8}$ получаем

$$\partial\widetilde{D}=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4.$$

Здесь и далее

$$L_1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\psi(x)\quad \text{при}\quad x\in\Big[\frac{1}{\rho+2},\,\widetilde{x}_2\Big]\Big\},$$

$$L_2=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=6-\frac{[1-x(\rho-2)][6-\psi(\widetilde{x}_2)]}{1-\widetilde{x}_2(\rho-2)}\ \text{при}\ x\in\Big[\widetilde{x}_2,\frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\},$$

$$L_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=-6+\frac{[x(\rho+2)-1][6+\psi(\widetilde{x}_3)]}{\widetilde{x}_3(\rho+2)-1}\ \text{при}\ x\in\Big[\frac{1}{\rho+2},\widetilde{x}_3\Big]\Big\},$$

$$L_4=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\psi(x)\quad \text{при}\quad x\in\Big[\widetilde{x}_3,\,\frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\}.$$

В случае $\rho_0<\rho<\frac{21}{8}$ получаем

$$\partial\widetilde{D}=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4'\cup L_4'',$$

где

$$L_4'=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=\psi(x)\quad \text{при}\quad x\in[\widetilde{x}_3,\,\widetilde{x}_4]\Big\},$$

$$L_4''=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=6-\frac{[1-x(\rho-2)][6-\psi(\widetilde{x}_4)]}{1-\widetilde{x}_4(\rho-2)}\ \text{при}\ x\in\Big[\widetilde{x}_4,\frac{1}{\rho-2}\Big]\Big\}.$$

Для нахождения $\widetilde{x}_2$ и $\widetilde{x}_4$ – точек касания прямой $y=y'(x)(x-\frac{1}{\rho-2})+6$ с кривой L – имеем уравнение

$$\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^5-4\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^3+3\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big) =\Big[5\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^4-12\Big(\rho-\frac{1}{x}\Big)^2+3\Big]\frac{1}{x^2}\Big(x-\frac{1}{\rho-2}\Big)+6,$$

которое запишем в виде

$$\Big(x-\frac{1}{\rho-2}\Big)^2(\rho-2)\big[(\rho^4+2\rho^3+3)x^4 -4\rho^2(2\rho+3)x^3+18\rho(\rho+1)x^2-8(2\rho+1)x+5\big]=0.$$

Для нахождения точки $\widetilde{x}_3$ – точки касания прямой $y=y_x'\big(x-\frac{1}{\rho+2}\big)-6$ с кривой L – имеем уравнение

$$\Big(x-\frac{1}{\rho+2}\Big)^2(\rho+2)\big[(\rho^4-2\rho^3+3)x^4 -4\rho^2(2\rho-3)x^3+18\rho(\rho-1)x^2-8(2\rho-1)x+5\big]=0.$$

В случае $\rho \leqslant \rho_0$ имеем $\partial\widetilde{D} = L_1 \cup L_2 \cup L_5$, где

$$L_5 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = (\rho^2-4)3x - 3\rho \text{ при } x \in \big[\frac{1}{\rho+2}, \frac{1}{\rho-2}\big]\Big\}.$$

Из сказанного выше следуют оценки (7)–(12).

Точкам на L_1 соответствуют функции (16) при $f(r) \in [\frac{1}{\rho+2}, \widetilde{x}_2]$, точкам на L_4 – функции (16) при $f(r) \in [\widetilde{x}_3, \frac{1}{\rho-2}]$.

Точкам на L_j, $j = 2, 3$, соответствуют функции

$$f_j(z) = \lambda_1 \frac{z}{1-(\rho-\frac{1}{\widetilde{x}_j})z+z^2} + \lambda_2 \frac{z}{[(1-(-1)^j z]^2}, \tag{17}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{f(r)(\rho-(-1)^j 2)-1}{\widetilde{x}_j(\rho-(-1)^j 2)-1}, \qquad \lambda_2 = \frac{\big[\widetilde{x}_j - f(r)\big](\rho-(-1)^j 2)}{\widetilde{x}_j(\rho-(-1)^j 2)-1},$$

и

$$f(r) \in \Big[\widetilde{x}_2, \frac{1}{\rho-2}\Big] \quad \text{при} \quad j=2,$$

$$f(r) \in \Big[\frac{1}{\rho+2}, \widetilde{x}_3\Big] \quad \text{при} \quad j=3.$$

Точкам на L_4' соответствуют функции (16) при $f(r) \in [\widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4]$, точкам на L_4'' – функции (17) при $j = 4$ и $f(r) \in [\widetilde{x}_4, \frac{1}{\rho-2}]$. Точкам на L_5 соответствуют функции (17) при $j = 2$, $\widetilde{x}_j = \rho+2$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Некоторые точные оценки для типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 81–88.
2. M. S. Robertson, *On the coefficients of a typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 565–572.
3. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27(69)** (1950), 201–218.
4. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

Goluzina E. G. Sharp estimates of the first coefficients for a class of typically real functions.

Let T be the class of functions $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ regular and typically real in the disk $U = |z| < 1$. Sharp estimates on the coefficients c_5 and c_6 in terms of the values $f(r)$, $0 < r < 1$, are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 17 ноября 2015 г.