Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, К. А. Таранин

О ДЕЛИМОСТИ ПЕРМАНЕНТА (± 1)-МАТРИЦ

§1. Введение

Класс $(-1, 1)$-матриц очень важен в комбинаторике, численных методах, обработке информации и других прикладных областях. Например, в этом классе находится широко известный подкласс матриц Адамара, т.е. $(-1, 1)$-матриц H порядка n, удовлетворяющих уравнению $HH^t = nE_n = H^tH$, где E_n – единичная матрица и X^t обозначает транспонированную матрицу для матрицы X. Стоит отметить, что даже существование матриц Адамара для некоторых значений n является открытой проблемой.

Следуя обозначениям из [4], будем обозначать через Ω_n множество $(-1, 1)$-матриц порядка n. В этой работе мы будем исследовать функцию перманента на множестве Ω_n.

Определение 1.1. Функция перманента для квадратной матрицы A определяется следующим образом:

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

где S_n обозначает группу перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Заметим, что поведение функции перманента на множестве $(-1, 1)$-матриц намного сложнее для исследования, чем, например, поведение перманента на $(0, 1)$-матрицах или на других неотрицательных матрицах. В частности, перманент $(0, 1)$-матрицы не может убывать при замене нуля на единицу. В то время как перманент $(-1, 1)$-матрицы напрямую не зависит от числа элементов -1 в рассматриваемой матрице. Более того, легко видеть, что $(-1, 1)$-матрица четного порядка имеет максимальное возможное значение перманента, равное $n!$, как в случае, когда все ее элементы равны -1, так и в случае, когда в

Ключевые слова: перманент, ± 1-матрицы, делимость.

Работа частично финансово поддержана грантами МД-962.2014.1, РФФИ 15-01-01132 и 15-31-20329.

точности половина ее элементов равна -1, см. [9, пример 1]. Последнее показывает, что на множестве Ω_n функция перманента ведет себя достаточно нестандартно.

Первые исследования перманента на Ω_n восходят к работам [5, 7], позднее эти исследования были продолжены в [3, 6, 9], см. также библиографию этих работ. Недавние исследования по данной теме можно найти в работе [10] и ее библиографии. Многие задачи, связанные с исследованием функции перманента $(-1, 1)$-матриц, принципиально зависят от факта обращения в нуль этой функции на множестве Ω_n. Эффективный метод доказательства того, что перманент матрицы является ненулевым, состоит в установлении того факта, что он не делится на достаточно большую степень двойки. Наша статья посвящена исследованию последнего вопроса.

Классическим свойством функции определителя является утверждение о том, что для всех матриц $A \in \Omega_n$ справедливо, что $\det(A) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2^{n-1})$, см. [1, задача 526]. Аналог этого результата для функции перманент был получен Вонгом в работе [9], а именно, было установлено, что

$$\mathrm{per} A \equiv \begin{cases} 0 \quad (\mathrm{mod}\, 2^{n/2}), & \text{если} \quad n \text{ четное },\\ 0 \quad (\mathrm{mod}\, 2^{(n-1)/2}), & \text{если} \quad n \text{ нечетное }. \end{cases} \tag{1}$$

Позднее Кройтер и Зайфтер, см. [4], получили первые результаты, касающиеся свойства неделимости значений перманента на степени двойки. Для формулировки этих результатов нам потребуются следующие обозначения.

Определение 1.2. Нижняя целая часть $\lfloor a \rfloor$ вещественного числа a – это целое число n_1, удовлетворяющее неравенству $a - 1 < n_1 \leqslant a$. Дробная часть числа a определяется как $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.

Предложение 1.3. [4, лемма 5 и предложение 4] *Пусть $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда для $A \in \Omega_n$ справедливо, что*

$$\mathrm{per}(A) \,\vdots\, 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}.$$

Предложение 1.4. [4, лемма 5] *В условиях предыдущего утверждения степень $n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ нельзя заменить на некоторое $d_0 > n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$. Более того, пусть $A \in \Omega_n$, где $n = 2^t - 1$ для некоторого t. Тогда*

$$\mathrm{per}(A) \not\vdots\, 2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}.$$

Предложение 1.5. [4, предложение 5] *Пусть* $n \neq 2^t - 1$ *для всех* $t \in \mathbb{N}$, *тогда для всех* $A \in \Omega_n$ *справедливо, что:*

$$\operatorname{per}(A) \,\vdots\, 2^{n-\lfloor \log_2 n \rfloor}.$$

Эти утверждения установлены в работе [4]. Однако их доказательство весьма сложно и основано на ряде результатов, доказанных в работе Перфект, см. [6], использующей, в частности, дополнительное понятие n-допустимости.

В настоящей работе предложен новый, более простой метод доказательства всех указанных утверждений. Предложенный метод позволяет доказать данные результаты напрямую, за счет ряда комбинаторных рассмотрений, в частности он отличается от техники применявшейся в [4] и не использует результаты [6].

Известна гипотеза Кройтера, которая утверждает, что значение $2^{n-\lfloor \log_2 (n+1) \rfloor}$ всегда достижимо, и тогда, согласно утвержениям 1.3 и 1.5, оно также является минимальным положительным значением перманента для матриц из Ω_n. Это предположение проверено для $n \leqslant 20$ в работе Ванлеса [10]. Для последующих значений n данный вопрос продолжает оставаться открытым.

Наша статья построена следующим образом. В §2 мы выводим формулу для вычисления перманента $(-1, 1)$-матриц, основанную на вычислении числа обобщенных диагоналей, содержащих заданное число отрицательных элементов. §3 содержит некоторые предварительные технические результаты о поведении функций $\{\,\cdot\,\}$, $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ и $\lfloor \log_2 n \rfloor$, необходимые для дальнейшего доказательства. В §4 мы доказываем утверждения 1.3, 1.4 и 1.5.

§2. Формула вычисления перманента (± 1)-матриц

Рассмотрим матрицу $A \in \Omega_n$.

Определение 2.1. *Обобщенная диагональ* квадратной матрицы A – это множество пар индексов

$$\{(1, \sigma(1)), \ldots, (n, \sigma(n))\},$$

где $\sigma \in S_n$.

Определение 2.2. Мы называем *отрицательной частичной обобщенной диагональю длины* j множество $\{(i_1, l_1), \ldots, (i_j, l_j)\}$, состоящее из индексов элементов обобщенной диагонали A, таких что $a_{i_1 l_1} = \cdots = a_{i_j l_j} = -1$.

Обозначим через k_j, $j = 1, \ldots, n$, число различных отрицательных частичных обобщенных диагоналей длины j. Положим $k_0 = 1$, тем самым мы рассматриваем пустое множество как отрицательную обобщенную частичную диагональ длины 0.

Лемма 2.3. *Пусть $A \in \Omega_n$. Тогда*

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \cdot k_j \cdot (n-j)!. \tag{2}$$

Доказательство. 1. По определению,

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{3}$$

Здесь каждое слагаемое $a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ соответствует в точности одной обобщенной диагонали и равно либо 1, либо -1 в зависимости от четности числа элементов -1 на обобщенной диагонали.

Рассмотрим правую часть равенства (2) и докажем, что она содержит в точности то же число слагаемых равных $+1$ и -1, что и правая часть равенства (3).

2. Каждая отрицательная частичная обобщенная диагональ длины j может быть дополнена до обобщенной диагонали $(n-j)!$ различными способами, следовательно, она содержится в $(n-j)!$ различных обобщенных диагоналях. Дополним каждую отрицательную частичную обобщенную диагональ длины j всеми возможными способами до обобщенной диагонали и пометим их (чтобы различать). Получаем множество K_j помеченных обобщенных диагоналей, содержащих все отрицательные частичные обобщенные диагонали длины j. Тогда мощность множества K_j равняется $|K_j| = k_j \cdot (n-j)!$. Заметим, что не все элементы множества K_j различны как обобщенные диагонали A.

3. Пусть D_m – произвольная обобщенная диагональ A с m элементами, равными -1, и $n-m$ элементами, равными 1. По определению, D_m содержит в точности $\binom{m}{j}$ различных отрицательных частичных обобщенных диагоналей длины j. Можно считать, что D_m содержит $1 = \binom{m}{0}$ отрицательных частичных обобщенных диагоналей длины 0. Следовательно, каждая D_m содержится в K_j в точности $\binom{m}{j}$ раз, $j = 0, \ldots, n$. Здесь мы предполагаем, что $\binom{m}{j} = 0$, если $m < j$. Через

$\mathfrak{D}_m$ обозначим множество различных обобщенных диагоналей матрицы A с m отрицательными элементами.

4. Для правой части (2) мы получаем:

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot k_j\cdot(n-j)!=\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot|K_j|=\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\cdot\left(\sum_{m=0}^{n}\sum_{D_m\in\mathfrak{D}_m}\binom{m}{j}\right). \quad (4)$$

5. Согласно пункту 3, каждая обобщенная диагональ матрицы A содержится в последней сумме. Вычислим ее коэффициент. Меняя местами знаки суммирования, получаем, что для каждого m и произвольной $D_m \in \mathfrak{D}_m$ ее коэффициент вхождения в формулу (4) равен

$$\sum_{j=0}^{n}(-2)^j\binom{m}{j} = (1-2)^m = (-1)^m.$$

Таким образом, если $\mathcal{D}$ является множеством всех обобщенных диагоналей матрицы A, мы получаем, что правая часть формулы (4) и, следовательно, правая часть формулы (2) равняются $\sum\limits_{D_m\in\mathcal{D}}(-1)^m$. Согласно пункту 1, это и есть значение функции перманента. $\square$

Заметим, что для $(0,1)$-матриц имеет место аналогичное представление, см. [2, теорема 7.2.1, формула (7.11)].

§3. Предварительные результаты

Лемма 3.1. *Для произвольного $x \in (0,+\infty)$ справедливо соотношение*

$$\left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x\rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

Доказательство. Так как $\lfloor \log_2 x\rfloor = \log_2 x - \{\log_2 x\}$, то, обозначая $\{\log_2 x\}$ через ε, мы получаем

$$2^{\lfloor \log_2 x\rfloor} = x\cdot 2^{-\varepsilon}.$$

Соответственно,

$$\left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x\rfloor}} \right\rfloor = \lfloor 2^{\varepsilon}\rfloor = 1,$$

где последнее равенство следует из того факта, что $0 \leqslant \varepsilon < 1$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $x \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\left\{\frac{x}{2^k}\right\} \leqslant \frac{2^k-1}{2^k},\ k = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 x\rfloor. \quad (5)$$

Эта система неравенств становится системой тождеств тогда и только тогда, когда $x = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor + 1} - 1$.

Доказательство. 1. По определению нижней целой части получаем

$$\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor + 1 > \frac{x}{2^k}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Умножая (6) на 2^k, имеем

$$2^k \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor + 1 \right) > x, \ k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Как левая, так и правая части неравенства (7) являются целыми числами, откуда

$$2^k \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor + 1 \right) \geqslant x + 1, \ k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Разделим (8) на 2^k. Получим:

$$\left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor + 1 \geqslant \frac{x+1}{2^k}, \ k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Вычитая $(\lfloor \frac{x}{2^k} \rfloor + \frac{1}{2^k})$ из обеих частей неравенства (9), имеем в итоге

$$\frac{2^k - 1}{2^k} \geqslant \frac{x}{2^k} - \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor, \ k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, неравенство (5) верно.

2. Заметим, что если $x = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor + 1} - 1$, то все его остатки по модулю 2^k равны $2^k - 1$ для $k = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 x \rfloor$. Следовательно,

$$\left\{ \frac{x}{2^k} \right\} = \frac{2^k - 1}{2^k}, \ k = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 x \rfloor.$$

3. Соответственно, если нам известно, что

$$\left\{ \frac{x}{2^k} \right\} = \frac{2^k - 1}{2^k}, \ k = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 x \rfloor,$$

то для максимального значения k получаем:

$$\left\{ \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right\} = \frac{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}},$$

или, в терминах нижней целой части,

$$\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} - \left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right\rfloor = \frac{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}}. \tag{10}$$

По лемме 3.1 выполняется условие $\left\lfloor \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \right\rfloor = 1$, следовательно, (10) можно переписать следующим образом:

$$\frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} - 1 = \frac{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}}.$$

Домножая это равенство на $2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}$, получаем:

$$x - 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor} - 1,$$

следовательно, $x = 2^{\lfloor \log_2 x \rfloor + 1} - 1$. □

Определение 3.3. Пусть $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Определим $\nu_p(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}\}$.

Замечание 3.4. *Заметим, что если число p является простым, то $\nu_p(x \cdot y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$.*

Лемма 3.5. *Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что $m < n$, справедливо неравенство*

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) \geqslant n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1. \tag{11}$$

Здесь равенство выполняется тогда и только тогда, когда $n - m = 2^u - 1$ для некоторого $u \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим левую часть неравенства (11):

$$\Lambda := \nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = \nu_2(2^m) + \nu_2((n-m)!) = m + \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\lfloor \frac{n-m}{2^k} \right\rfloor.$$

Применяя тождество $\lfloor a \rfloor = a - \{a\}$ к слагаемым $\left\lfloor \frac{n-m}{2^k} \right\rfloor$ и вынося общий множитель, мы получаем:

$$\Lambda = m + (n-m) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \frac{1}{2^k} \right) - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{ \frac{n-m}{2^k} \right\}.$$

Применяя тождество $\sum\limits_{k=1}^{t} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^t}$ для преобразования второго слагаемого, имеем:

$$\Lambda = m + (n-m) \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right) - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{ \frac{n-m}{2^k} \right\}.$$

Теперь раскроем скобки в данной сумме и применим тождество $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$, чтобы получить

$$\Lambda = n - \left\lfloor \frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right\rfloor - \left\{ \frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{ \frac{n-m}{2^k} \right\}.$$

Заметим, что второе слагаемое в Λ равняется (-1) по лемме 3.1. Следовательно,

$$\Lambda = n - 1 - \left\{ \frac{n-m}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right\} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \left\{ \frac{n-m}{2^k} \right\}. \tag{12}$$

Применяя неравенства (5) (см. лемму 3.2) для $x := n - m$, получаем:

$$\Lambda \geqslant n - 1 - \frac{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} - 1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \frac{2^k - 1}{2^k} =: \Lambda_1. \tag{13}$$

Применяя тождество $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, ко всем дробям в (13), получаем:

$$\Lambda_1 = n - 2 + \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} - \left(\lfloor \log_2(n-m) \rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor} \frac{1}{2^k} \right).$$

Тогда, раскрывая скобки и используя $\sum\limits_{k=1}^{t} \frac{1}{2^t} = 1 - \frac{1}{2^t}$, имеем

$$\begin{aligned} \Lambda \geqslant \Lambda_1 &= n - 2 + \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor + \left(1 - \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor}} \right) \\ &= n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство (11).

2. В приведенном выше доказательстве все преобразования являются равенствами кроме неравенства (13). Соответственно, (11) становится равенством в том и только том случае, когда неравенство (13) становится равенством. Мы получаем неравенство (13) из равенства (12), применяя неравенства (5) для $x = n - m$. Следовательно, (13) становится равенством тогда и только тогда, когда все неравенства (5) становятся равенствами, что эквивалентно условию $n - m = 2^{\lfloor \log_2(n-m) \rfloor + 1} - 1$ по лемме 3.2. □

Лемма 3.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m < n$. Тогда*

$$\lfloor \log_2(n-m) \rfloor \leqslant \lfloor \log_2 n \rfloor, \tag{14}$$

причем правая часть равняется левой тогда и только тогда, когда $m \leqslant n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$.

Доказательство. 1. Неравенство (14) следует из монотонности функции логарифма.

2. Рассматриваемое неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда верно обратное неравенство:

$$\lfloor \log_2(n-m) \rfloor \geqslant \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

3. Так как $\lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor$ эквивалентно $x \geqslant \lfloor y \rfloor$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, получаем, что наше неравенство равносильно

$$\log_2(n-m) \geqslant \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

В силу монотонности функции логарифма, последнее неравенство эквивалентно неравенству $n - m \geqslant 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, или $m \leqslant n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. □

Мы будем применять неравенство (14) преимущественно в следующем виде:

$$n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1 \geqslant n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1. \tag{15}$$

Лемма 3.7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m \leqslant n$. Тогда*

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) \geqslant n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1, \tag{16}$$

причем правая часть равняется левой тогда и только тогда, когда $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$ и $m = 0$.

Доказательство. 1. Для $m = n$ доказывать нечего: легко проверяется, что $\nu_2(2^n) = n > n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Предположим, что $m < n$. Лемма 3.5 позволяет заключить, что

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) \geqslant n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1.$$

Величина в правой части неравенства больше или равна $n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ в силу неравенства (15). Следовательно, выполняется неравенство (16).

3. Неравенство (16) становится равенством тогда и только тогда, когда оба неравенства (11) и (15) становятся равенствами, т.е.

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1,$$
$$n - \lfloor \log_2(n-m) \rfloor - 1 = n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

По доказанному в леммах 3.5 и 3.6 соответственно, эти равенства справедливы тогда и только тогда, когда $n - m = 2^u - 1$ для некоторого $u \in \mathbb{N}$ и $n - m \geqslant 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$.

4. Два условия $n-m = 2^u-1$ и $n-m \geqslant 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$ позволяют заключить, что

$$2^u - 1 \geqslant 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \ u \in \mathbb{N},$$

что эквивалентно соотношению

$$2^u > 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \ u \in \mathbb{N}.$$

Так как логарифм является монотонной функцией, последнее неравенство эквивалентно

$$u > \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Если $u > \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, то $2^u - 1 > n$, что противоречит $n - m = 2^u - 1$. Следовательно, $u = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, значит,

$$n - m = 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} - 1 \geqslant n,$$

откуда $m = 0$ и, соответственно, $n = 2^u - 1$.

5. Обратно, если $m = 0$ и $n = 2^u - 1$, то выполнены равенства в формулах (11) и (14) (см. леммы 3.5 и 3.6) и

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) = n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1. \qquad \square$$

§4. Доказательство предложений 1.3, 1.4 и 1.5

Применение результатов §3 вместе с леммой 2.3 позволяет получить короткие прямые доказательства предложений 1.3, 1.4 и 1.5.

Доказательство предложения 1.3. По лемме 3.7, для произвольного $A \in \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, все слагаемые в формуле (2) кратны $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$, таким образом, их сумма $\mathrm{per}(A)$ также кратна $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$. $\square$

Доказательство предложения 1.4. Согласно второму утверждению леммы 3.5, $n!$ не кратно $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$ при $n = 2^t - 1$, $t \in \mathbb{N}$. Таким образом, для этих значений n первое слагаемое в формуле (2) не кратно $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$, в то время как другие слагаемые кратны $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$ в силу леммы 3.7. Следовательно, если $n = 2^t - 1$, то $\mathrm{per}(A)$ не является кратным $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$ для произвольного $A \in \Omega_n$. $\square$

Доказательство предложения 1.5. Рассмотрим $n \neq 2^t - 1$ для всех $t \in \mathbb{N}$. По лемме 3.7, для $n \neq 2^t - 1$ и $m = 0, \dots, n$ справедливы следующие строгие неравенства:

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) > n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

Так как с обеих сторон этих неравенств находятся целые числа, рассматриваемые неравенства эквивалентны следующим:

$$\nu_2(2^m \cdot (n-m)!) \geqslant n - \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Следовательно, для произвольной матрицы $A \in \Omega_n$ все слагаемые в формуле (2) кратны $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$. Тогда их сумма, равная $\mathrm{per}(A)$, также кратна $2^{n - \lfloor \log_2 n \rfloor}$. □

В заключение мы приведем некоторые свойства матриц из множества Ω_n, являющиеся следствиями предложений 1.3, 1.4 и 1.5.

Предложение 4.1. 1. *При $n \geqslant 2$ перманент каждой матрицы $A \in \Omega_n$ является четным.*

2. *Для $A \in \Omega_3$ справедливо, что $\mathrm{per}(A) \in \{\pm 2, \pm 6\}$.*

3. *Для $A \in \Omega_7$ существует не более 157 возможных различных неотрицательных значений перманента.*

4.*Для $A \in \Omega_8$ существует не более 1260 возможных различных положительных значений перманента.*

Доказательство. 1. Следует непосредственно из предложения 1.3. Также следует из работы [9].

2. Для $n = 3$ из предложений 1.3 и 1.4 следует, что $\mathrm{per}(A) \in \{\pm 2, \pm 6\}$. Легко проверить, что все эти значения реализуемы.

3. Для $n = 7$ мы имеем, что $\mathrm{per}(A)$ делится на 2^4, но не делится на 2^5. Так как $|\mathrm{per}(A)| \leqslant 7!$ и $\mathrm{per}(A) \neq 0$ (см. [4, 8]), получаем не более, чем $\frac{1}{2}(\frac{7!}{2^4} - 1) = 157$ неотрицательных значений, которые могут реализовываться на матрицах из Ω_7.

4. Для $n = 8$ предложение 1.5 ограничивает число возможных положительных значений перманента числом 1260. □

Литература

1. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре*, Издание 9, Наука, Москва, 1968.
2. R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge Univ. Press, 1991.

3. A.R. Kräuter, *Recent results on permanents of* $(1, -1)$*-matrices.* — Ber. Math. Statist. Sekt. Forschungsgesellschaft Joanneum Graz **249** (1985), 1–25.
4. A. R. Kräuter, N. Seifter, *On some questions concerning permanents of* $(1, -1)$*-matrices.* — Israel J. Math. **45**, No. 1 (1983), 53–62.
5. M. Marcus, M. Newman, *Inequalities for the permanent function.* — Ann. Math. **75**, No. 1 (1962), 47–62.
6. H. Perfect, *Positive diagonals of* ± 1*-matrices.* — Monatsh. Math. **77** (1973), 225–240.
7. S. Reich, *Another solution of an old problem of Pólya.* — Am. Math. Monthly **78** (1971), 649–650.
8. R. Simion, F. W. Schmidt, *On* $(+1, -1)$*-matrices with vanishing permanent.* — Discrete Math. **46** (1983), 107–108.
9. E. T. H. Wang, *On permanents of* $(1, -1)$*-matrices.* — Israel J. Math. **18** (1974), 353–361.
10. I. M. Wanless, *Permanents of matrices of signed ones.* — Linear Multilinear Algebra **53**, No. 6 (2005), 427–433.

Budrevich M. V., Guterman A. E., Taranin K. A. On divisibility for the permanents of (± 1)-matrices.

The classical results by Kräuter and Seifter concerning the divisibility of permanents for (± 1)-matrices by large powers of 2 are useful in testing whether the permanent is a nonvanishing function. In this paper, a new approach to this problem, which allows one to obtain a short combinatorial proof of the results by Kräuter and Seifter, is suggested.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва, Россия
E-mail: MBudrevich@yandex.ru
E-mail: alexander.guterman@gmail.com
E-mail: cataranin@gmail.com

Поступило 10 ноября 2015 г.