Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

КОМБИНАТОРНЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $\mathcal{P}$ – мультипликативная полугруппа неотрицательных матриц порядка n. В работе [1] введено понятие индекса импримитивности полугруппы, которое мы приведём в слегка отличной формулировке. Будем говорить, что индексы $i_1, \dots, i_r$, принадлежащие множеству $N = \{1, \dots, n\}$, независимы относительно полугруппы $\mathcal{P}$, если для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ строки с номерами $i_1, \dots, i_r$ обладают следующим свойством: любые две из них не имеют положительных элементов, стоящих в одном и том же столбце. Максимальное число $r(\mathcal{P})$ независимых индексов называется индексом импримитивности полугруппы $\mathcal{P}$. Индекс импримитивности множества неотрицательных матриц по определению равен индексу импримитивности полугруппы, порождённой этим множеством. В частности, индекс импримитивности $r(A)$ матрицы A равен индексу импримитивности полугруппы, порождённой матрицей A. Если A – неприводимая матрица, то $r(A)$ совпадает с индексом импримитивности матрицы A, известным из теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц. В [1] получены различные обобщения теории Перрона–Фробениуса на полугруппы неотрицательных матриц. Данная статья связана с двумя результатами из [1], относящимися к полугруппам стохастических матриц, т.е. неотрицательных матриц, в которых сумма элементов каждой строки равна единице. Чтобы сформулировать первый из этих результатов, напомним, что неотрицательная матрица называется стягивающей (scrambling), если любые две её строки имеют положительные элементы в некотором общем столбце. Наибольшее применение – в теории цепей Маркова – имеют стохастические стягивающие матрицы.

Ключевые слова: теорема Перрона–Фробениуса, индекс импримитивности, полугруппы неотрицательных матриц, стохастические матрицы.

Предложение 1. ([1, предложение 3]). *Полугруппа $\mathcal{P}$ стохастических матриц содержит стягивающую матрицу тогда и только тогда, когда $r(\mathcal{P}) = 1$.*

Известно, что стохастическая матрица имеет собственное значение, равное единице, и что модули всех её собственных значений не превышают единицы. Совокупность собственных значений стохастической матрицы A, равных единице по модулю, называется граничным спектром A. Число точек граничного спектра (с учетом их кратностей) обозначается через $\mu(A)$. Положим, что $\mu(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} \mu(A)$.

Предложение 2. ([1, предложение 1]). *Для любой полугруппы $\mathcal{P}$ стохастических матриц имеет место равенство $\mu(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P})$.*

Таким образом, доказано, что в любой полугруппе стохастических матриц существует матрица, для которой число точек граничного спектра равно индексу импримитивности полугруппы. Предложение 2 является обобщением классического результата теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц, связывающего граничный спектр неразложимой неотрицательной матрицы и её комбинаторные свойства (подробнее см. [1, с. 752]).

Настоящая статья является продолжением работ [2, 3], в которых темы статьи [1] изучаются комбинаторными методами, в отличие от геометрических методов, применяемых авторами [1]. В §2 доказывается обобщение предложения 1 на произвольные полугруппы неотрицательных матриц без нулевых строк. Для этого вводится понятие ранга стягиваемости матрицы. В §3 для широкого класса матричных полугрупп описываются матрицы с минимальным рангом стягиваемости. В §4 вводится понятие целой части полугруппы $\mathcal{P}$ и доказывается, что индекс импримитивности $r(\mathcal{P})$ зависит лишь от целой части $\mathcal{P}$. Затем, в §5, результаты предыдущих параграфов применяются к моногенной полугруппе, порождённой стохастической матрицей A, и приводится независимое доказательство предложения 2, основанное на комбинаторных понятиях совместимости и целости индексов, введённых в [2, 3]. В §6 предложение 2 обобщается на полугруппы субстохастических матриц.

§2. О ранге стягиваемости матрицы

В этом параграфе будем считать, что полугруппа $\mathcal{P}$ состоит из неотрицательных матриц без нулевых строк (не обязательно стохастических), т.е. $\mathcal{P}$ является подполугруппой полугруппы $\overline{P}_n$ всевозможных неотрицательных матриц с ненулевыми строками.

Приведём необходимые определения. Пусть A – неотрицательная прямоугольная матрица с n ненулевыми строками. Индекс j называется A-последователем индекса i, если $(A)_{ij} > 0$. Поскольку в A нет нулевых строк, то для любого индекса существуют A-последователи. Будем говорить, что индексы i и j совместимы матрицей A (короче – A-совместимы), если они имеют общего A-последователя, т.е. $(A)_{il} > 0$ и $(A)_{jl} > 0$ для некоторого индекса l. Скажем, что множество индексов A-независимо, если любые два индекса этого множества несовместимы матрицей A. Одноэлементное множество индексов считается независимым. Максимальное число индексов в A-независимом множестве назовём рангом стягиваемости матрицы A и обозначим через $\tau(A)$. Таким образом, $\tau(A) = k$, если существует k-элементное множество индексов, независимое относительно матрицы A, но любое $(k+1)$-элементное множество индексов (при $k < n$) содержит хотя бы два A-совместимых индекса.

Следующие свойства, ввиду их простоты, приводятся без доказательства.

Свойство 1. *Равенство $\tau(A) = 1$ имеет место в точности тогда, когда A совмещает любые два индекса, т.е. является стягивающей матрицей.*

Свойство 2. *Равенство $\tau(A) = n$ имеет место тогда и только тогда, когда A не совмещает никакую пару индексов. Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый столбец A содержал не более одного положительного элемента. Если A – квадратная матрица, то последнее условие эквивалентно тому, что матрица мономиальна, т.е. имеет ровно один положительный элемент в каждой строке и каждом столбце.*

Индексы i и j по определению совместимы полугруппой $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ (т.е. $\mathcal{P}$-совместимы), если они совместимы некоторой матрицей $A \in \mathcal{P}$. Индекс импримитивности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ теперь можно определить следующим образом: $r(\mathcal{P})$ есть наибольшее из тех чисел k, для которых существует k-элементное множество индексов, независимое относительно любой матрицы $A \in \mathcal{P}$.

Следующие две леммы доказаны в [3] для любых $A, B \in \overline{P}_n$.

Лемма 1. *Если индексы i и j A-совместимы, то они AB-совместимы.*

Лемма 2. *Если A-последователи индексов i и j B-совместимы, то индексы i и j AB-совместимы.*

Лемма 3. *Для любых матриц $A, B \in \overline{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\tau(AB) \leqslant \min(\tau(A), \tau(B)).$$

Доказательство. Согласно лемме 1, если индексы i и j AB-несовместимы, то они и A-несовместимы. Отсюда следует, что $\tau(AB) \leqslant \tau(A)$. Теперь предположим, что индексы

$$i_1, \dots, i_k \tag{1}$$

AB-независимы. Тогда любые их A-последователи $j_1, \dots, j_k$ независимы относительно B. Действительно, допустим, что некоторые индексы j_p и j_q совместимы матрицей B. Тогда по лемме 2 индексы i_p и i_q должны быть AB-совместимы, но это противоречит AB-независимости множества (1). Таким образом, любому AB-независимому множеству индексов можно сопоставить B-независимое множество с тем же числом элементов. Следовательно, $\tau(AB) \leqslant \tau(B)$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Предложение 3. *Множество матриц с минимальным рангом стягиваемости*

$$I(\mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{P} \mid \tau(A) = \min_{B \in \mathcal{P}} \tau(B)\} \tag{2}$$

является идеалом полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$.

Доказательство. Пусть $A \in I(\mathcal{P})$, B – любая матрица из $\mathcal{P}$. По лемме 3 имеем $\tau(AB) \leqslant \tau(A)$, но, согласно выбору A, строгого неравенства здесь быть не может, поэтому $\tau(AB) = \tau(A)$, следовательно, $AB \in I(\mathcal{P})$. Аналогично доказывается включение $BA \in I(\mathcal{P})$. $\square$

Из определений величин $\tau(A)$, $r(A)$ и $r(\mathcal{P})$ видно, что для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$ выполнены неравенства

$$\tau(A) \geqslant r(A) \geqslant r(\mathcal{P}). \tag{3}$$

Назовём матрицу $A \in \mathcal{P}$ максимально совмещающей, если количество совмещаемых этой матрицей пар (неравных) индексов максимально для матриц из $\mathcal{P}$.

Теорема 1. *Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ справедливо равенство*

$$r(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} \tau(A).$$

Доказательство. Ввиду неравенств (3) достаточно доказать, что существует матрица A, для которой $\tau(A) = r(\mathcal{P})$. Возможно, что полугруппа $\mathcal{P}$ состоит из мономиальных матриц. В этом случае утверждение теоремы верно, т.к. по свойству 2 имеем $\tau(A) = n$ для всех $A \in \mathcal{P}$, следовательно, $r(\mathcal{P}) = n$. Теперь пусть хотя бы одна пара индексов $\mathcal{P}$-совместима, следовательно, $r(\mathcal{P}) = r < n$. Докажем, что $\tau(A) = r$ для максимально совмещающей матрицы A. Предположим противное: существует A-независимое $(r+1)$-элементное множество индексов, т.е. множество индексов $\{i_1, \ldots, i_{r+1}\}$, для которого из неравенств

$$(A)_{i_1 j_1} > 0, \ldots, (A)_{i_{r+1} j_{r+1}} > 0$$

следует, что индексы $j_1, \ldots, j_{r+1}$ попарно различны. По определению величины $r(\mathcal{P}) = r$ найдутся два индекса, скажем, j_p и j_q, совместимые некоторой матрицей $B \in \mathcal{P}$. Тогда матрица AB, по лемме 1, совмещает все пары индексов, совместимые матрицей A; кроме того, по лемме 2, она совмещает пару i_p и i_q. Выходит, что AB совмещает больше пар индексов, чем A, но это противоречит тому, что A – максимально совмещающая матрица. Итак, для максимально совмещающей матрицы A верно равенство $\tau(A) = r(\mathcal{P})$, что и доказывает теорему. $\square$

Из теоремы 1 получаем ещё одно описание идеала $I(\mathcal{P})$.

Следствие 1.

$$I(\mathcal{P}) = \{A \in \mathcal{P} \mid \tau(A) = r(\mathcal{P})\}.$$

Из неравенств (3) и теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2.

$$r(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} r(A).$$

Таким образом, индекс импримитивности полугруппы $\mathcal{P}$ равен наименьшему из индексов импримитивности её моногенных подполугрупп.

Докажем, что предложение 1 [1] является частным случаем теоремы 1. Действительно, если $r(\mathcal{P}) = 1$, то, по теореме 1, существует матрица $A \in \mathcal{P}$, для которой $\tau(A) = 1$, значит, по свойству 1, A – стягивающая матрица. Наоборот, если $\mathcal{P}$ содержит стягивающую матрицу A, то для неё $\tau(A) = 1$, следовательно, $r(\mathcal{P}) = 1$, поскольку меньшего значения ранг стягиваемости матрицы не может принять по определению.

Замечание 1. Как видно из доказательства теоремы 1, максимально совмещающие матрицы принадлежат $I(\mathcal{P})$, т.е. имеют минимальный ранг стягиваемости. Покажем на примере, что обратное утверждение не всегда верно. Матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1/2&1/2&0&0\\1/2&1/2&0&0\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{4}$$

образуют полугруппу, так как $A^2 = AB = A$, $B^2 = BA = B$. Легко видеть, что индекс импримитивности этой полугруппы равен двум, идеал $I(\mathcal{P})$ состоит из матриц A и B, но лишь матрица B является максимально совмещающей.

§3. Полугруппы с транзитивным отношением совместимости

Для любой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ бинарное отношение совместимости на множестве N рефлексивно и симметрично, но нетрудно привести пример (см. [3, с. 19]), когда оно не транзитивно. Вместе с тем в некоторых важных случаях совместимость транзитивна и, тем самым, является отношением эквивалентности. В частности, транзитивность имеет место для неприводимых полугрупп матриц без нулевых строк и столбцов. Впервые это было доказано (в других терминах) в [1], см. также [2]. Несколько более общий класс полугрупп с транзитивной совместимостью составляют полугруппы с симметричным отношением достижимости [3]. Ещё один класс полугрупп с транзитивной совместимостью будет рассмотрен в §5.

В этом параграфе мы покажем, что в полугруппах с транзитивным отношением совместимости матрицы идеала $I(\mathcal{P})$, т.е. матрицы, для которых ранг совместимости равен $r(\mathcal{P})$, устроены сравнительно просто. Напомним некоторые понятия и факты из [1] и [3]. Будем говорить, что матрица $A \in \overline{P}_n$ действует на разбиении $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}$ множества N как перестановка, если для любого класса π_s разбиения существует класс π_t, в котором лежат все A-последователи индексов из π_s, причём определённое таким образом отображение классов биективно. Матрица A согласована с разбиением π, если A разбита на блоки так, что номера строк, в которых стоит блок A_{st}, принадлежат классу π_s, а номера столбцов – классу π_t. Число блочных строк и столбцов называется блочным порядком матрицы. Ясно, что любую матрицу можно посредством перестановочного подобия (перестановки строк и такой же перестановки столбцов) преобразовать к форме, согласованной с разбиением. Если матрица действует на разбиении π как перестановка, то она преобразуется к блочно мономиальному виду (каждая блочная строка и каждый блочный столбец содержит ровно один ненулевой блок).

В [3] доказано, что на классах транзитивной совместимости матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ действуют как перестановки. Следовательно, матрицы $\mathcal{P}$ одновременно преобразуются к блочно мономиальному виду блочного порядка $r = r(\mathcal{P})$.

Предложение 4. *Пусть отношение совместимости, определяемое полугруппой $\mathcal{P}$ на множестве индексов N, транзитивно. Предположим, что матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ уже преобразованы к блочно мономиальному виду блочного порядка $r = r(\mathcal{P})$. Тогда идеал $I(\mathcal{P})$ состоит из тех и только тех матриц, ненулевые блоки которых являются стягивающими матрицами. Все матрицы идеала являются максимально совмещающими. Более того, каждая из матриц идеала совмещает любую пару $\mathcal{P}$-совместимых индексов.*

Доказательство. Для блочно мономиальной матрицы $A \in \mathcal{P}$ с ненулевыми блоками $A_1, \dots, A_r$ имеет место очевидное равенство

$$\tau(A) = \tau(A_1) + \dots + \tau(A_r).$$

Следовательно,

$$\tau(A) = r \;\Leftrightarrow\; \tau(A_1) = \dots = \tau(A_r) = 1.$$

Отсюда, учитывая свойство 1, заключаем, что матрица A принадлежит идеалу $I(\mathcal{P})$ в точности тогда, когда все её ненулевые блоки являются стягивающими матрицами. Такое строение матриц из $I(\mathcal{P})$

обеспечивает, очевидно, совмещение каждой из них любых двух $\mathcal{P}$-совместимых индексов. □

§4. Редукция к целым полугруппам

Напомним определение целой полугруппы, введённое в [3]. Индекс $i \in N$ называется целым относительно полугруппы $\mathcal{P}$, если A-последователи индекса i совместимы при любой матрице $A \in \mathcal{P}$. Полугруппа $\mathcal{P}$ называется целой, если все индексы множества N целые. Например, целыми являются полугруппы с транзитивным отношением совместимости индексов.

В [3] доказано, что для всякой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ множество целых индексов непусто и инвариантно. Последнее означает, что A-последователи целых индексов являются целыми при любой матрице $A \in \mathcal{P}$. Другими словами, для любой матрицы $A \in \mathcal{P}$, любых целого i и нецелого j имеем равенство $(A)_{ij} = 0$. Отсюда следует, что все матрицы нецелой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ одним преобразованием перестановочного подобия можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix} \tag{5}$$

такому, что подматрицы, занимающие верхний левый угол, образуют целую полугруппу. Назовём эту полугруппу целой частью полугруппы $\mathcal{P}$ и обозначим её через $\widehat{\mathcal{P}}$. Нижняя блочная полоса матриц (5) относится к нецелым индексам. Дальше в этом параграфе будем считать, что матрицы нецелой полугруппы $\mathcal{P}$ уже приведены к виду (5).

Лемма 4. *Пусть $r(\mathcal{P}) = r$ и дано $\mathcal{P}$-независимое множество индексов*

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}. \tag{6}$$

Тогда все индексы этого множества целые.

Доказательство. Предположим противное. Пусть, например, индекс i_1 нецелый. Тогда для i_1 и некоторой матрицы $A \in \mathcal{P}$ существуют $\mathcal{P}$-несовместимые A-последователи j_0 и j_1. Пусть $j_2, \ldots, j_r$ – какие-нибудь A-последователи индексов $i_2, \ldots, i_r$. Тогда индексы

$$j_0, j_1, j_2, \ldots, j_r \tag{7}$$

должны быть $\mathcal{P}$-независимы. Действительно, если некоторая пара индексов j_p, j_q (отличная от пары j_0, j_1) совместима матрицей $B \in \mathcal{P}$, то, по лемме 2, индексы i_p, i_q совместимы матрицей AB, чего не может быть, поскольку в множестве (6) нет $\mathcal{P}$-совместимых индексов. Выходит, что существует $\mathcal{P}$-независимое $(r+1)$-элементное множество индексов, но это противоречит тому, что $r(\mathcal{P}) = r$. □

Из определения целой части полугруппы и леммы 4 прямо следует

Предложение 5. *Индекс импримитивности полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ равен индексу импримитивности её целой части, т.е. $r(\mathcal{P}) = r(\widehat{\mathcal{P}})$.*

Заметим, что целая часть полугруппы стохастических матриц состоит из стохастических матриц. Следующее утверждение является естественным продолжением предложения 5, но доказать его удобнее в следующем параграфе.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{P}$ – полугруппа стохастических матриц и $\widehat{\mathcal{P}}$ – её целая часть. Тогда $\mu(\mathcal{P}) = \mu(\widehat{\mathcal{P}})$.*

В заключение параграфа докажем свойство идеала $I(\mathcal{P})$, относящееся к нецелым индексам.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{P}$ – нецелая полугруппа. Для любой матрицы A из идеала $I(\mathcal{P})$ и любого нецелого индекса существует A-достижимый целый индекс. Другими словами, если матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ приведены к виду (5), то в матрице $A \in I(\mathcal{P})$ все строки подматрицы D ненулевые.*

Доказательство. Рассмотрим множество индексов

$$\{i_1, \ldots, i_r, j\}, \tag{8}$$

в котором первые $r = r(\mathcal{P})$ индексов независимы, следовательно, по лемме 4, являются целыми, j – нецелый индекс. По следствию 1 имеем $\tau(A) = r$, следовательно, множество любых $r+1$ индексов содержит пару A-совместимых индексов. Как видно из состава множества (8), матрица A совмещает нецелый индекс j с некоторым целым индексом i_k. Значит, $(A)_{jl} > 0$ и $(A)_{i_k l} > 0$ для некоторого индекса l. Поскольку множество целых индексов инвариантно, то, согласно второму из этих неравенств, индекс l, достижимый из целого индекса i_k, тоже является целым. Поэтому из первого неравенства следует утверждение леммы. □

§5. Случай моногенной полугруппы

Пусть $A \in \overline{P}_n$. Рассмотрим моногенную полугруппу $\langle A \rangle$, порождённую матрицей A. Вначале пусть полугруппа $\langle A \rangle$ целая.

Лемма 5. *Отношение совместимости, определяемое целой полугруппой $\langle A \rangle$ на множестве N, транзитивно.*

Доказательство. Пусть индексы i_1, i_2 совместимы матрицей A^k, индексы i_2, i_3 совместимы матрицей A^l. Можно считать, что $k = l$. Действительно, пусть, например, $k < l$. Тогда, по лемме 1, индексы i_1, i_2 совместимы и матрицей $A^k A^{l-k} = A^l$.

Итак, для некоторых j_1, j_2 имеем

$$(A^l)_{i_1 j_1} > 0, \quad (A^l)_{i_2 j_1} > 0, \quad (A^l)_{i_2 j_2} > 0, \quad (A^l)_{i_3 j_2} > 0.$$

Индексы j_1, j_2 совместимы некоторой матрицей A^m как A^l-последователи целого индекса i_2. Тогда, по лемме 2, индексы i_1, i_3 совместимы матрицей A^{l+m}, поскольку A^m-совместимы их A^l-последователи – индексы j_1 и j_2 . Транзитивность доказана. □

Лемма 6. *Если A – стягивающая стохастическая матрица, то $\mu(A) = 1$.*

Доказательство. Запишем спектр A в виде последовательности $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Для любой стохастической матрицы A имеют место неравенства [4, теорема 2.10]

$$|\lambda_i| \leqslant \delta(A), \quad i = 2, \ldots, n, \tag{9}$$

где $\delta(A) = 1 - \min\limits_{i_1, i_2} \sum\limits_j \min(a_{i_1 j}, a_{i_2 j})$. Нетрудно видеть, что для стягивающей матрицы $\delta(A) < 1$. Отсюда и из неравенства (9) следует, что граничный спектр стягивающей стохастической матрицы A содержит лишь одно число – единицу, т.е. $\mu(A) = 1$. □

Предложение 8. *Для любой стохастической матрицы A*

$$\mu(A) = r(A). \tag{10}$$

Доказательство. Вначале пусть $\langle A \rangle$ – целая полугруппа. Вследствие предложения 4 можно считать, что A приведена к блочно мономиальному виду блочного порядка $r(A)$. Выберем показатель k, при котором матрица A^k принадлежит идеалу $I(\langle A \rangle)$ и имеет блочно диагональную форму. Диагональные блоки A^k являются стохастическими стягивающими матрицами. Учитывая лемму 6, получаем равенства $\mu(A^k) = \mu(A) = r(A)$.

В общем случае пусть матрица A имеет вид (5), где B – матрица, порождающая целую часть полугруппы $\langle A \rangle$. Выберем показатель k, при котором матрица

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ D_k & C^k \end{pmatrix}$$

принадлежит идеалу $I(\langle A \rangle)$. По предложению 7, в матрице D_k нет нулевых строк, поэтому все строчные суммы матрицы C^k меньше единицы, т.е. для её строчной нормы имеем $||C^k||_\infty < 1$. Следовательно, все собственные значения матрицы C^k, а потому и матрицы C, по модулю меньше единицы. Отсюда получаем равенство $\mu(A^k) = \mu(B^k)$, равносильное равенству $\mu(A) = \mu(B)$. Полугруппа $\langle B \rangle$ целая, значит, согласно первой части доказательства, $\mu(B) = r(B)$. По предложению 5, $r(B) = r(A)$. Из последних трёх равенств следует равенство (10). $\square$

Докажем предложение 2 [1].

Теорема 2. *Для всякой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq \overline{P}_n$ имеет место равенство*

$$\mu(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P}).$$

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из равенств

$$\mu(\mathcal{P}) = \min_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) = \min_{A \in \mathcal{P}} r(A) = r(\mathcal{P}).$$

Поясним, что первое равенство верно по определению функции $\mu(\mathcal{P})$, второе и третье следуют соответственно из предложения 8 и следствия 2.

Теперь легко доказать предложение 6. В силу теоремы 2 и предложения 5 имеем равенства

$$\mu(\mathcal{P}) = r(\mathcal{P}) = r(\widehat{\mathcal{P}}) = \mu(\widehat{\mathcal{P}}),$$

из которых и следует предложение 6.

§6. Полугруппы субстохастических матриц

Обозначим символом P_n полугруппу всевозможных неотрицательных матриц порядка n. Матрица $A \in P_n$ называется субстохастической, если сумма элементов каждой её строки не превышает единицы, т.е. $||A||_\infty \leqslant 1$. Число $\mu(A)$ для субстохастической матрицы A попрежнему будем считать равным количеству собственных значений, равных единице по модулю. Для полугруппы $\mathcal{P}$ субстохастических матриц сохраним значение символа $\mu(\mathcal{P})$ как числа, равного $\min\limits_{A\in\mathcal{P}} \mu(A)$.

Результаты предыдущих параграфов могут быть обобщены для полугрупп субстохастических матриц с помощью следующего простого приёма. Пусть $\mathcal{P}$ – полугруппа субстохастических матриц порядка n. Определим полугруппу $\widetilde{\mathcal{P}}$, поставив в соответствие всякой матрице $A \in \mathcal{P}$ матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \tag{11}$$

порядка $n+1$, где столбец b определён так, чтобы матрица $\widetilde{A}$ была стохастической. Заданное таким образом соответствие является, очевидно, изоморфизмом полугрупп $\mathcal{P}$ и $\widetilde{\mathcal{P}}$. Поскольку спектр матрицы $\widetilde{A}$ получается из спектра A добавлением единицы, то $\mu(A) = \mu(\widetilde{A}) - 1$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для всякой полугруппы $\mathcal{P} \subseteq P_n$ субстохастических матриц имеет место равенство*

$$\mu(\mathcal{P}) = r(\widetilde{\mathcal{P}}) - 1.$$

Из теоремы 3 и предложения 1 следует, что равенство $\mu(\mathcal{P}) = 0$ для полугруппы $\mathcal{P}$ субстохастических матриц имеет место в точности тогда, когда полугруппа $\widetilde{\mathcal{P}}$ содержит стягивающую матрицу. Легко видеть, что стохастическая матрица типа (11) является стягивающей в точности тогда, когда её первый столбец положителен. Значит, стягиваемость матрицы $\widetilde{A}$ равносильна неравенству $||A||_\infty < 1$. В итоге получается, что $\mu(\mathcal{P}) = 0$ тогда и только тогда, когда полугруппа $\mathcal{P}$ содержит матрицу A такую, что $||A||_\infty < 1$.

Заметим, что полугруппы субстохастических матриц со свойством $\mu(\mathcal{P}) = 0$ естественно возникают как части нецелых полугрупп стохастических матриц. Пусть матрицы нецелой полугруппы $\mathcal{P}$ стохастических матриц приведены к форме (5). Подматрицы типа C, т.е. нижние правые блоки матриц $A \in \mathcal{P}$, образуют, очевидно, полугруппу субстохастических матриц. При этом, как видно из предложения 7, если $A \in I(\mathcal{P})$, то $||C||_\infty < 1$.

Литература

1. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.

2. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **405** (2012) 13–23.
3. Ю. А. Альпин, В. С. Альпина, *Комбинаторные свойства целых полугрупп неотрицательных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014) 13–31.
4. E. Seneta, *Non-Negative Matrices And Markov Chains*, Springer, New York, 2006.

Al'pin Yu. A., Al'pina V. S. Combinatorial and spectral properties of semigroups of stochastic matrices.

The paper studies the notion of imprimitivity index of a semigroup of nonnegative matrices, introduced by Protasov and Voynov. A new characterization of the imprimitivity index in terms of the scrambling rank of a nonnegative matrix is suggested. Based on this characterization, an independent combinatorial proof of the Protasov–Voynov theorem on the interrelation between the imprimitivity index of a semigroup of stohastic matrices and the spectral properties of matrices in the semigroup is presented.

Казанский федеральный университет
Кремлевская ул., 8
420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

Казанский национальный
исследовательский технологический
университет
ул. К. Маркса, 68
420015 Казань, Россия
E-mail: alpina.valentina@yandex.ru

Поступило 9 ноября 2015 г.