Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 439, 2015 г.

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНЫХ $(T+H)$-МАТРИЦ

1. Введём необходимые определения. Тёплицевыми называются матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а ганкелевыми – матрицы вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_{n-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_{-1} \\ h_{n-3} & \dots & h_0 & h_{-1} & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & \dots & h_{-n+3} & h_{-n+2} & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица T из (1) называется циркулянтом, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и косым циркулянтом, если

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогичные понятия можно ввести для ганкелевых матриц. Матрица (2) называется ганкелевым циркулянтом, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и ганкелевым косым циркулянтом, если

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Множества тёплицевых и ганкелевых матриц фиксированного порядка являются линейными пространствами, а (ганкелевы) циркулянты и (ганкелевы) косые циркулянты образуют подпространства этих пространств. Матрицы, представимые в виде суммы тёплицевой и

Ключевые слова: $(T+H)$-матрицы, централизатор, собственные значения, нормальные матрицы.

ганкелевой матриц, называются $(T + H)$-матрицами. Пространство таких матриц порядка n обозначается в дальнейшем TH_n. Аналогично понятию $(T + H)$-матрицы вводятся понятия $(T + H)$-циркулянта и косого $(T + H)$-циркулянта.

Простым способом определения, принадлежит ли произвольная матрица множеству $(T + H)$-матриц, является так называемое правило кросс-сумм (именуемое также правилом ромба). Комплексная матрица A является $(T + H)$-матрицей в том и только в том случае, когда выполняются равенства

$$a_{j-1,k} + a_{j+1,k} = a_{j,k-1} + a_{j,k+1}, \qquad j, k = 2, \ldots, n-1.$$

Из [1] известно, что множество $(T + H)$-циркулянтов является алгеброй. То же самое верно и для косых $(T + H)$-циркулянтов. Однако существуют и другие нетривиальные алгебры, являющиеся подмножествами пространства TH_n. Так, в [2] указывается, что алгеброй $(T+H)$-матриц будет централизатор любой матрицы вида $S+\widetilde{E}$, где S – трёхдиагональная теплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицей на соседних диагоналях:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\widetilde{E} = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{n1}E_{n1} + \alpha_{nn}E_{nn}$. Здесь α_{11}, α_{1n}, α_{n1}, α_{nn} – произвольные комплексные числа, а E_{jk} – матричная единица, то есть матрица, единственный ненулевой элемент которой равен единице и находится в позиции (j, k). Напомним, что централизатором элемента X алгебры M является множество всех элементов $A \in M$, коммутирующих с X: $AX = XA$.

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять элементы произвольной матрицы A, чтобы она принадлежала централизатору матрицы

$$\widetilde{S} = S + \widetilde{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1n} \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \{A\widetilde{S}\}_{jk} = {} & \delta_{1k} \cdot (a_{j1}\alpha_{11} + a_{j2} + a_{jn}\alpha_{n1}) + \delta_{nk} \cdot (a_{j1}\alpha_{1n} + a_{j,n-1} + a_{jn}\alpha_{nn}) \\ & + (1 - \delta_{1k} - \delta_{nk}) \cdot (a_{j,k-1} + a_{j,k+1}), \\ \{\widetilde{S}A\}_{jk} = {} & \delta_{1j} \cdot (a_{1k}\alpha_{11} + a_{2k} + a_{nk}\alpha_{1n}) + \delta_{nj} \cdot (a_{1k}\alpha_{n1} + a_{n-1,k} + a_{nk}\alpha_{nn}) \\ & + (1 - \delta_{1j} - \delta_{nj}) \cdot (a_{j-1,k} + a_{j+1,k}). \end{aligned}$$

Здесь δ_{jk} – символ Кронекера. Нетрудно убедиться в том, что при $1 < j, k < n$ равенство $\{A\widetilde{S}\}_{jk} = \{\widetilde{S}A\}_{jk}$ сводится к правилу кросссумм. Это свидетельствует о том, что при любых значениях комплексных чисел α_{11}, α_{1n}, α_{n1} и α_{nn} централизатор матрицы $\widetilde{S}$ действительно вложен в множество TH_n.

Таким образом, задавая различные значения четвёрки коэффициентов $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn})$, можно получать разные алгебры, состоящие из $(T+H)$-матриц. В частности, если $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, 1, 1, 0)$, то централизатором $\widetilde{S} = S + \widetilde{E}$ будет множество всех $(T+H)$-циркулянтов. Заметим, что в данном случае матрица $\widetilde{S}$ сама является циркулянтом. Множество всех косых $(T+H)$-циркулянтов получается при выборе коэффициентов $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, -1, -1, 0)$. Спектральная задача для обоих этих случаев была рассмотрена в [3]. Данная статья посвящена задаче нахождения собственных значений матриц из централизаторов, соответствующих другим частным выборам матрицы $\widetilde{E}$. Пять различных выборов этой матрицы рассматриваются в последующих разделах 2–6.

2. $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, 0, 0, 0)$.

Найдем централизатор матрицы $S + \widetilde{E} = S$. Для этого определим собственные значения и собственные векторы матрицы S. Известно [4], что ее собственными значениями являются числа

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+1}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Элементы ортогональной матрицы X, составленной по столбцам из собственных векторов матрицы S, равны

$$x_{jk} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{\pi jk}{n+1}, \qquad j, k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $S = X\Lambda X^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Введём матрицу $D = X^T A X$. Эта матрица коммутирует с диагональной матрицей Λ. Ввиду того, что диагональные элементы λ_k попарно различны, матрица D обязана быть диагональной. Таким образом, всякая матрица A из централизатора матрицы S диагонализуется тем же подобием, что и сама матрица S:

$$A = XDX^T, \tag{3}$$

где D – диагональная матрица, содержащая на своей главной диагонали собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы A. Заодно формула (3) показывает, что все эти матрицы A нормальны.

Перемножим матрицы в правой части соотношения (3) и заменим это соотношение поэлементными равенствами

$$a_{jk} = \frac{2}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\mu_s \sin\frac{\pi js}{n+1}\sin\frac{\pi ks}{n+1}, \qquad j, k = 1\dots, n.$$

Положим в этих равенствах $k = 1$:

$$a_{j1} = \frac{2}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\mu'_s \sin\frac{\pi js}{n+1}, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

где $\mu'_s = \mu_s \sin\frac{\pi s}{n+1}$. Если ввести вектор a, равный первому столбцу матрицы A, и вектор-столбец $d' = (\mu'_1, \dots, \mu'_n)^T$, то (4) можно переписать как матрично-векторное соотношение $a = \sqrt{\frac{2}{n+1}}Xd'$. Учитывая ортогональность матрицы X, выразим d' через a:

$$d' = \sqrt{\frac{n+1}{2}}Xa,$$

или, если расписать поэлементно,

$$\mu'_s = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \sin \frac{\pi j s}{n+1}, \qquad s = 1, \ldots, n.$$

Возвращаясь к числам μ_s, получаем спектральные формулы

$$\mu_s = \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{n+1}} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \sin \frac{\pi j s}{n+1}, \qquad s = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Видно, что собственные значения произвольной матрицы A из централизатора матрицы S можно получить синус-преобразованием первого столбца этой матрицы. Даже если вычислять спектр непосредственно по формулам (5), то на это понадобится $O(n^2)$ операций, что уже даёт выигрыш по сравнению со стандартными алгоритмами. Впрочем, более эффективно будет воспользоваться тем, что синус-преобразование можно выразить через дискретное Фурье-преобразование вектора длины $2(n+1)$. При использовании этого способа имеем асимптотику $O(n \log n)$ операций.

3. $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (1, 0, 0, 0)$.

Рассмотрим теперь спектральную задачу для матриц из централизатора матрицы $\widetilde{S} = S + \widetilde{E} = S + E_{11}$. Для самой матрицы $\widetilde{S}$ справедливо спектральное разложение [4]

$$\widetilde{S} = X \Lambda X^T,$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – диагональная матрица, содержащая на своей главной диагонали собственные значения

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n+1}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

а X – ортогональная матрица собственных векторов с элементами

$$x_{jk} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \cos \frac{\pi(2j-1)(2k-1)}{2(2n+1)}, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Получаем ту же ситуацию, что и в предыдущем разделе: обе матрицы $S + E_{11}$ и S имеют простой спектр. Таким образом, для любой матрицы из централизатора матрицы $S + E_{11}$ верно представление $A = XDX^T$, но уже для другой матрицы X. И здесь все матрицы централизатора оказываются нормальными. Аналогично предыдущему случаю находим выражения элементов первого столбца матрицы A через собственные значения μ_s:

$$a_{j1} = \frac{4}{2n+1}\sum_{s=1}^{n}\mu_s \cos\frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}\cos\frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)}, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Введём для сокращения записи числа $\mu'_s = \mu_s \cos\frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}$. Тогда

$$a_{j1} = \frac{4}{2n+1}\sum_{s=1}^{n}\mu'_s \cos\frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)}, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Это равенство можно переписать как матричное соотношение $a = \frac{2}{\sqrt{2n+1}}Xd'$, где векторы a и d' определяются так же, как в разделе 2. Из равенства $d' = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}Xa$ выводим спектральные формулы для матрицы A:

$$\mu_s = \frac{1}{\cos\frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}}\sum_{j=1}^{n}a_{j1}\cos\frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)}, \qquad s = 1,\ldots,n.$$

На этот раз собственные числа определяются одним из дискретных косинус-преобразований первого столбца матрицы A.

4. $(\alpha_{11},\alpha_{1n},\alpha_{n1},\alpha_{nn}) = (-1,0,0,0)$.
Как следует из [5], собственными значениями матрицы $\widetilde{S} = S - E_{11}$ являются числа

$$\lambda_k = 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Аналогично предыдущим случаям заключаем, что для любой матрицы A из централизатора матрицы $S - E_{11}$ верно спектральное разложение $A = XDX^T$, где X – ортогональная матрица собственных векторов с элементами

$$x_{jk} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}}\sin\frac{\pi(2j-1)k}{2n+1}, \qquad j,k = 1,\ldots,n.$$

Снова все матрицы из централизатора оказываются нормальными.

Повторяя те же рассуждения, что и выше, получаем следующие формулы для собственных значений матрицы A:

$$\mu_s = \frac{1}{\sin\frac{\pi s}{2n+1}}\sum_{j=1}^{n}a_{j1}\sin\frac{\pi(2j-1)s}{2n+1}, \qquad s = 1,\ldots,n.$$

5. $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (1, 0, 0, 1)$.
Собственные значения и собственные векторы матрицы $\widetilde{S} = S + E_{11} + E_{nn}$ указаны в [5]:

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi(k-1)}{n}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ортогональная матрица собственных векторов X из равенства $\widetilde{S}X = X\Lambda$ имеет элементы

$$x_{jk} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} & , \quad k = 1, \\ \sqrt{\frac{2}{n}}\cos\frac{\pi(2j-1)(k-1)}{2n} & , \quad k > 1. \end{cases}$$

Спектр (нормальной) матрицы A из централизатора матрицы $\widetilde{S}$ вычисляется по формулам

$$\mu_s = \frac{1}{\cos\frac{\pi(s-1)}{2n}} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \cos\frac{\pi(2j-1)(s-1)}{2n}, \qquad s = 1, \ldots, n.$$

6. $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (-1, 0, 0, 1)$.
Снова используя [5] и применяя те же рассуждения, что и в предыдущих разделах, получаем спектральную формулу для произвольной (нормальной) матрицы A из централизатора матрицы $\widetilde{S} = S - E_{11} + E_{nn}$:

$$\mu_s = \frac{1}{\sin\frac{\pi(2s-1)}{4n}} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \sin\frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{4n}, \qquad s = 1, \ldots, n.$$

Литература

1. E. Bozzo, *Algebras of higher dimension for displacement decompositions and computations with Toeplitz plus Hankel matrices.* — Linear Algebra Appl. **230** (1995), 127–150.
2. R. Bevilacqua, N. Bonannie, E. Bozzo, *On algebras of Toeplitz plus Hankel matrices.* — Linear Algebra Appl. **223/224** (1995), 99–118.
3. А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *О собственных значениях $(T + H)$-циркулянтов и косых $(T + H)$-циркулянтов.* — Сиб. ж. вычисл. матем. **17**, No. 2 (2014), 111–124.
4. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений.* Наука, М., 1978.

5. R. T. Gregory, D. L. Karney, *A collection of matrices for testing computational algorithms.* Wiley–Interscience, New York–London–Sydney, 1969.

Abdikalykov A. K., Ikramov Kh. D. On the eigenvalues of certain classes of normal Toeplitz-plus-Hankel matrices.

Certain classes of normal Toeplitz-plus-Hankel matrices whose eigenvalues can be computed as efficiently as those of circulants are indicated.

Казахстанский филиал
Московского государственного университета,
010010 Астана, Казахстан,
ул. Мунайтпасова, 7
E-mail: adiko2008@gmail.com

Поступило 15 сентября 2015 г.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su