Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

А. А. Федотов, Е. В. Щетка

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ВКБ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Посвящается Василию Михайловичу Бабичу, яркому ученому и замечательному человеку

§1. Введение

Мы рассматриваем разностное уравнение Шредингера

$$\psi(z+h)+\psi(z-h)+v(z)\psi(z)=E\psi(z), \quad z\in D, \tag{1.1}$$

где $h>0$ и $E\in\mathbb{C}$ – параметры, а v – комплекснозначная функция, аналитическая в некоторой области $D\subset\mathbb{C}$. Мы заинтересованы в систематическом развитии асимптотического метода для исследования асимптотик его решений при $h\to 0$. Заметим, что формально

$$\psi(z+h)+\psi(z-h)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{2n}}{(2n)!}\,\frac{d^{2n}\psi}{dz^{2n}}(z)=2\cos\left(\frac{h}{i}\frac{d}{dz}\right)\psi\,(z),$$

и поэтому параметр h можно считать квазиклассическим асимптотическим параметром.

Для дифференциального уравнения

$$-h^2\frac{d^2\psi}{dz^2}(z)+v(z)\psi(z)=E\psi(z), \quad z\in D, \tag{1.2}$$

квазиклассические асимптотики решений на области D комплексной плоскости исследуют в рамках комплексного метода ВКБ; эти результаты имеют огромное число приложений, см. [2].

Аналог комплексного метода ВКБ для разностного уравнения

$$\psi(z+h)+\psi(z-h)+2\cos z\;\psi(z)=E\psi(z), \quad z\in\mathbb{C}, \tag{1.3}$$

был развит в работе [1]. Отметим, что это – знаменитое уравнение Харпера; оно возникает при изучении свойств блоховского электрона

Ключевые слова: разностное уравнение Шредингера, комплексный метод ВКБ.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-01-00165-а и СПбГУ 11.38.263.2014.

в кристалле, помещенном в слабое постоянное магнитное поле (h пропорционально магнитному потоку). Читатель найдет рассказ о квазиклассическом исследовании этого замечательного уравнения в обзоре [4].

Работа [1] была первой, где исследовались квазиклассические асимптотики решений разностных уравнений на комплексной плоскости. И хотя ее основной результат – теорема о существовании решений (1.3) со стандартным асимптотическим поведением на некоторых специальных областях комплексной плоскости – оказался очень естественным, его доказательство было слишком изощренным. В этой работе, используя идеи [3], возникшие при исследовании задачи другой природы, мы даем новое, относительно простое доказательство этой теоремы. Теперь она формулируется и доказывается для широкого класса уравнений – уравнений вида (1.1). В этой работе мы предполагаем, что D – ограниченная область. Для неограниченных областей план доказательства остается прежним, но его реализация существенно зависит от типа поведения v на бесконечности. Мы сконцентрируемся на "неограниченном" случае в других работах.

§2. Основная теорема комплексного метода ВКБ

Прежде чем обратиться к случаю разностных уравнений, напомним основной результат классического комплексного метода ВКБ – метода, развитого для дифференциальных уравнений.

2.1. Основная теорема классического комплексного метода ВКБ для уравнения (1.2)**.** Начнем с описания основных аналитических и геометрических объектов метода. *Комплексным импульсом* называют многозначную аналитическую функцию p, определяемую соотношением

$$p^2(z) + v(z) = E, \quad z \in D.$$

Заметим, что точки ветвления p одновременно являются его нулями и точками поворота для уравнения (1.2).

Рассмотрим простую гладкую ориентированную кривую $\gamma \subset D$, не содержащую точек ветвления p. Фиксируем на γ непрерывную ветвь p_0 комплексного импульса. Пусть $z_0 \in \gamma$. Кривую γ называют *канонической* (относительно ветви p_0), если во всех точках $z \in \gamma$ производная от функции $z \mapsto \operatorname{Im} \int_{z_0}^{z} p_0\, dz$ вдоль γ положительна.

Пусть $K \subset D$ – односвязная область, не содержащая точек ветвления p. Фиксируем на ней непрерывную ветвь p_0 комплексного импульса. Будем называть K *канонической областью*, если из любой ее точки z можно провести в K каноническую кривую (относительно ветви p_0) к некоторой фиксированной точке области K. Имеет место теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $K \subset D$ – каноническая область. При достаточно малых h уравнение* (1.2) *имеет решения $\psi_\pm$, аналитические в D и допускающие в K асимптотические представления*

$$\psi_\pm(z) = \frac{e^{\pm \frac{i}{h} \int_{z_0}^{z} p\, dz}}{\sqrt{p(z)}}(1 + O(h)), \qquad h \to 0,$$

где $z_0 \in K$ – произвольная фиксированная точка. Оценка погрешности локально равномерна по z.

Здесь и ниже, говоря о локальной равномерности асимптотических формул в некоторой области, мы имеем в виду равномерность на каждом фиксированном компактном подмножестве этой области.

Заметим, что детальный анализ геометрии канонических областей содержится в [2].

Теперь вернемся к разностным уравнениям вида (1.1).

2.2. Основная теорема комплексного метода ВКБ для разностных уравнений. Определим *комплексный импульс* p равенством

$$2\cos p(z) + v(z) = E, \qquad z \in D. \tag{2.1}$$

Теперь p – многозначная аналитическая функция с точками ветвления, удовлетворяющими уравнению $\pm 2 + v(z) = E$. Ниже мы называем множество регулярным, если оно не содержит точек ветвления p.

Замечание 2.1. Пусть $O \subset D$ – регулярная односвязная область, а p_0 – ветвь комплексного импульса, аналитическая в O. Все остальные ветви p, аналитические на O, имеют вид $\sigma p_0 + 2\pi k$, где $\sigma \in \{\pm 1\}$, а $k \in \mathbb{Z}$.

Будем называть гладкую кривую с концами $\gamma \subset \mathbb{C}$ *вертикальной*, если она пересекает прямые параллельные вещественной оси под ненулевыми углами. Будем считать, что вертикальные кривые ориентированы снизу вверх. Естественным параметром вдоль вертикальной кривой является $y = \operatorname{Im} z$.

Пусть γ – регулярная вертикальная кривая. Фиксируем на γ непрерывную ветвь p_0 комплексного импульса. Будем называть γ *канонической*, если вдоль нее

$$\frac{d}{dy}\left(\operatorname{Im}\int\limits_{z_0}^{z(y)} p_0\,dz\right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dy}\left(\operatorname{Im}\int\limits_{z_0}^{z(y)} (p_0-\pi)\,dz\right) < 0,$$

где $z_0 \in \gamma$ – произвольно фиксированная точка.

Будем называть связную область *горизонтально связной*, если любые две ее точки с одинаковой мнимой частью содержатся в ней вместе с соединяющим их отрезком прямой.

Пусть $K \subset D$ – регулярная горизонтально связная область, а z_1, $z_2 \in D$ – две регулярные точки, находящиеся на ее границе. Фиксируем на K непрерывную ветвь p_0 комплексного импульса. Будем называть K *канонической областью*, если $K \cup \{z_1, z_2\}$ является объединением кривых, канонических относительно p_0 и соединяющих в K точки z_1 и z_2.

В этой работе будет доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $K \subset D$ – область каноническая относительно некоторой ветви p комплексного импульса. При достаточно малых h уравнение* (1.1) *имеет решения $\psi_\pm$, аналитические в K и допускающие в K асимптотические представления*

$$\psi_\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{\sin p(z)}}\, e^{\pm\frac{i}{h}\int\limits_{z_0}^{z} p\,dz + O(h)}, \tag{2.2}$$

где $z_0 \in K$ — произвольная фиксированная точка. Оценка погрешности локально равномерна по $z \in K$.

Замечание 2.2. В этой работе мы не обсуждаем существование и геометрию канонических областей. Несколько конкретных примеров неограниченных канонических областей для уравнения Харпера (1.3) можно найти в [1]. С их помощью можно построить ограниченные канонические области.

2.3. План доказательства. Здесь мы обсудим план и идеи доказательства Теоремы 2.2. Оставшаяся часть работы посвящена выполнению намеченного плана.

Сначала мы переходим от разностного уравнения второго порядка (1.1) к эквивалентной ему системе из двух разностных уравнений первого порядка. Затем, пользуясь малостью h, мы преобразуем ее к системе уравнений с матрицей близкой к диагональной. Это преобразование оказывается возможным в регулярной области $O \subset D$. В итоге мы получаем уравнение для вектор-функции $\Phi : O \to \mathbb{C}^2$ вида

$$\Phi(z+h) = T(z)\Phi(z), \qquad z \in O, \tag{2.3}$$

с аналитической матрицей-функцией T близкой к диагональной:

$$T(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & 0 \\ 0 & e^{-ip(z)} \end{pmatrix} + O(h).$$

Далее, с помощью преобразования вида

$$\chi(z) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{h}\theta(z)+O(1)} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{h}\theta(z)+O(1)} \end{pmatrix} \Phi(z), \qquad \theta(z) = \int\limits_{z_0}^{z} p\,dz, \quad z_0 \in O,$$

мы переходим от (2.3) к уравнению с матрицей, диагональные элементы которой близки к единице. Оно может быть переписано следующим образом:

$$\begin{gathered} \chi(z+h) - \chi(z) = T_1(z)\chi(z), \quad z \in O, \\ \text{где } T_1 = \begin{pmatrix} O(h^2) & O(he^{-\frac{2i}{h}\theta}) \\ O(he^{\frac{2i}{h}\theta}) & O(h^2) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Разностный оператор первого порядка в левой части (2.4) может быть легко обращен (см. Лемму 4.2), и нам удается прийти к уравнению

$$\widetilde{\chi}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K\,\widetilde{\chi}\,(z), \tag{2.5}$$

где K – сингулярный интегральный оператор, действующий в подходящем пространстве аналитических функций на данной вертикальной кривой $\gamma \subset O$. Если γ является канонической, то норма этого оператора мала, и мы можем построить решение (2.5). Это решение аналитически продолжается с кривой γ, и в терминах его аналитического продолжения нам и удается построить одно из искомых решений уравнения (1.1). Второе строится аналогично.

Замечание 2.3. В [1] основная теорема комплексного метода ВКБ была доказана для уравнения (1.3). Доказательство шло по другому пути: оно было основано на исследовании нелинейного разностного уравнения Риккати и оказалось довольно изощренным. Теперь мы используем идеи работы [3], посвященной исследованию задачи другой природы – одномерного дифференциального уравнения Шредингера с периодическим потенциалом, возмущенным медленно изменяющимся слагаемым. Появляющийся у нас сингулярный интегральный оператор изучался в [3] как оператор на подходящем пространстве Гёльдеровских функций. Здесь мы рассматриваем его на некотором пространстве аналитических функций, что сильно упрощает анализ.

§3. Преобразование (1.1) к системе уравнений с матрицей близкой к диагональной

Вместо уравнения (1.1) будем изучать разностное уравнение первого порядка

$$\Psi(z+h) = M(z)\Psi(z), \quad M(z) = \begin{pmatrix} E - v(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z \in D. \tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Вектор-функция Ψ, определенная и удовлетворяющая (3.1) при $z, z+h \in D$, может быть с помощью самого уравнения доопределена на $D+h$ до решения этого уравнения при $z \in D$.

Любое векторное решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\Psi(z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ \psi(z-h) \end{pmatrix},$$

где ψ – решение уравнения (1.1).

Заметим, что матрица $M(z)$ диагонализуема, если $\operatorname{tr} M(z) \neq \pm 2$, а так как $\operatorname{tr} M(z) = 2\cos p(z)$, то она диагонализуема, если z является регулярной точкой. Пусть $O \subset D$ – регулярная односвязная область, и пусть

$$U(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & 1 \\ 1 & e^{ip(z)} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при $z \in O$ матрица $U(z)$ невырождена, и

$$(U(z))^{-1} M(z) U(z) = \begin{pmatrix} e^{ip(z)} & 0 \\ 0 & e^{-ip(z)} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\Psi(z) = U(z)\Phi(z), \quad z \in O. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\Phi(z+h) = T(z)\Phi(z), \qquad z \in O, \tag{3.3}$$

где

$$T(z) = U^{-1}(z+h) M(z) U(z).$$

Асимптотику T описывает следующая лемма.

Лемма 3.1. *При* $h \to 0$

$$T = \begin{pmatrix} e^{ip - ip'\frac{h}{2} - (\ln\sin p)'\frac{h}{2}} + O(h^2) & O(h) \\ O(h) & e^{-ip - ip'\frac{h}{2} - (\ln\sin p)'\frac{h}{2}} + O(h^2) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Оценки погрешности локально равномерны по $z \in O$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$T(z) = \frac{1}{e^{2ip(z+h)} - 1} \begin{pmatrix} e^{ip(z)}\left(e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1\right) & e^{-ip(z)}\left(e^{ip(z+h)} - e^{ip(z)}\right) \\ e^{ip(z)}\left(e^{ip(z+h)} - e^{ip(z)}\right) & e^{-ip(z)}\left(e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{C} \subset O$ – компакт. Очевидно, множество точек ветвления p расположено на положительном расстоянии от $\mathcal{C}$. Поэтому, равномерно по $z \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - 1}{e^{2ip(z+h)} - 1} &= 1 + \frac{e^{ip(z)+ip(z+h)} - e^{2ip(z+h)}}{e^{2ip(z+h)} - 1} \\ &= 1 + \frac{e^{2ip+ip'h+O(h^2)} - e^{2ip+2ip'h+O(h^2)}}{e^{2ip+O(h)} - 1} = 1 - \frac{ip'he^{2ip}}{e^{2ip} - 1} + O(h^2), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $\sin p(z) = 0$ только в точках ветвления. Используя полученный результат и равенство

$$\frac{(ip + \ln\sin p)'}{2} = \frac{ip'e^{2ip}}{e^{2ip} - 1}, \tag{3.5}$$

мы получим искомые асимптотические представления для T_{11} и T_{22}. Оценки для T_{12} и T_{21} при $z \in \mathcal{C}$ очевидны. □

§4. Вывод сингулярного интегрального уравнения

Сначала преобразуем уравнение (3.3) к уравнению с матрицей с диагональными членами близкими к единице. Для этого представим $\Phi(z)$ в виде

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = V(z)\,X(z), \\ &V(z) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta(z)}{h} - \frac{1}{2}\ln\sin p(z) - ip(z)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta(z)}{h} - \frac{1}{2}\ln\sin p(z)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\theta(z) = \int_{z_0}^{z} p\,dz$, а $z_0 \in O$ – произвольная фиксированная точка. Очевидно, что X удовлетворяет уравнению

$$X(z+h) = \widehat{T}(z)\,X(z), \qquad z \in O,$$

в котором $\widehat{T}(z) = (V(z+h))^{-1}T(z)V(z)$. Асимптотику $\widehat{T}$ описывает следующая лемма.

Лемма 4.1. *При* $h \to 0$

$$\widehat{T}(z) = I + \widehat{T}_1(z), \qquad \widehat{T}_1(z) = \begin{pmatrix} O(h^2) & e^{-\frac{2i\theta(z)}{h}}O(h) \\ e^{\frac{2i\theta(z)}{h}}O(h) & O(h^2) \end{pmatrix}$$

с локально равномерными по $z \in O$ *оценками погрешности.*

Доказательство. Используя определение $\widehat{T}$ и асимптотику T_{11}, см. (3.4), получаем

$$\widehat{T}_{11} = e^{(-\frac{i\theta}{h}+ip+\frac{1}{2}\ln\sin p)\big|_z^{z+h}}\,T_{11} = e^{-ip+ip'\frac{h}{2}+(\ln\sin p)'\frac{h}{2}\big|_z+O(h^2)}\,T_{11} = 1+O(h^2)$$

с оценкой погрешности равномерной по z на любом компактном подмножестве O. Аналогично,

$$\widehat{T}_{12} = e^{-\frac{i\theta(z+h)}{h}+\frac{1}{2}\ln\sin p(z+h)+ip(z+h)-\frac{i\theta(z)}{h}-\frac{1}{2}\ln\sin p(z)}\,T_{12} = e^{-\frac{2i\theta(z)}{h}}\,O(h).$$

Подобным образом получаются и асимптотики для $\widehat{T}_{22}$ и $\widehat{T}_{21}$. □

Используя доказанную лемму, перепишем уравнение на вектор X в виде

$$X(z+h) - X(z) = \widehat{T}_1(z)\,X(z). \tag{4.2}$$

Чтобы прийти к интегральному уравнению, мы обратим “оператор” в левой части (4.2). Для этого используется лемма.

Лемма 4.2. *Пусть* $h > 0$, f – *функция, аналитическая в горизонтально связной области* D, *и* $z_1, z_2 \in D$, $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$. *Пусть* $\widehat{D} = \cup_{t\in[0,h)}(D+t)$. *Обозначим через* γ_z *вертикальную кривую, идущую в* D *от* z_1 *к* z_2 *через* z. *Функция*

$$g(z) = Lf(z), \quad \text{где } Lf(z) = \frac{1}{2ih}\int\limits_{\gamma_z}\cot\left[\frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h}\right]\,f(\zeta)\,d\zeta \tag{4.3}$$

аналитична в области $\{z \in \widehat{D} : \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$ *и для* z *и* $z+h$, *находящихся в этой области, удовлетворяет уравнению*

$$g(z+h) - g(z) = f(z). \tag{4.4}$$

Утверждение леммы об аналитичности $g = Lf$ напрямую следует из определения Lf и аналитичности f в D, а уравнение (4.4) мгновенно получается с помощью теоремы о вычетах. Опуская детали, мы отметим, что аналогичные утверждения содержатся в [1, 3].

Общее решение неоднородного уравнения (4.4) является суммой решения, описанного в лемме 4.2, и общего решения однородного уравнения $g(z+h) - g(z) = 0$.

Ниже мы будем дополнительно считать, что O – горизонтально связная область. Чтобы воспользоваться леммой 4.2 фиксируем точки z_1 и z_2 в O так, чтобы $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$, и соединим их вертикальной кривой $\gamma \subset O$. Для функции f, достаточно регулярной на γ, положим

$$L_+ f(z) = \frac{1}{2ih} \int\limits_\gamma \left(\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h}\right] - i \right) f(\zeta)\, d\zeta, \quad z \in \gamma. \tag{4.5}$$

Заметим, что выражение $L_+ f$ отличается от выражения Lf из Леммы 4.2 добавлением константы – решения однородного уравнения $g(z+h) = g(z)$.

Для построения решения (4.2), аналитического в области $\{z \in O : \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$, мы сначала рассмотрим уравнение

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_+(\widehat{T}_1 X) \tag{4.6}$$

на γ. Построив и изучив решение этого уравнения, мы убедимся, что оно аналитически продолжается в нужную область и удовлетворяет там (4.2).

§5. Решение интегрального уравнения

Для анализа интегрального уравнения удобно его немного преобразовать.

5.1. Интегральное уравнение с оператором K_+. Пусть $X_{1,2}$ – компоненты вектора X. Фиксируем $\alpha \in (0,1)$ и положим

$$X_2 = h^\alpha e^{2i\theta/h} \widetilde{X}_2. \tag{5.1}$$

Тогда уравнение (4.6) преобразуется к виду

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_+ O(h^2) & L_+ O(h^{1+\alpha}) \\ K_+ O(h^{1-\alpha}) & K_+ O(h^2) \end{pmatrix} \widetilde{X}, \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \widetilde{X}_2 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где

$$K_+ f(z) = e^{-\frac{2i\theta(z)}{h}} L_+ \left(e^{\frac{2i\theta(.)}{h}} f(.) \right)(z). \tag{5.3}$$

Здесь $O(\cdot)$ обозначают аналитические функции с соответствующими оценками локально равномерными в O, а каждый элемент матрицы-оператора действует на функцию следующим образом: сначала происходит умножение на $O(\cdot)$, а затем ко всему выражению применяется оператор L_+ или K_+.

Построение решений уравнения (5.2) является кульминационным моментом в доказательстве теоремы 2.2. Теперь наша ближайшая цель – показать, что в случае, когда γ – каноническая кривая, при подходящем выборе функционального пространства норма оператора, стоящего в правой части (5.2), оказывается малой, и это уравнение имеет единственное решение.

5.2. Оценки норм интегральных операторов. Фиксируем $0 < a < 1$ и рассмотрим полосу

$$\Pi_{\gamma,a} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \exists \zeta \in \gamma \setminus \{z_1, z_2\} : \operatorname{Im}\zeta = \operatorname{Im} z \text{ и } |\operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Re} z| < ah\}.$$

Будем считать, что h настолько мало, что $\Pi_{\gamma,a} \subset O$. Фиксируем $0 < b < 1$ и будем рассматривать уравнение (5.2) в пространстве $H_{\gamma,a,b}$ аналитических в $\Pi_{\gamma,a}$ функций с конечной нормой

$$\|f\| = \sup_{z \in \Pi_{\gamma,a}} \left(|z - z_1|^b |z - z_2|^b |f(z)| \right).$$

Очевидно, $H_{\gamma,a,b}$ является банаховым пространством.

Оценим нормы операторов L_+ и K_+ в $H_{\gamma,a,b}$. Договоримся обозначать положительные константы, не зависящие от h, z и ζ, буквой C. Запись $g(z,\zeta,h) = O(f(z,\zeta,h))$ будет означать, что $|g(z,\zeta,h)| \leqslant C\,|f(z,\zeta,h)|$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть $\gamma \subset O$ – строго вертикальная кривая с концами. Тогда $L_+ : H_{\gamma,a,b} \to H_{\gamma,a,b}$ и $\|L_+\| \leqslant C/h$ при достаточно малых h.*

Доказательство. Пусть $f \in H_{\gamma,a,b}$ и $g = L_+ f$. Сначала, изучая g, мы будем предполагать, что z находится в $\Pi_{\gamma,a}$ на кривой γ или справа от нее (пока явно не будет сказано, что z находится слева от γ).

Проверим аналитичность g. Полюса подынтегрального выражения в формуле для L_+f расположены в точках $z+0+h\mathbb{Z}$. Предположим, что z находится справа от γ. Тогда, так как $a<1$, то расстояние от γ – контура интегрирования – до множества полюсов положительно и аналитичность g в точке z очевидна. Если $z\in\gamma$, то мы деформируем контур интегрирования около z так, чтобы он обходил z слева по достаточно малой окружности и опять устанавливаем аналитичность.

Теперь оценим g при достаточно малых h. Для этого продеформируем γ к новой вертикальной кривой $\widetilde{\gamma}$ так, чтобы

(1) z_1 и z_2 оставались концами $\widetilde{\gamma}$;
(2) между z_1 и z_2 кривая $\widetilde{\gamma}$ была слева от γ;
(3) в полосе $\operatorname{Im} z_1+h\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant \operatorname{Im} z_2-h$ кривая $\widetilde{\gamma}$ совпадала с $\gamma-Ch$ с $0<C<1-a$;
(4) при $\operatorname{Im} z_1<\operatorname{Im} z<\operatorname{Im} z_1+h$ (при $\operatorname{Im} z_2>\operatorname{Im} z>\operatorname{Im} z_2-h$) $\widetilde{\gamma}$ была расположена между γ и $\gamma-Ch$ с той же константой, что и в предыдущем пункте;
(5) при $\operatorname{Im} z_1<\operatorname{Im} z<\operatorname{Im} z_1+h$ (при $\operatorname{Im} z_2>\operatorname{Im} z>\operatorname{Im} z_2-h$) между γ и $\widetilde{\gamma}$ можно было поместить открытый угол раствора C с вершиной в точке z_1 (соответственно z_2);
(6) во всех точках $\widetilde{\gamma}$ угол между $\widetilde{\gamma}$ и $\mathbb{R}$ отделен от нуля равномерно по h.

Поскольку $0<a<1$, то для всех рассматриваемых z, в виду пунктов (1-4), между γ и $\widetilde{\gamma}$ и на них нет полюсов подынтегрального выражения в формуле для L_+f, и в этой формуле γ можно заменить на $\widetilde{\gamma}$, что мы и делаем ниже.

Оценивая g рассмотрим последовательно несколько случаев:
Случай I: $\operatorname{Im} z_1+h\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant \operatorname{Im} z_2-h$. Заметим, что на комплексной плоскости вне фиксированной окрестности точек $\pi\mathbb{Z}$ котангенс равномерно ограничен. Отсюда и из пунктов (3–5) следует, что для всех рассматриваемых z и для всех $\zeta\in\widetilde{\gamma}$ котангенс из (4.5) ограничен равномерно по z, ζ и h. Отсюда и из свойства (6) кривой $\widetilde{\gamma}$ вытекает, что для всех рассматриваемых z

$$|g(z)|\leqslant C\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{d\eta}{(\eta-y_1)^b(y_2-\eta)^b}\,\|f\|/h\leqslant C\|f\|/h,\quad y_{1,2}=\operatorname{Im} z_{1,2}.$$

Случай II: $\operatorname{Im} z_1<\operatorname{Im} z<\operatorname{Im} z_1+h$. Представим интеграл в правой части (4.5) в виде суммы интеграла по части $\widetilde{\gamma}$, расположенной ниже $\operatorname{Im} z_1 + h$, и интеграла по оставшейся части $\widetilde{\gamma}$. В результате g запишется как сумма двух слагаемых. Обозначим их через I_1 и I_2 соответственно. I_2 оценивается также как мы оценивали функцию g выше. Получается, что $|I_2| \leqslant C\|f\|/h$.

Обсудим I_1. Легко видеть, что для рассматриваемых z только один полюс подынтегрального выражения – полюс в точке $z+0$ – может приближаться к контуру интегрирования в I_1, а остальные находятся от него на расстоянии большем Ch (см. свойство (4) кривой $\widetilde{\gamma}$). Поэтому, в подынтегральном выражении

$$\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h}\right] - i = \frac{h}{\pi(\zeta - z - 0)} + O(1)$$

и

$$|I_1| \leqslant C\,\|f\|\left(\int\limits_{\widetilde{\gamma},\ \operatorname{Im}\zeta\leqslant y_1+h}\left|\frac{d\zeta}{(z-\zeta)(\zeta-z_1)^b}\right| + \int\limits_{\widetilde{\gamma},\ \operatorname{Im}\zeta\leqslant y_1+h}\left|\frac{d\zeta}{h(\zeta-z_1)^b}\right|\right).$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части этого неравенства через I_3 и I_4. Пусть $z - z_1 = re^{i\theta}$, $r, \theta \in \mathbb{R}$. Выполняя в I_3 замену переменных $\zeta = z_1 + rs$ и обозначая через $\widetilde{\widetilde{\gamma}}$ новый контур интегрирования, получим

$$|I_3| = \frac{1}{|z-z_1|^b}\int\limits_{\widetilde{\widetilde{\gamma}}}\left|\frac{ds}{(e^{i\theta}-s)s^b}\right| \leqslant \frac{C}{|z-z_1|^b}.$$

где мы воспользовались тем, что, благодаря свойству (5) кривой $\widetilde{\gamma}$, на $\widetilde{\widetilde{\gamma}}$ выражение $e^{i\theta} - s$ равномерно отделено от нуля для всех рассматриваемых z. Далее, с помощью свойства (6) кривой $\widetilde{\gamma}$, получаем, что

$$|I_4| \leqslant \frac{C}{h}\int\limits_{y_1}^{y_1+h}\frac{d\eta}{(\eta-y_1)^b} \leqslant \frac{C}{h^b} \leqslant \frac{C}{|z-z_1|^b}, \qquad y_1 = \operatorname{Im} z_1.$$

Из оценок для I_j, $j = 1, \ldots 4$, следует, что при $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_1 + h$ выполнено неравенство $|(z-z_1)^b g(z)| \leqslant C\|f\|/h$.

Случай III: $\operatorname{Im} z_2 > \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_2 - h$ рассматривается аналогично предыдущему. Получается оценка $|(z-z_2)^b g(z)| \leqslant C/h$.

Объединяя оценки,полученные для трех случаев, мы убеждаемся, что $|(z-z_1)^b(z-z_2)^b g(z)| \leqslant C/h$ равномерно по $z \in \Pi_{\gamma,a}$ для z расположенных справа от γ или на γ.

Обсудим случай, когда z расположено слева от γ. Заметим, что в интеграле в (4.5) при $z \in \gamma$ мы фактически интегрируем по инфинитезимально малой окружности, обходящей точку z слева. С помощью теоремы о вычетах этот интеграл можно превратить в сумму $f(z)$ и интеграла, в котором контур интегрирования обходит точку z справа. Последний интеграл изучается аналогично тому, как изучался интеграл в (4.5) выше.

В итоге наши оценки ведут к неравенству $\|g\| \leqslant C\|f\|/h$, откуда и следует утверждение предложения 5.1. □

Предложение 5.2. *Пусть $\gamma \in O$ – каноническая кривая с концами. Тогда $K_+ : H_{\gamma,a} \to H_{\gamma,a}$ и $\|K_+\| \leqslant C$ при достаточно малых h.*

Доказательство. Рассуждения проводятся параллельно рассуждениям из доказательства предложения 5.1. Пусть $f \in H_{\gamma,a,b}$ и $g = K_+ f$. Сначала, мы опять предполагаем, что z находится в $\Pi_{\gamma,a}$ на кривой γ или справа от нее.

Проверка аналитичности g проводится как при доказательстве предложения 5.1.

Для оценок g мы деформируем в формуле для $K_+ f$ контур интегрирования к кривой $\widetilde{\gamma}$, описанной в доказательстве предыдущего утверждения, и по очереди рассматриваем те же три случая, что и раньше:
Случай I: $\operatorname{Im} z_1 + h \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} z_2 - h$. Сначала покажем, что для всех рассматриваемых z и для $\zeta \in \widetilde{\gamma}$

$$\left| e^{\frac{2i}{h}\int_z^\zeta p\,dz} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{h} - i \right) \right| \leqslant C e^{-\frac{C}{h}|\operatorname{Im}(z-\zeta)|}. \tag{5.4}$$

Заметим, что на комплексной плоскости вне фиксированной окрестности точек $\pi\mathbb{Z}$ имеет место оценка

$$|\operatorname{ctg}(z) - i| \leqslant C \begin{cases} 1, & \operatorname{Im} z \geqslant 0; \\ e^{2\operatorname{Im} z}, & \operatorname{Im} z \leqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому, для рассматриваемых z и ζ

$$\left| e^{\frac{2i}{h}\int\limits_z^\zeta p\,dz} \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(\zeta-z)}{h} - i\right)\right| \leqslant C \begin{cases} e^{-\frac{2}{h}\operatorname{Im}\int\limits_z^\zeta p\,dz}, & \operatorname{Im}\zeta \geqslant \operatorname{Im} z; \\ e^{-\frac{2}{h}\operatorname{Im}\int\limits_z^\zeta (p-\pi)\,dz}, & \operatorname{Im}\zeta \leqslant \operatorname{Im} z. \end{cases} \tag{5.5}$$

Обозначим через $\zeta_\perp$ и $z_\perp$ точки, находящиеся на γ и имеющие те же мнимые части, что и ζ и z соответственно. Очевидно, $|\zeta-\zeta_\perp| \leqslant Ch$ и $|z-z_\perp| \leqslant Ch$, и в правых частях неравенств (5.5) можно заменить ζ и z на $\zeta_\perp$ и $z_\perp$ (возможно ценой некоторого увеличения константы C). Оценка (5.4) следует из полученных таким образом неравенств и условия каноничности кривой γ.

Используя (5.4) и свойство (6) кривой $\widetilde{\gamma}$, легко получить следующую оценку, справедливую для всех рассматриваемых z:

$$|g(z)| \leqslant \frac{C\|f\|}{h} \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{e^{-\frac{C}{h}|y-\eta|}\,d\eta}{(\eta-y_1)^b\,(y_2-\eta)^b}, \qquad y_{1,2} = \operatorname{Im} z_{1,2}.$$

Обозначим последний интеграл через J. Очевидно,

$$J \leqslant \frac{1}{(y_2-y)^b}\int\limits_{y_1}^{y} \frac{e^{-\frac{C}{h}(y-\eta)}\,d\eta}{(\eta-y_1)^b} + \frac{1}{(y-y_1)^b}\int\limits_{y}^{y_2} \frac{e^{-\frac{C}{h}(\eta-y)}\,d\eta}{(y_2-\eta)^b}, \quad y \in \operatorname{Im} z.$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части этого неравенства через J_- и J_+. Оценим J_-. После замены переменных $t = (\eta-y_1)/h$ получим

$$J_- = e^{-C(y-y_1)/h} h^{1-b} \int\limits_0^{\frac{y-y_1}{h}} e^{Ct} t^{-b}\,dt.$$

Заметим, что при нашем условии на z $y-y_1 \geqslant h$. Это позволяет оценить последний интеграл с помощью интегрирования по частям и убедиться, что $J_- \leqslant Ch/(y-y_1)^b$. Аналогично выводится оценка $J_+ \leqslant Ch/(y_2-y)^b$. Из этих оценок вытекает, что $|g(z)| \leqslant C\|f\|/(y_2-y)^b(y-y_1)^b$.

Случай II: $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_1 + h$. Представим $g = K_+ f$ в виде суммы двух слагаемых: каждое из них имеет тот же вид, что и правая часть в (5.3), но в первом слагаемом интеграл берется по части $\widetilde{\gamma}$, расположенной ниже $\operatorname{Im} z_1 + h$, а во втором – по оставшейся части $\widetilde{\gamma}$. Обозначим эти слагаемые через g_1 и g_2 соответственно.

Выражение g_2 оценивается аналогично тому, как оценивалось g в первом случае. В итоге получается $|g_2| \leqslant C\|f\|/|z - z_1|^b$.

Для оценки g_1 отметим, что при $|z - z_1|, |\zeta - z_1| \leqslant Ch$ выполняется оценка $\frac{1}{h}\int_z^\zeta p(u)\,du = O(1)$. Это наблюдение позволяет оценить g_1 точно также, как мы оценивали I_1 при доказательстве предложения 5.1 в случае, когда $\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_1 \leqslant h$ (случай II). Это дает: $|g_1| \leqslant C\|f\|/|z - z_1|^b$.

Из оценок для g_1 и g_2 следует, что $|g(z)| \leqslant C\|f\|/|z - z_1|^b$ для всех рассматриваемых z.

Случай III: $\operatorname{Im} z_2 > \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_2 - h$ исследуется аналогично случаю II. В итоге получается $|g(z)| \leqslant C\|f\|/|z - z_2|^b$ для всех рассматриваемых z.

До сих пор мы предполагали, что z находится на γ или справа от нее. В дополнительном случае мы используем тот же прием, что и в конце доказательства предложения 5.1.

В итоге наши оценки ведут к неравенству $\|g\| \leqslant C\|f\|$, откуда и следует утверждение предложения 5.2. □

5.3. Построение решения интегрального уравнения в $H_{\gamma,a,b}$. Рассмотрим интегральное уравнение (5.2) для вектор-функции $\widetilde{X}$ с компонентами X_1 и $\widetilde{X}_2$ из $H_{\gamma,a,b}$. Будем для краткости говорить о нем как об уравнении в $H_{\gamma,a,b}$. Будет доказана следующая лемма.

Лемма 5.1. *Для достаточно малого h уравнение* (5.2) *в $H_{\gamma,a,b}$ имеет единственное решение $\widetilde{X}$. Оно допускает асимптотическое представление*

$$\widetilde{X}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(h) \\ O(h^{1-\alpha}) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где $0 < \alpha < 1$ – постоянная из формулы (5.1), а оценки поправочных членов указаны в норме пространства $H_{\gamma,a,b}$.

Доказательство. Обозначим матричный оператор в (5.2) через $\mathcal{K}$. Из предложений 5.1 и 5.2 следует, что $\|\mathcal{K}\| \leqslant C(h^\alpha + h^{1-\alpha})$ при достаточно малых h. Поэтому, при достаточно малых h уравнение (5.2) имеет единственное решение $\widetilde{X} \in H_{\gamma,a,b}$. Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Очевидно,

$$\mathcal{K}e_1 = \begin{pmatrix} O(h) \\ O(h^{1-\alpha}) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}^2 e_1 = \begin{pmatrix} O(h) \\ O(h^{2-\alpha}) \end{pmatrix}.$$

Используя эти оценки и неравенство $0 < \alpha < 1$, получаем

$$\widetilde{X} = e_1 + \mathcal{K}e_1 + \mathcal{K}^2 e_1 + ... = e_1 + \mathcal{K}e_1 + O(h) = e_1 + \begin{pmatrix} O(h) \\ O(h^{1-\alpha}) \end{pmatrix},$$

откуда и вытекает (5.6). □

§6. Решения разностного уравнения

Здесь мы построим решения, описанные в теореме 2.2.

6.1. Аналитическое решение разностного уравнения (1.1)**.** Напомним, что $O \subset D$ – регулярная область, а $\gamma \subset O$ – каноническая кривая с концами, которые были обозначены через z_1 и z_2 так, что $\operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z_2$. Используя результаты предыдущего раздела, мы докажем следующая лемму.

Лемма 6.1. *Пусть O – горизонтально связная область. При достаточно малых h уравнение* (1.1) *имеет решение аналитическое в области $\{z \in O \ : \ \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$. В полосе $\Pi_{\gamma,a}$ оно допускает асимптотическое представление из* (2.2).

Доказательство. Пусть $\widetilde{X}$ – решение интегрального уравнения, описанное в лемме 5.1. Определим X_2 согласно (5.1) и построим вектор $X(z)$ с компонентами X_1 и X_2. Он удовлетворяет уравнению (4.6). Поэтому, согласно лемме 4.2 вектор-функция X является решением разностного уравнения (4.2) при $z, z+h \in \widehat{\Pi}_{\gamma,a}$ (операция "шляпка" определена в лемме).

Согласно формулам (4.1) и (3.2) мы строим по X решение Ψ разностного уравнения (3.1). Его первая компонента удовлетворяет уравнению (1.1). Ниже мы будем ее обозначать через ψ_+.

Асимптотика $\widetilde{X}$ в $\Pi_{\gamma,a}$ описывается формулой (5.6), и с помощью формул (5.1), (4.1) и (3.2) не трудно проследить, что в $\Pi_{\gamma,a}$ решение ψ_+ допускает асимптотическое представление из (2.2).

Обсудим возможность аналитического продолжения ψ_+. По построению вектор-функция Ψ аналитична в области $\widehat{\Pi}_{\gamma,a}$. Она удовлетворяет уравнению (3.1) при $z \in \Pi_{\gamma,a}$. Но, в этом уравнении M – матрица-функция, аналитическая в D. Так как $O \subset D$ горизонтально связна, с помощью самого уравнения (3.1) Ψ можно аналитически продолжить в часть области $\{z \in O : \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$, расположенную справа от γ. Аналитическое продолжение в оставшуюся часть этой области осуществляется с помощью равенства $\Psi(z) = (M(z))^{-1}\Psi(z+h)$. В результате, ψ_+ оказывается аналитической функцией во всей области $\{z \in O : \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$. □

6.2. Асимптотики решения ψ_+ на канонической области.

Пусть $K \subset D$ – такая каноническая область, что $K \cup \{z_1, z_2\}$ содержит γ и состоит из канонических кривых соединяющих точки z_1 и z_2. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6.2. *Асимптотическое представление из* (2.2) *для решения* ψ_+ *сохраняется и оказывается локально равномерным на области* K.

Доказательство. Пусть $u_0 \in K$. Достаточно показать, что существует (не зависящая от h) окрестность $V \subset K$ точки u_0, на которой ψ_+ допускает асимптотическое представление (2.2) с равномерной по $z \in V$ оценкой погрешности. Доказательство разбито на три этапа.

1. Пусть $\gamma' \subset K$ – еще одна каноническая кривая, соединяющая z_1 и z_2. Решение ψ сохраняет асимптотику (2.2) в полосе $\Pi_{\gamma',a}$. Действительно, вместе с ψ в область $\{z \in K : \operatorname{Im} z_1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Im} z_2\}$ продолжается и соответствующая вектор-функция $\widetilde{X}$. Деформируя в уравнении (5.2) γ к γ' в этой области, нетрудно показать, что $\widetilde{X}$ удовлетворяет этому уравнению и в $H_{\gamma',a,b}$. Отсюда и следует требуемое.

2. По определению канонической области существует каноническая кривая, соединяющая в K точки z_1 и z_2 и содержащая u_0. С другой стороны, нетрудно видеть, что каноническая кривая не теряет свойство быть канонической при малых в C^1-топологии возмущениях. Поэтому существуют две канонические кривые, соединяющие z_1 и z_2 в K и обходящие точку u_0 с разных сторон. Мы можем и будем считать, что эти кривые совпадают с γ около их общих концов.

3. Две канонические кривые из предыдущего пункта ограничивают внутреннюю подобласть V области K. Эта подобласть содержит u_0.

На ее границе, как и на обсуждаемых канонических кривых, ψ_+ допускает асимптотическое представление (2.2). Так как граница V состоит из двух внутренних отрезков канонических кривых, то оценки погрешности в асимптотическом представлении равномерны по точке границы V.

Очевидно, на границе V функция

$$f : z \mapsto \sqrt{\sin p(z)}e^{-\frac{i}{h}\int\limits_{z_0}^{z} p(z)\,dz} \psi_+(z)$$

допускает равномерную асимптотику $f(z) = 1 + O(h)$, а внутри V эта функция аналитична. Поэтому, по принципу максимума $f(z) = 1 + O(h)$ и внутри V (с равномерной оценкой погрешности). Отсюда следует, что ψ_+ допускает в V равномерное по z асимптотическое представление (2.2). □

6.3. Построение второго решения. Решение ψ_- уравнения (1.1), описанное в теореме 2.2 строится с помощью той же техники, что и решение ψ_+. Обсудим основные отличия конструкций. Первое отличие возникает при переходе к интегральному уравнению: теперь вместо (4.6) мы рассматриваем на кривой γ уравнение

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + L_-(\widehat{T}_1\chi) \tag{6.1}$$

с L_-, действующим на функции, достаточно регулярные на γ, по формуле

$$L_-g(z) = \frac{1}{2ih}\int\limits_{\gamma_z}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi(\zeta - z - 0)}{h} + i\right) g(\zeta)\,d\zeta.$$

Далее, вместо преобразования вида (5.1), мы переходим от χ к $\widetilde{\chi}$, преобразуя у χ первую компоненту так, что $\chi_1(z) = e^{-\frac{2i\theta(z)}{h}} h^\alpha \widetilde{\chi}_1(z)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда (6.1) заменяется на уравнение

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\chi}_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} \widetilde{\chi}_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

в котором K – формальный оператор вида

$$K = \begin{pmatrix} K_-O(h^2) & K_-O(h^{1-\alpha}) \\ L_-O(h^{1+\alpha}) & L_-O(h^2) \end{pmatrix},$$

и $K_-g = e^{\frac{2i\theta}{h}} L_-(e^{-\frac{2i\theta}{h}} g)$ для достаточно регулярных g.

Анализ (6.2) аналогичен анализу уравнения (5.2) и мы опустим дальнейшие детали.

Литература

1. V. Buslaev, A. Fedotov, *Комплексный метод ВКБ для уравнения Харпера.* — Алгебра и Анализ **6**, No. 3 (1994), 59–83.
2. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* Либроком, М., 2009.
3. A. Fedotov, F. Klopp, *A complex WKB method for adiabatic problems.* — Asymptotic analysis **27** (2001), 219–264.
4. А. А. Федотов, *Метод монодромизации в теории почти-периодических уравнений.* — Алгебра и анализ **25**, No. 2 (2013), 203–235.

Fedotov A. A., Tschetka E. V. Complex WKB method for difference equations in bounded domains.

We consider the difference Schrödinger equation $\psi(z+h)+\psi(z-h)+v(z)\psi(z)=E\psi(z)$, $z\in\mathbb{C}$, where $h>0$ and $E\in\mathbb{C}$ are parameters, and v is a function analytic in a bounded domain $D\subset\mathbb{C}$. We develop an asymptotic method to study its solutons in the domain D for small positive h.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
199034 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: a.fedotov@spbu.ru
sto16997@student.spbu.ru

Поступило 14 октября 2015 г.