Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 438, 2015 г.

М. М. Попов

О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНДЕКСА МОРСА И ПРОДОЛЖЕНИИ ЛУЧЕВЫХ ФОРМУЛ ЗА КАУСТИКИ

§1. Введение

Лучевой метод, оставаясь наиболее простым и наглядным с физической точки зрения, широко используется в проблемах, связанных с распространением коротких волн в акустике, электродинамике и теории упругости. К ним относятся также и весьма трудоемкие задачи миграции, т.е. задачи восстановления отражающих границ в неоднородных средах по заданным сейсмограммам на сейсмической границе. Однако лучевой метод не применим в окрестности каустик из-за обращения в нуль на них геометрического расхождения лучевой трубки, что и приводит к сингулярности амплитуды в лучевых формулах на каустиках. И хотя в сложных неоднородных средах возникают многочисленные каустики, они имеют меру нуль, т.е. в неоднородной среде остаются подобласти, где каустик нет. В них лучевыми формулами пользоваться можно, если правильно подсчитать скачки фазы в этих формулах при переходе лучей через каустики, которые прошел заданный луч от источника волнового поля до точки наблюдения.

В статье излагается метод вычисления этих скачков фазы в лучевых формулах, вызванных обращением в нуль геометрического расхождения на каустиках. При этом мы рассматриваем пока двумерный случай, так как он остается на сегодняшний день доминирующим в миграции. Предлагаемый метод фактически базируется, с одной стороны, на вычислении индекса Морса, см. теорию в [1], а также в [2, 3], т.е. числа фокальных точек (с учетом их кратности) на луче между источником и точкой набюлюдения. С другой стороны, этот способ вычисления опирается на метод расчета геометрического расхождения на центральном луче лучевой трубки, предложенный впервые автором, см. [4], и использует технику построения

Ключевые слова: лучевой метод, геометрическое расхождение, каустики, индекс Морса.

Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00535-А.

гауссовых пучков. В результате удается построить такую комплекснозначную функцию $Q(s)$ длины дуги луча s, которая ни при каком s не обращается в нуль, её аргумент $\arg Q(s)$ есть монотонная функция s, и фокальные точки на луче имеются там и только там, где либо $\arg Q(s) = \pi m,\ m = 0,1,2,\dots$, если волновое поле возбуждается точечным источником, либо $\arg Q(s) = \pi/2 + \pi m,\ m = 0,1,2,\dots$, если волновое поле задается изначально волновым фронтом $\tau(x,y) = \mathrm{const}$.

Хорошо известно, что существуют методы исследования и расчета коротковолновых полей, которые не имеют проблем с каустиками, – это и метод канонического оператора В. П. Маслова [2], и метод суммирования гауссовых пучков, [5]. Причем в последнем случае не появляется необходимость вычисления скачков фаз на каустиках, поскольку они просто не возникают в этом методе. Однако, численная реализация обоих методов оказывается существенно сложнее, чем лучевого метода, см., например, [6] и [7,8].

§2. Геометрическое расхождение лучевой трубки и уравнения в вариациях

Отправной точкой в работе является функционал Ферма

$$\Phi = \int C^{-1}\sqrt{d^2S},$$

где C – скорость распространения волн и d^2S – квадрат элемента длины. Он естественно возникает в задачах распространения коротких волн различной физической природы в неоднородных изотопных средах. Лучами называются экстремали функционала Ферма. Далее мы будем рассматривать его в двумерном случае, скорость $C(x,y)$ считать достаточно гладкой функцией, а вместо декартовых координат использовать криволинейные координаты, связанные с центральным лучом лучевой трубки.

Будем считать, что центральный луч задан в виде $\vec{r} = \vec{r}_0(s)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор на плоскости x, y, а s – длина дуги этого луча. В его окрестности введем координаты s и q формулой $\vec{r} = \vec{r}_0(s) + q\vec{e}(s)$, в которой $\vec{e}(s)$ есть единичный вектор нормали к лучу в каждой точке s. При этом, очевидно, $\frac{d}{ds}\vec{e}(s) = æ(s)\vec{t}_0(s)$, где $\vec{t}_0(s)$ – единичный вектор касательной к центральному лучу $\vec{r}_0(s)$ и $æ(s)$ – его кривизна. Система координат s, q регулярна в некоторой окрестности $\vec{r}_0(s)$ и пригодна для описания близких к $\vec{r}_0(s)$ лучей, т.е. лучей, образующих лучевую трубку.

Квадрат элемента длины $dS^2 = (d\vec{r}, d\vec{r})$ приобретает вид $dS^2 = h^2 ds^2 + dq^2$, где $h = h(s,q) = 1 + æ(s)q$ есть коэффициент Ламе системы координат s, q, а функционал Ферма описывается формулой

$$\Phi = \int \frac{\sqrt{h^2 + \dot{q}^2}}{C(s,q)}\, ds, \quad \dot{q} = \frac{d}{ds} q, \tag{2.1}$$

в которой скорость распространения волн C считается заданной в координатах s, q. Укажем на связь кривизны $æ(s)$ центрального луча $\vec{r}_0(s)$ со скоростью

$$æ(s) = \left(C^{-1}(s,q) \frac{\partial C(s,q)}{\partial q} \right)\Bigg|_{q=0},$$

вытекающей из того факта, что этот луч есть экстремаль функционала (2.1), с одной стороны, а с другой стороны, что его уравнение в рассматриваемых координатах имеет вид $q(s) \equiv 0$.

В дальнейшем удобно воспользоваться вариационным принципом в гамильтоновой форме. С этой целью введем импульс p, соответствующей координате q,

$$p = C^{-1} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sqrt{h^2 + (\dot{q})^2} \tag{2.2}$$

и обозначим через $H = H(s,q,p)$ функцию Гамильтона, тогда уравнения Эйлера для функционала (2.1) в гамильтоновой форме образуют систему двух уравнений

$$\frac{d}{ds} q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{d}{ds} p = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad H(s,q,p) = -\frac{h}{C} \sqrt{1 - C^2 p^2}. \tag{2.3}$$

Учитывая формулу (2.2), уравнения центрального луча $\vec{r}_0(s)$ принимают вид $q(s) \equiv 0, p(s) \equiv 0$.

Лучи, образующие узкую лучевую трубку в окрестности центрального $\vec{r}_0(s)$, можно описывать в первом приближении, т.е. при малых q и p, как решения линеаризованной системы (2.3). Для этого достаточно разложить H в (2.3) по степеням q и p и сохранить лишь квадратичные члены. В результате получим линейную систему уравнений, которая носит название уравнений в вариациях. Более аккуратный вывод её состоит в следующем. Обозначим через α параметр, фиксирующий луч из лучевой трубки, и пусть $\alpha = \alpha_0$ соотвествует центральному лучу $\vec{r}_0(s)$. Предположим, мы построили семейство лучей $q(s,\alpha), p(s,\alpha)$, гладко зависящее от лучевого параметра α. Введем функции

$$Q(s) = \left.\frac{\partial q(s,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad P(s) = \left.\frac{\partial p(s,\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}. \tag{2.4}$$

Дифференцируя уравнения (2.3) по α и полагая $\alpha = \alpha_0$ и, следовательно, $q = p = 0$, получаем искомую линейную систему уравнений в вариациях для функций (2.4)

$$\frac{d}{ds}Q = C_0(s)P; \quad \frac{d}{ds}P = -C_0^{-2}(s)\left.\frac{\partial^2 C(s,q)}{\partial q^2}\right|_{q=0} Q, \tag{2.5}$$

в которой $C_0(s) \equiv C(s,0)$ есть скорость, вычисленная на центральном луче лучевой трубки.

Далее воспользуемся результатом, впервые установленом в [4], подробное доказательство его содержится в монографии [9]. Функциональный определитель $\frac{D(x,y)}{D(s,\alpha)}$, рассматриваемый как функция длины дуги на центральном луче $\alpha = \alpha_0$ лучевой трубки, является решением уравнений в вариациях (2.5). Начальные условия $Q(0), P(0)$, зависят от того, каким образом задается лучевое поле. Здесь возможны два случая: 1) лучи задаются точечным источником, 2) лучи задаются положением начального волнового фронта $\tau(x,y) = \mathrm{const}$. Таким образом, для геометрического расхождения J на центральном луче справедлива следующая формула

$$J = \left|\frac{D(x,y)}{D(s,\alpha)}\right| = |Q(s)|. \tag{2.6}$$

Здесь опущено значение параметра $\alpha = \alpha_0$, т.к. эти равенства, как и предыдущие, имеют место для любого луча, поскольку каждый из них может рассматриваться как центральный для некоторой лучевой трубки.

Обратимся к выводу начальных условий для функций $Q(s)$ и $P(s)$, необходимых для вычисления геометрического расхождения в двух случаях, когда поле лучей порождается 1) точечным источником и 2) начальным волновым фронтом $\tau(x,y) = \mathrm{const}$. Для этого нам потребуется более удобная чем (2.2) формула для импульса p

$$p(s,\alpha) = \frac{\left(\vec{t}(s,\alpha), \vec{e}(s)\right)}{C\left(s, q(s,\alpha)\right)}, \tag{2.7}$$

где $\vec{t}(s,\alpha)$ означает единичный вектор касательной к лучу из лучевой трубки, фиксируемый значением этого параметра α.

Для доказательства равенства (2.7) воспользуемся уравнением для лучей $\vec{r}(s,\alpha) = \vec{r}_0(s) + q(s,\alpha)\vec{e}(s)$ из лучевой трубки. Дифференцируя его по s, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\vec{r}(s,\alpha) &= \vec{t}_0(s)\left(1 + æ(s)q(s,\alpha)\right) + \dot{q}(s,\alpha)\vec{e}(s)\\ &= \vec{t}_0(s)h(s,\alpha) + \dot{q}(s,\alpha)\vec{e}(s).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\vec{t}(s,\alpha) = \frac{\vec{t}_0(s)h + \dot{q}\vec{e}(s)}{\sqrt{h^2+\dot{q}^2}} \tag{2.8}$$

и сравнивая (2.8) с определением (2.2) импульса p, получаем (2.7).

(1) Точечный источник. Полагаем, что источник расположен в точке $\vec{r}_0(0)$ и длина дуги s отсчитывается от источника. Параметр α есть полярный угол выхода луча из источника. Лучи образуют центральное поле в окрестности источника, при этом очевидно, что $q(0,\alpha)=0$ и $p(0,\alpha)=C^{-1}(0,0)\left(\vec{t}(0,\alpha),\vec{e}(0)\right)$ для всех углов α. Используя равенства (2.4), получаем следующие начальные данные $Q^{(ps)}_{(0)}$ и $P^{(ps)}_{(0)}$ для вычисления геометрического расхождения на заданном луче

$$Q^{(ps)}_{(0)} = 0; \quad P^{(ps)}_{(0)} = C^{-1}(0,0)\left(\frac{\partial\vec{t}(0,\alpha)}{\partial\alpha},\vec{e}(0)\right)\Bigg|_{\alpha_0}. \tag{2.9}$$

Индекс ps (point source) введен здесь для обозначения того, что лучевое поле порождено точечным источником. За счет выбора ориентации нормали $\vec{e}(0)$ к лучу можно считать, что $\left(\frac{\partial\vec{t}(0,\alpha)}{\partial\alpha},\vec{e}(0)\right) = 1$.

(2) Волновой фронт. Будем считать, что изначально заданный фронт
$\tau(x,y) = \mathrm{const}$ представляет собой достаточно гладкую кривую. Лучевое поле в этом случае образовано множеством лучей, выходящих из каждой точки фронта в направлении нормали к нему, длина дуги s отсчитывается от точки выхода на фронте.

Рассмотрим окрестность точки выхода $\vec{r}_0(0)$ центрального луча $\vec{r}_0(s)$. Под лучевым параметром α будем понимать длину дуги фронта, вектор $\vec{e}(0)$ совпадает с касательной, а $\vec{t}_0(0)$ – с единичным вектором нормали $\vec{n}(\alpha_0)$ к фронту. Уравнение фронта вблизи $\vec{r}_0(0)$ в первом приближении имеет вид $n \simeq \frac{1}{2}K_0q^2$, где n – длина вдоль нормали $\vec{n}(\alpha_0)$, а K_0 – кривизна фронта в этой точке. Учитывая тот факт, что длина вдоль касательной к кривой и длина дуги кривой в окрестности точки касания отличаются на величину второго порядка малости по расстоянию до точки касания, мы получаем следующие соотношения, верные в первом приближении:

$$n \simeq s, \quad q(s,\alpha) \simeq \alpha - \alpha_0, \quad s \simeq \frac{1}{2}K_0(\alpha-\alpha_0)^2, \tag{2.10}$$

и достаточные для вычисления производных в правых частях (2.4).

Уравнение для импульса $p(s,\alpha)$ принимает в данном случае следующий вид

$$P(s,\alpha) = \frac{(\vec{n}(\alpha), \vec{e}(s))}{C\left(s, q(s,\alpha)\right)}. \tag{2.11}$$

Из формул (2.10), (2.11) следуют искомые начальные данные $Q^{(wf)}_{(0)}$ и $P^{(wf)}_{(0)}$ для геометрического расхождения в случае, когда лучевое поле порождается волновым фронтом (wf = wave front)

$$Q^{(wf)}_{(0)} = 1, \quad P^{(wf)}_{(0)} = -\frac{K_0}{C(0,0)}. \tag{2.12}$$

Заметим, что появление минуса есть следствие формулы Френе $\frac{d}{d\alpha}\vec{n}(\alpha)\big|_{\alpha_0} = -K_0\vec{e}(0)$, а $C(0,0)$ есть скорость в точке выхода луча $\vec{r}_0(0)$, если она задается в координатах s, q, используемых в наших построениях.

§3. Комплексификация задачи о геометрическом расхождении

Предположим в дальнейшем, что изложенные выше построения выполнимы для любого луча исходного лучевого поля и мы можем вычислять геометрическое расхождение вдоль каждого луча как функцию его длины дуги s. При этом геометрическое расхождение остается гладкой функцией s, при условии непрерывности коэффициентов системы (2.5), независимо от того, попадает ли луч на каустику или нет, и какова геометрическая структура этой каустики. Этот же результат имеет место и для набега фазы вдоль луча, т.е. для эйконала, вычисляемого на самом луче как функция s. Таким образом, оба эти атрибута лучевого метода продолжимы через любые каустики однозначно без проблем. Проблемы возникают, когда мы обращаемся к формуле лучевого метода, из-за того, что геометрическое расхождение входит в амплитуду этой формулы в степени $-\frac{1}{2}$, а в фокальных точках оно обращается в нуль.

Существенную роль в дальнейшем будет играть следующее свойство уравнений в вариациях (2.5).

Пусть $Q_1(s), P_1(s)$ и $Q_2(s), P_2(s)$ какие либо два решения этих уравнений, тогда для них имеет место следующее тождество относительно аргумента s

$$Q_1(s)P_2(s) - P_1(s)Q_2(s) = Q_1(0)P_2(0) - P_1(0)Q_2(0). \tag{3.1}$$

Для доказательства достаточно продифференцировать левую часть по s и воспользоваться уравнениями (2.5). Отсюда следует, что, если начальные данные при $s = 0$ этих решений таковы, что правая часть в (3.1) отлична от нуля, то никакая пара функций $Q_j(s), P_j(s), j = 1, 2,$ $Q_1(s), Q_2(s)$ и $P_1(s), P_2(s)$ одновременно не обращается в нуль ни при каком значении s.

В целях компактности формул будем обозначать решение системы в виде столбца

$$X(s) = \begin{pmatrix} Q(s) \\ P(s) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

и пусть $W(s)$ – фундаментальная матрица линейной системы (2.5), т.е. она образована двумя линейно-независимыми вещественными решениями и $W(0) = E$, E - единичная матрица.

Теперь мы можем представить решения системы (2.5) для точечного источника $X^{(ps)}(s)$ и волнового фронта $X^{(wf)}(s)$ в компактной форме

$$X^{(ps)}(s) = W(s)X^{(ps)}(0), \quad X^{(wf)}(s) = W(s)X^{(wf)}(0), \tag{3.3}$$

через начальные данные (2.9) и (2.12) соответственно.

Комплексификация задачи о геометрическом расхождении состоит в том, что с помощью двух вещественных решений $X^{(wf)}(s)$ и $X^{(ps)}(s)$ мы строим одно комплексно-значное решение $X(s)$ по формуле

$$X(s) = X^{(wf)}(s) + iX^{(ps)}(s), \tag{3.4}$$

в которой $X(s)$ содержит функции $Q(s)$ и $P(s)$, см. равенство (3.2), (уже без дополнительных индексов).

В силу того, что правая часть в (3.1) для начальных данных $X^{(wf)}(0)$ и $X^{(ps)}(0)$ отлична от нуля, мы получаем следующий результат: обе комплексно-значные функции $Q(s)$ и $P(s)$ не обращаются в нуль ни при каких значениях s, и поэтому корректно определяется $\arg Q(s)$.

Докажем, что для $\arg Q(s)$ справедлива следующая формула

$$\arg Q(s) = \frac{1}{C(0,0)} \int\limits_0^s C(s,0) \frac{1}{|Q(s)|^2} ds, \tag{3.5}$$

откуда следует, в частности, что $\arg Q(s)$ – монотонно возрастающая функция s вдоль луча.

Доказательство. Введем дополнительно обозначение

$$\Gamma(s) = P(s) Q^{-1}(s).$$

Первое уравнение системы (2.5) дает

$$\frac{d}{ds} Q(s) = C_0(s) P(s) = C_0(s) \Gamma(s) Q(s),$$

откуда следует, что $Q(s) = \exp \int\limits_0^s C_0(s) \Gamma(s) ds$, так как $Q(0) = 1$ (см. равенства (2.12) и (3.3)). В свою очередь из этого равенства вытекает, что

$$\arg Q(s) = \int\limits_0^s C_0(s) \operatorname{Im} \Gamma(s)\, ds.$$

Остается вычислить $\operatorname{Im} \Gamma(s)$: используя (2.9), (2.12) и (3.1), получаем последовательно

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Gamma(s) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{P(s)}{Q(s)} - \frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)} \right) = \frac{1}{2i} \frac{P(s)\bar{Q}(s) - Q(s)\bar{P}(s)}{|Q(s)|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{P(0)\bar{Q}(0) - Q(0)\bar{P}(0)}{|Q(s)|^2} = \frac{1}{C(0,0)|Q(s)|^2}, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (3.5).

Следствием равенств (3.3) и (3.4) является основной результат данной работы

$$Q^{(wf)}(s) = |Q(s)| \cos \arg Q(s); \quad Q^{(ps)}(s) = |Q(s)| \sin \arg Q(s). \tag{3.6}$$

Выводы, вытекающие из полученных формул таковы:

(1) Фокальными точками на данном луче (или каустическими точками) являются те и только те значения s, в которых $\arg Q(s) = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m = 0, 1, 2, \ldots$, если лучевое поле порождается волновым фронтом $\tau = \mathrm{const}$, и где $\arg Q(s) = \pi m,\ m = 0, 1, 2, \ldots$, если лучевое поле порождается точечным источником. Напомним, что точечный источник сам есть каустическая точка, соответствующая $m = 0$.

(2) В двумерном случае все фокальные точки являются простыми. Это означает, что какова бы ни была каустика на плоскости (т.е. общего положения или вырожденная как, например, фокус, где все лучи пересекаются) лучевая формула приобретает множитель $\exp(-i\frac{\pi}{2})$. Напомними, что именно такой множитель возникает на простой каустике, где волновое поле описывается функциями Эйри.

(3) Для вычисления индекса Морса между источником и точками наблюдения нужно вычислять $\arg Q(s)$ по модулю 2π. На каждом интервале длиной 2π имеются две фокальные точки. Если индекс Морса равен M, то в лучевых формулах появляется дополнительный множитель $\exp(-i\frac{\pi}{2}M)$.

§4. Заключение

В изложенном выше предполагается, что скорость распространения волн в неоднородной среде является достаточно гладкой функцией. Однако, полученные результаты легко обобщаются на случай, когда в среде есть гладкие границы раздела, на которых скорость меняется скачком. При этом на таких границах возникают отраженные и преломленные лучи, и геометрическое расхождение описанным выше образом строится вдоль этих лучей. В точках отражения/преломления они согласуются с расхождением на падающих лучах с помощью линеаризованного закона Снеллиуса, см. по этому поводу монографию [9], гл. 5, где это подробно изложено.

Таким образом, комплекснозначная функция $Q(s)$ продолжается вдоль отраженных/преломленных лучей с сохранением её свойств. При этом на границах раздела сред может возникнуть дополнительный сдвиг фазы в зависимости от того, как выбрана ориентация векторов нормали $\vec{e}(s)$ на отраженных/преломленных лучах.

Литература

1. Дж. Милнор, *Теория Морса*, Мир, Москва, 1965.
2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, Москва, 1976.
3. В. И. Арнольд, *О характеристическом классе, входящем в условия квантования.* — Фуккц. анализ прилож. **1**, No. 1 (1967).
4. М. М. Попов, *Об одном методе вычисления геометрического расхождения в неоднородной среде, содержащей границы раздела.* — Доклады АН СССР, (1977), **237**, No. 5, 1059–1062.
5. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981).
6. А. С. Крюковский, *Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф*, Изд-во РосНОУ, М. 2013.
7. A. P. Kachalov, M. M. Popov, *Gaussian beam methods and theoretical seismograms.* — Geophys. J, **93**, 465–475.
8. M. M. Popov, N. M. Semtchenok, P. M. Popov, and A. R. Verdel, *Depth migration by the Gaussian beam summation method.* — Geophysics **75**, No. 2, (2010).
9. M. M. Popov, *Ray theory and Gaussian beam method for geophysisists.* — EDUF-BA, Salvador-Bahia, (2002).

Popov M. M. On the Morse index calculation and the prolongation of the ray formulae beyond caustics.

Remaining to be the simplest and illustrative from the physical point of view, the ray method is extensively used for the computations of short wave fields of different physical nature: acoustic, electrodynamic and elastodynamic. However it is not applicable in the caustics neighborhood where ray amplitudes get singular. Although caustics may appear large in number in complex inhomogeneous media, they have zero measure and therefore there are free of caustics sub-domains in inhomogeneous medium where ray formulae can be used for the computations of the wave fields. For that aim we have to correctly calculate the phase jumps in ray amplitudes on caustics which the ray transverses on its way from the wave field source to the observation point.

According to mathematical terminology, we have to calculate Morse index for the ray, i.e. the number of focal points (with glance of their multiplicity) for the ray between the source and observation points. In the article this problem is considered and complete solution to it is given in case of two space variables. Namely, there is constructed such a complex-valued function of arc length along the ray which never vanishes on it and the increment of its argument between the source and observation point, being computed modulo 2π, gives the Morse index for that ray for the both

cases: when the rays are generated by the point source or by the initially given wave front.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 13 октября 2015 г.